

©1995

МЕЖЗОННОЕ МНОГОФОТОННОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В СВЕРХРЕШЕТКАХ

Б.С.Монозон, А.Г.Жилич

Государственный морской технический университет, Санкт-Петербург
(Поступила в Редакцию 6 июня 1994 г.)

Развивается аналитический подход к расчету коэффициента межзонного многофотонного поглощения в полупроводнике со сверхрешеткой во внешних электрическом и магнитных полях. Переменное электрическое поле сильной световой волны и однородное магнитное поле ориентированы параллельно направлению сверхрешетки. Потенциал сверхрешетки моделируется периодической цепочкой барьеров δ -образной формы. Приведены аналитические выражения для нестационарных квазиэнергетических состояний носителей в сверхрешетке и для коэффициента поглощения в общем виде. В качестве конкретных примеров вычислены коэффициенты фундаментального многофотонного поглощения и поглощения, сопровождаемого образованием двумерных экситонов. Показано, что частотный спектр фундаментального поглощения носит ступенчатый характер, а экситонный спектр содержит последовательность сближающихся полос, каждая из которых относится к определенному связанному состоянию экситона. Форма ступеньки в фундаментальном поглощении и экситонной полосы существенно зависят от четности числа поглощаемых фотонов. Общий характер полученных результатов не зависит от выбранной модели потенциала сверхрешетки. На основании оценок для структуры GaAs-AlGaAs обсуждаются возможные формы экспериментальных спектров.

Развитие полупроводниковой технологии позволило к настоящему времени успешно создавать и использовать в научных и практических целях полупроводниковые кристаллы с искусственно внедренной в них периодической микроструктурой, получившей название сверхрешетки. Такая структура, примером которой может служить соединение GaAs-AlGaAs, возникает в результате периодического чередования двух полупроводниковых слоев с достаточно близкими свойствами, но с различными запрещенными зонами. Потенциал, в котором движутся электроны и дырки, представляет собой суперпозицию внутрикристаллического трехмерного решеточного потенциала и одномерного (в направлении ортогональном плоскостям слоев) периодического потенциала сверхрешетки. В результате ветвь сплошного спектра энергии движения носителя в направлении сверхрешетки расщепляется на последовательность одномерных разрешенных и запрещенных мини-зон, которые накладываются на сплошной спектр двумерного движения в плоскости слоев.

Изменения в энергетическом спектре вызывают появление у электронной подсистемы качественно новых свойств. Одним из них является сочетание локализованных и протяженных состояний носителей. Это свойство оказалось чрезвычайно чувствительным к воздействию внешних полей. Так, в реально достижимом электрическом поле порядка 100 kV/cm , параллельном направлению сверхрешетки с периодом 50 \AA , удается локализовать электрон в пределах одного периода. Локализация экспериментально наблюдалась в оптическом поглощении [1]. Были проведены численные расчеты электронных состояний в сверхрешетке в электрическом поле [1,2], а также исследовано его влияние на спектр фотопоглощения. Теоретическому и экспериментальному изучению оптического отклика сверхрешетки в электрическом поле посвящены работы [3,4]. О подавлении экситонным взаимодействием электронов и дырок эффекта их локализации сообщают авторы работы [5]. Влияние магнитного поля, параллельного электрическому, на оптическое поглощение в сверхрешетке с вырожденной валентной зоной рассчитывалось в [6]. Свойства сверхрешетки в скрещенных магнитном и электрическом полях изучались в [7,8]. Исследовались также и экситонные эффекты в скрещенных полях [9]. Подробные обзоры электронных состояний и оптических свойств сверхрешеток во внешних полях содержатся в [5,9,10].

Характеризуя нынешнее состояние теории, следует отметить два обстоятельства. Они касаются методов расчета оптических свойств сверхрешетки и предположений об интенсивности воздействующего на нее света. В подавляющем большинстве работ рассчитывались стационарные состояния носителей, возникающие под влиянием постоянных во времени внешних полей. Эти расчеты основаны на использовании реалистического сверхрешеточного потенциала в виде периодической последовательности прямоугольных потенциальных ям, разделенных барьерами конечной протяженности и высоты. Они носят в основном численный характер, обладают высокой точностью и безусловно полезны для детальной интерпретации конкретного эксперимента. Однако в задачах, содержащих большое число параметров, характеризующих световую волну, сверхрешетку, внешние поля, использование численного подхода не может дать полного представления ни о количественных, ни тем более о качественных эффектах, обусловленных одновременно изменением нескольких параметров системы. Что касается интенсивности световой волны, то она преимущественно считалась слабой, стимулирующей однофотонные межзонные переходы носителей.

Первое из перечисленных ограничений было преодолено в работах [11,12]. В них были аналитически рассчитаны стационарные внутризонные состояния носителей во внешних постоянных электрическом и магнитном полях, а также коэффициент однофотонного межзонного поглощения. Аналитический подход стал возможен вследствие замены реальных потенциальных барьеров сверхрешетки барьерами δ -образной формы. Результаты работ [11,12] оказались в количественном согласии как с численными расчетами, так и с экспериментальными данными [1,10]. В то же время воздействие на сверхрешетку сильной световой волны, формирующей стационарные внутризонные состояния носи-

телей и вызывающей межзонные многофотонные переходы, продолжает оставаться вне поля зрения аналитической теории.

В связи с этим в настоящей работе развивается аналитический подход к расчету нестационарных квазиэнергетических состояний носителей в сверхрешетке во внешних переменном во времени электрическом и постоянном магнитном полях. Переменная компонента электрического поля световой волны поляризована параллельно направлению сверхрешетки. В качестве модельного потенциала сверхрешетки использована предельная форма потенциала Кронига-Пенни в виде периодической цепочки барьеров δ -образной формы. Приведено общее выражение для коэффициента межзонного многофотонного поглощения в сверхрешетке. В качестве конкретных примеров аналитически рассчитано фундаментальное многофотонное поглощение в отсутствие внешних стационарных полей, а также поглощение, сопровождаемое образованием двумерных экситонов в плоскостях слоев.

Показано, что вследствие динамического Штарк-эффекта разрешенные минизоны сужаются, а запрещенные расширяются. Это, в частности, приводит к коротковолновому сдвигу края фундаментального поглощения. Спектр фундаментального многофотонного поглощения носит ступенчатый характер. Частотная протяженность самой ступеньки определяется суммарной шириной пары электронной и дырочной запрещенных мини-зон, а переходная область нарастания — суммарной шириной соответствующей пары разрешенных мини-зон. Характер нарастания поглощения в переходной области зависит от четности поглощаемых фотонов. Интенсивность перехода убывает по мере роста числа участвующих в нем фотонов. В пределе при расширении разрешенных мини-зон коэффициент многофотонного поглощения в сверхрешетке приобретает тот же вид, что и коэффициент поглощения в обычном полупроводнике [13,14]. Для случая однофотонного поглощения наша формула совпадает с ранее известным выражением, приведенным Сурисом и Бережковским в [15]. Предельные переходы полученных здесь результатов в рассмотренные ранее частные случаи могут служить указанием на их независимость от выбранной модели сверхрешеточного потенциала.

Двумерные экситоны вызывают в области ниже края фундаментального поглощения последовательность спектральных полос одинаковой ширины, равной суммарной ширине пары разрешенных мини-зон. Если при определенных условиях наиболее длинноволновые полосы могут быть разделены в спектре, то по мере возрастания частоты происходит их сближение и взаимное наложение по мере приближения частоты к краю фундаментального поглощения. В этом же направлении происходит быстрое убывание интенсивности полос. Показано, что для нечетно-фотонных переходов поглощение на границе полос обладает корневыми особенностями, в то время как в случае четно-фотонных переходов поглощение при таких частотах обращается в нуль. Экситонные эффекты продолжают сказываться и в области выше края фундаментального поглощения, постепенно убывая по мере удаления в коротковолновую часть спектра.

1. Квазиэнергетические состояния частицы в сверхрешетке

Рассмотрим полупроводниковый кристалл со сверхрешеткой, содержащей большое число ($N \gg 1$) периодов a , находящийся под воздействием внешних переменного электрического $F(t)$ и однородного магнитного \mathbf{H} полей. В общем случае электрическое поле

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{E} + \eta F_0 \cos \omega t$$

представляет собой суперпозицию однородного поля \mathbf{E} и переменного поля световой волны с частотой ω , амплитудой F_0 и единичным вектором поляризации η . Рассмотрение будем вести в приближении эффективной массы, считая, что поле сверхрешетки $V(\mathbf{r})$, а также внешние поля $\mathbf{F}(t)$ и \mathbf{H} удовлетворяют критериям его применимости. Как электронную e , так и дырочную h зону считаем параболическими, орбитально невырожденными, характеризуемыми изотропными эффективными массами $m_{e,h}$ и разделенными широким энергетическим промежутком \mathcal{E}_g . Уравнение для огибающей функции $\Psi(\mathbf{r}, t)$, описывающей частицу с зарядом e и эффективной массой m , имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{e}{2c} [\mathbf{H}\mathbf{r}] \right)^2 + V(\mathbf{r}) - e\mathbf{F}(t)\mathbf{r} \right\} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (1)$$

Связь между зонами определяется оператором разрешенного электрического дипольного перехода [16]

$$P(t) = P_0 \cos \omega t, \\ P_0 = \frac{i\hbar e F_0 (\eta \mathbf{p}_{eh})}{m_0 \mathcal{E}_g}, \quad (2)$$

где \mathbf{p}_{eh} — матричный элемент оператора импульса, вычисленный на блоховских амплитудах экстремумов зон.

Считая ось OZ совпадающей с направлением сверхрешетки, представим ее поле V периодической последовательностью потенциальных ям, разделенных δ -образными барьерами с мощностью α ,

$$V(z) = \alpha \sum_s \delta(z - as), \quad \alpha > 0, \quad V(z) = V(z + a). \quad (3)$$

В том же направлении ориентируем магнитное поле и переменную составляющую электрического поля ($\mathbf{H} \parallel \eta \parallel OZ$). Тогда решение уравнения (1) может быть представлено в виде

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_\perp t} \Phi_\perp(\boldsymbol{\rho}) \varphi(z, t), \quad (4)$$

где $\Phi_\perp(\boldsymbol{\rho})$ — хорошо известная поперечная волновая функция частицы с энергией \mathcal{E}_\perp в стационарных полях $\mathbf{E}_\perp \perp \mathbf{H}$ [17], а функция $\varphi(z, t)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + [V(z) - e(E_z + F_0 \cos \omega t)z] \varphi = i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (5)$$

Стационарные решения этого уравнения при $E_z = F_0 = 0$ имеют вид

$$\varphi_n^{(0)}(z, t, k) = e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon_n(k) t} \psi_n(z, k),$$

$$\varepsilon_n(k) = \varepsilon_n \left(k + \frac{2\pi}{a} \right), \quad \psi_n(z, k) = \psi_n \left(z, k + \frac{2\pi}{a} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

где $\varepsilon_n(k)$ — разрешенные энергетические мини-зоны, а $\psi_n(z, k)$ — блоховские функции частицы в сверхрешетке со средним импульсом $\hbar k$.

Проницаемость барьера будем характеризовать его безразмерной обратной мощностью

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2ma\alpha},$$

которая может рассматриваться как параметр теории, но может быть также рассчитана исходя из протяженности и высоты реального барьера.

В приближении слабой проницаемости барьеров $\alpha \ll 1$ выражения для $\varepsilon_n(k)$ и $\psi_n(z, k)$ находятся в явном виде [11]. Для энергетического спектра получено выражение

$$\varepsilon_n(k) = b_n + \frac{1}{2} \Delta_n (1 - \cos ka), \quad (7)$$

где

$$b_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 [(1 - 2\alpha)^2 + 4(-1)^n \alpha],$$

$$\Delta_n = 8(-1)^{n+1} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Спектр энергии (7) представляет собой последовательность разрешенных мини-зон с экстремумами при $\varepsilon_n(0) = b_n$ и ширинами Δ_n . В дальнейшем нам потребуются лишь ближайшие к запрещенной зоне основные мини-зоны с индексом $n = 1$, который будем опускать.

Возвращаясь к нестационарному уравнению (5), представим его решение в виде

$$\varphi(z, t) = \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} c(k, t) \psi[z, q(t, k)] e^{-\frac{i}{\hbar} \varepsilon t} dk, \quad (8)$$

где

$$q(t, k) = k + \frac{eF_0}{\hbar\omega} \sin \omega t.$$

Подставляя выражение (8) в уравнение (5) и используя вытекающие из явного вида функций $\psi(z, q)$ [11] соотношения

$$\frac{\partial \psi}{\partial q} = iz\psi(1 + O(\lambda)), \quad z\psi = \left[i \frac{\partial}{\partial k} - \frac{a}{2}(1 + O\lambda) \right] \psi, \quad z \simeq as,$$

приходим к уравнению для коэффициентов $c(k, t)$

$$\left(\varepsilon(q) - \mathcal{E} + \frac{1}{2} e E_z a \right) c(k, t) - i e E_z \frac{\partial c(k, t)}{\partial k} = i \hbar \frac{\partial c(k, t)}{\partial t}. \quad (9)$$

Представим функцию $c(k, t)$ в виде

$$c(k, t) = c_0(k) c_1(k, t), \quad (10)$$

где

$$c_0(k) = \exp \left\{ -\frac{i}{e E_z} \int_0^k \left(\bar{\varepsilon}(k') - \mathcal{E} + \frac{1}{2} e E_z a \right) dk' \right\}, \quad (11)$$

$$\bar{\varepsilon}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon[q(\tau, k)] d\tau, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (12)$$

После подстановки функции $c(k, t)$ (10) в уравнение (9), считая выполненным условие

$$e E_z \frac{\partial c_1}{\partial k} \ll \hbar \frac{\partial c_1}{\partial t}, \quad (13)$$

пренебрежем в получившемся уравнении для c_1 слагаемым $\sim \frac{\partial c_1}{\partial k}$. Получим

$$c_1(k, t) [\varepsilon[q(t, k)] - \bar{\varepsilon}(k)] = i \hbar \frac{\partial c_1(k, t)}{\partial t}. \quad (14)$$

После элементарного интегрирования уравнения (14) и подстановки найденного решения $c_1(k, t)$ вместе с функцией $c_0(k)$ (11) сначала в (10), а затем в (8) приходим к окончательному выражению для продольной функции $\varphi(z, t)$ частицы в сверхрешетке в переменном электрическом поле $F_z(t) = E_z + F_0 \cos \omega t$

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) = \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dk \psi[z, q(t, k)] \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t (\mathcal{E} - \bar{\varepsilon}(k) + \varepsilon[q(\tau, k)]) d\tau - \right. \\ \left. - \frac{i}{e E_z} \int_0^k \left(\bar{\varepsilon}(k') - \mathcal{E} + \frac{1}{2} e E_z a \right) dk' \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Выражение (15) справедливо при условии (13), которому можно придать явный вид

$$\frac{e E_z a}{\hbar \omega} \ll 1. \quad (16)$$

Для кристалла с $\hbar \omega \simeq \mathcal{E}_g \simeq 1 \text{ eV}$ со сверхрешеткой с периодом $a = 50 \text{ \AA}$ в поле $E_z = 100 \text{ kV/cm}$ левая часть неравенства (16) имеет порядок $5 \cdot 10^{-2}$.

Нетрудно убедиться, что найденное решение (15) удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\varphi(z, t+T) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}T}\varphi(z, t), \\ \varphi(z, t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t}f(z, t), \quad f(z, t+T) = f(z, t),\end{aligned}\quad (17)$$

т.е. является квазиэнергетическим, соответствующим квазиэнергии \mathcal{E} . Ее значение находится из условия периодичности функции $c(k, t)$

$$c(k, t) = c\left(k + \frac{2\pi}{a}, t\right),$$

которое с учетом (11) дает

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= eE_z a \left(\nu + \frac{1}{2}\right) + \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi/a} \bar{\varepsilon}(k) dk, \\ \nu &= 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\end{aligned}\quad (18)$$

Выражение (18) представляет собой хорошо известные уровни энергии штарковского квантования.

В постоянном электрическом поле $E_z (F_0 = 0)$ функция (15) переходит в решение стационарной задачи, полученное ранее в [11]. В отсутствие постоянной составляющей ($E_z = 0$) функция (15) принимает вид (17), где

$$\mathcal{E} = \bar{\varepsilon}(k),\quad (19)$$

$$f(z, t, k) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}t}\psi[z, q(t, k)] \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \varepsilon[q(\tau, k)] d\tau\right\}.\quad (20)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно, учитывая периодичность содержащихся в выражении (20) блоховских функций $\psi(z, q)$ по переменной q , разложить их в ряд Фурье

$$\psi(z, q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu} Q_{\mu}(z) e^{iqa\mu},\quad (21)$$

где

$$Q_{\mu}(z) = \frac{a}{2\pi} \sqrt{N} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} \psi(z, q) e^{-iqa\mu} dq$$

— функция Ванье мини-зоны, локализованные в окрестности узла с индексом μ .

$$Q_{\mu'}^*(z) Q_{\mu}(z) dz = \delta_{\mu\mu'}.$$

Явный вид функций Ванье нетрудно получить, используя явный вид блоховских функций в заданной ячейке с индексом s . Из явного вида функций Ванье, в частности, следует, что при условии $\lambda \ll 1$ эти функции следует считать отличными от нуля лишь в ячейках с индексами $s = \mu, \mu - 1, \mu + 1$, причем $Q_{\mu} \sim \lambda^{|s-\mu|}$ [11].

2. Коэффициент межзонного многофотонного поглощения

Межзонное оптическое поглощение может рассматриваться как процесс перехода кристалла из основного состояния в возбужденное с появлением электрона с координатой \mathbf{r}_e в зоне проводимости и дырки с координатой \mathbf{r}_h в валентной зоне. В соответствии с таким подходом, особенно удобным при описании экситонных эффектов, основному состоянию соответствует функция $\Psi_0(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h) = \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h)$, а возбужденному — функция [18]

$$\Psi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, t) = \Psi_e(\mathbf{r}_e, t)\Psi_h(\mathbf{r}_h, t). \quad (22)$$

В качестве электронной функции $\Psi_e(\mathbf{r}_e, t)$ следует взять выражения (4), (17), полагая в них $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e$, $m = m_e$, $b = b_e$, $\Delta = \Delta_e$, $\lambda = \lambda_e$, $k = k_e$, $\mathcal{E}_\perp = \mathcal{E}_{\perp e}$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_e$. Дырочная функция строится из электронной путем замены в ней $\mathbf{r}_e \rightarrow \mathbf{r}_h$, $m_e \rightarrow m_h$, $\lambda_e \rightarrow \lambda_h$, $b_e \rightarrow b_h$, $\Delta_e \rightarrow \Delta_h$, $k_e \rightarrow -k_h$, $t \rightarrow -t$, $\mathcal{E}_{\perp e} \rightarrow \mathcal{E}_{\perp h}$, $\mathcal{E}_e \rightarrow \mathcal{E}_h$ и взятия ее комплексно-сопряженного значения. В формуле (21) электронная функция Ванье $Q_\mu(z_e)$ заменяется на дырочную $\bar{Q}_\mu^*(z_h)$, причем $\bar{Q}_\mu = Q_{-\mu}$.

Коэффициент дипольного межзонного оптического перехода под влиянием электрического поля световой волны $s(t)$ определяется матричным элементом оператора (2)

$$s(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) P(\tau) \Psi^*(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_h, \tau) d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h d\tau, \quad (23)$$

связанным с вероятностью перехода в единицу времени W и с коэффициентом поглощения света сверхрешеткой α соотношениями

$$\alpha = \frac{n_0 \hbar \omega W}{uc\Omega}, \quad W = \sum_{e,h} |s(t)|^2 \frac{1}{t}, \quad (24)$$

в которых n_0 — показатель преломления, $u = \frac{n_0^2 F_0^2}{4\pi}$ — плотность энергии в световой волне, $\Omega = L_x L_y N a$ — объем образца, $\sum_{e,h}$ — сумма всех

возможных состояний электронной и дырочной зон.

Подставляя в (23) выражения для оператора $P(t)$ (3) и функции Ψ (22) с учетом вида (17), получим

$$s(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t P_0 \cos \omega t M(\tau) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [\mathcal{E}_g + \mathcal{E}_{\perp e} + \mathcal{E}_{\perp h} + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_h] \tau \right\} d\tau, \quad (25)$$

где

$$M(\tau) = \int \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h) \Phi_{\perp e}^*(\rho_e) \Phi_{\perp h}^*(\rho_h) f_e^*(z_e, \tau) f_h^*(z_h, \tau) d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_h, \quad (26)$$

$$M \left(\tau + \frac{2\pi}{\omega} \right) = M(\tau).$$

Используя периодичность $M(\tau)$, разложим в ряд Фурье произведе-
ние

$$\cos \omega \tau M(\tau) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-il\omega\tau} A_l(\omega), \quad (27)$$

$$A_l(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{+\pi/\omega} e^{il\omega t} \cos \omega t M(t) dt. \quad (28)$$

После подстановки разложения (27) в (25) и далее в (24) приходим
к общему виду для коэффициента поглощения α

$$\alpha = \sum_l \alpha_l, \quad \alpha_l = \frac{8\pi^2 \omega \hbar^2 |\eta \rho_{eh}|^2}{\Omega c m_0^2 \mathcal{E}_g^2 n_0} \sum_{e,h} |A_l(\omega)|^2 \times \\ \times \delta(l\hbar\omega - \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_{\perp e} - \mathcal{E}_{\perp h} - \mathcal{E}_e - \mathcal{E}_h), \quad (29)$$

в котором α_l имеет смысл коэффициента межзонного l -фотонного по-
глощения сверхрешеткой. Таким образом, задача об определении ко-
эффициента поглощения $\alpha_l(\omega)$ сводится к построению продольных ква-
зиэнергетических $\varphi(z, t)$ (17) и поперечных $\Phi_{\perp}(\rho)$ функций, нахождению
коэффициента Фурье A_l (28) и к вычислению суммы по состояниям в
окончательной формуле (29).

3. Фундаментальное межзонное многофотонное поглощение. Вычисления

Рассмотрим межзонный оптический переход в отсутствие стацио-
нарных внешних полей $\mathbf{H} = \mathbf{E} = 0$. В этом случае продольная волновая
функция имеет вид (17), (19), (20). При интегрировании в выражениях
(12), (20) учтем, что для реальных сверхрешеток и достаточно сильных
полей F_0 параметр

$$\beta = \frac{eF_0 a}{\hbar\omega} \ll 1. \quad (30)$$

Для кристалла $\mathcal{E}_g \simeq \hbar\omega \simeq 1 \text{ eV}$ со сверхрешеткой периода $a = 50 \text{ \AA}$
в поле $F_0 = 500 \text{ kV/cm}$ $\beta \simeq 0.25$. Для таких значений β формулы (12),
(19), (20) приводят соответственно к

$$f(z, t, k) = \psi[z, q(t, k)]v(k, t), \quad (31)$$

где

$$v(k, t) = \exp \left\{ -\frac{i}{2} \zeta \left[\beta(1 - \cos \omega t) \sin ka - \frac{1}{8} \beta^2 \sin 2\omega t \cos ka \right] \right\}, \quad (32)$$

$$\mathcal{E}(k) = b + \frac{1}{2} \Delta \left[1 - \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2 \right) \cos ka \right], \quad \zeta = \frac{\Delta}{\hbar\omega}. \quad (33)$$

Из выражения (33), в частности, следует что сильное переменное электрическое поле сдвигает минимум разрешенной электронной мини-зоны $\mathcal{E}(0)$ в высокочастотную область на величину $\frac{1}{8}\Delta\beta^2$, в то время как ее максимум $\mathcal{E}(\frac{\pi}{a})$ понижается на такую же величину. Таким образом, вследствие динамического Штарк-эффекта происходит сужение разрешенных мини-зон в переменном поле согласно зависимости

$$\Delta(F_0) = \Delta(0) \left(1 - \frac{1}{4}\beta^2\right). \quad (34)$$

Воспользуемся разложением (21) блоховских функций ψ в (31) и подставим затем полученные выражения в (26). Перейдем в ней к относительной координате \mathbf{r} и координате центра масс \mathbf{R}

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_h, \quad \mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{r}_e + m_h \mathbf{r}_h}{m_e + m_h}$$

и представим

$$\Phi_{\perp e}(\rho_e)\Phi_{\perp h}(\rho_h) = \frac{e^{i\mathbf{K}_{\perp}\mathbf{R}_{\perp}}}{\sqrt{L_x L_y}} \Phi_{\perp}(\rho),$$

где \mathbf{K}_{\perp} — полный поперечный импульс пары, а $\Phi_{\perp}(\rho)$ — функция ее относительного поперечного движения (для дипольного перехода $\mathbf{K}_{\perp} \simeq 0$). Тогда

$$M(\tau) = \sqrt{L_x L_y} \Phi_{\perp}(0) \frac{1}{N} \sum_{\mu, \mu'} \langle Q_{\mu}^* | \bar{Q}_{\mu'} \rangle e^{-ia(\mu k_e + \mu' k_h)} \times \\ \times e^{i(\mu' - \mu)\beta \sin \omega \tau} v_e^*(k_e, \tau) v_h^*(k_h, \tau). \quad (35)$$

Явный вид интегралов перекрытия функций Ванье электронной и дырочной мини-зон $\langle Q_{\mu}^* | \bar{Q}_{\mu'} \rangle$ приведен в [11]. Они имеют порядок $\langle Q_{\mu}^* | \bar{Q}_{\mu'} \rangle \sim \lambda^{|\mu' - \mu|}$. Это позволяет в (35) считать $\langle Q_{\mu}^* | \bar{Q}_{\mu'} \rangle \simeq \delta_{\mu\mu'}$. Учитывая возникающую в ней сумму

$$\sum_{\mu} e^{-ia(k_e + k_h)\mu} = N \delta_{k_e, -k_h}$$

и явный вид функций v (32) при $k_e = -k_h = k$, подставим формулу (35) в (28) для коэффициента $A_l(\omega)$. Перейдем затем в (28), следуя методике работы [16], к переменным $\sin \omega t = u$, $\sin \omega \tau = u'$. Получим

$$A_l(\omega, k) = \sqrt{L_x L_y} \Phi_{\perp}(0) B_l(\omega, k), \quad (36)$$

где

$$B_l(\omega, k) = \frac{1}{2\pi} \oint du \exp \left\{ ig \int_0^u \frac{du'}{\sqrt{1-u'^2}} \left(1 + \frac{2\xi}{\gamma} u' + \frac{u'^2}{\gamma^2} \right) \right\}, \quad (37)$$

$$g = l - \frac{1}{8} \zeta_{eh} \beta^2 \cos ka, \quad \zeta_{eh} = \zeta_e + \zeta_h,$$

$$2\xi(k) = \left(\frac{\zeta_{eh}}{g} \right)^{1/2} \frac{\sin ka}{(\cos ka)^{1/2}}, \quad \frac{1}{\gamma^2(k)} = \frac{\zeta_{eh}}{4g} \beta^2 \cos ka.$$

В (37) интегрирование выполняется по замкнутому контуру на плоскости комплексной переменной u , охватывающему разрез, проведенный между точками $u = \pm 1$.

Интеграл в (37) вычисляется методом перевала, в котором роль большого параметра играет число фотонов $g \simeq l$ [16]. Поскольку для рассматриваемых полупроводников с широкой запрещенной зоной \mathcal{E}_g суммарная ширина электронной и дырочной мини-зон $\Delta_e + \Delta_h$ мала по сравнению с \mathcal{E}_g , то для параметров в (37) справедливы условия $\zeta_{eh} \ll 1$, $\gamma \gg 1$. В этом случае, как показано в [16], коэффициенту $B_l(\omega, k)$ можно придать простой вид

$$B_l(\omega, k) = \frac{1}{2\sqrt{l\pi}} e^{-\frac{i\pi}{2}(l-1) + \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\gamma} \right)^{l-1} \sin \left(-2l\xi + l\frac{\pi}{2} \right). \quad (38)$$

Полученные выше результаты этого раздела носят общий характер и не связаны с конкретным поперечным состоянием. В дальнейшем в качестве функции свободного поперечного движения частицы с приведенной массой μ ($\mu^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$) с энергией \mathcal{E}_\perp выберем

$$\Phi_\perp(\rho) = \frac{1}{2\pi} e^{i\mathbf{k}_\perp \rho}, \quad \mathcal{E}_\perp = \mathcal{E}_{\perp e} + \mathcal{E}_{\perp h} = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2\mu}.$$

После подстановки значения $\Phi_\perp(0)$ и коэффициента B_l (38) в (36) и получившегося выражения для $A_l(\omega, k)$ в (29) остается выполнить суммирование по состояниям, понимая под ним

$$\sum_{e,h} \rightarrow \int dk_\perp \frac{aN}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dk.$$

Обсудим полученные результаты.

1) *Нечетно-фотонное поглощение* $l = 2p + 1$, $p = 0, 1, 2, \dots$. Для нечетных l пренебрежем зависимостью B_l (38) от ξ . Для коэффициента нечетно-фотонного поглощения получим

$$\alpha_l^{(u)}(\omega) = \alpha_0 \frac{\exp(l)}{4l\pi} \left(\frac{\zeta_{eh}\beta^2}{16l} \right)^{l-1} 2\Lambda_l^{(u)}(\omega), \quad (39)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2\omega e^2 |\eta \rho_{eh}|^2 \mu}{ac m_0^2 \mathcal{E}_g^2 n_0},$$

$$\Lambda_l^{(u)}(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_-, & (40) \\ \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \varphi_0 + \frac{1}{2^{2p-1}} \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{(2p)!}{\nu!(2p-\nu)!} \frac{\sin 2(p-\nu)\varphi_0}{2(p-\nu)}, & \omega_- \leq \omega \leq \omega_+, & (41) \\ \frac{\pi(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}, & \omega \geq \omega_+, & (42) \end{cases}$$

$$\varphi_0(\omega) = \arccos \frac{\omega_+ + \omega_- - 2\omega}{\omega_+ - \omega_-}.$$

Здесь $\omega_{-,+}$ — частоты, ограничивающие область переходов между состояниями разрешенных электронной и дырочной мини-зон. Нижний край межмини-зонного поглощения ω_- определяется низкочастотной границей приведенной электрон-дырочной мини-зоны

$$l\hbar\omega_- = \mathcal{E}_g + b_e + b_h + (\Delta_e + \Delta_h) \frac{\beta^2}{8}, \quad (43)$$

в то время как верхний край ω_+ — высокочастотной границей

$$l\hbar\omega_+ = \mathcal{E}_g + b_e + b_h + (\Delta_e + \Delta_h) \left(1 - \frac{\beta^2}{8}\right). \quad (44)$$

Из соотношений (43), (44) следует, что вследствие динамического Штарк-эффекта, вызванного сильным электрическим полем F_0 , длинноволновый край поглощения ω_- смещается в область высоких частот на величину $\frac{\Delta_e + \Delta_h}{8l\hbar} \beta^2$, а коротковолновый ω_+ — в сторону низких частот на такую же величину. Сама полоса межмини-зонного поглощения занимает интервал, определяемый шириной приведенной мини-зоны в электрическом поле

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{1}{l\hbar} (\Delta_e + \Delta_h) \left(1 - \frac{\beta^2}{4}\right).$$

Согласно (39), интенсивность l -фотонного поглощения определяется l -й степенью приведенной ширины мини-зон ($\zeta_{eh} \ll 1$) и относительной энергией носителей, приобретаемой ими в поле F_0 на периоде сверхрешетки $a(\beta \ll 1)$. Отсюда следует, что по мере роста числа поглощаемых фотонов l коэффициент поглощения быстро убывает.

Частотный спектр поглощения характеризуется функцией $\Lambda_l^{(u)}(\omega)$ (40)–(42). Ниже края при $\omega \leq \omega_-$ поглощение отсутствует (40). В области частот, связывающих состояния электронной и дырочной мини-зон $\omega_- \leq \omega \leq \omega_+$, оно возрастает согласно зависимости (41). При более высоких частотах $\omega \geq \omega_+$ возможны лишь переходы между состояниями двумерных зон кристаллической решетки. В этой области интенсивность поглощения (42) не зависит от частоты вплоть до низкочастотного края, определяемого следующей парой более высоких мини-зон. Таким образом, полный спектр нечетно-фотонного поглощения представляет собой последовательность горизонтальных ступенек, высоты которых плавно нарастает. Протяженности ступенек определяются

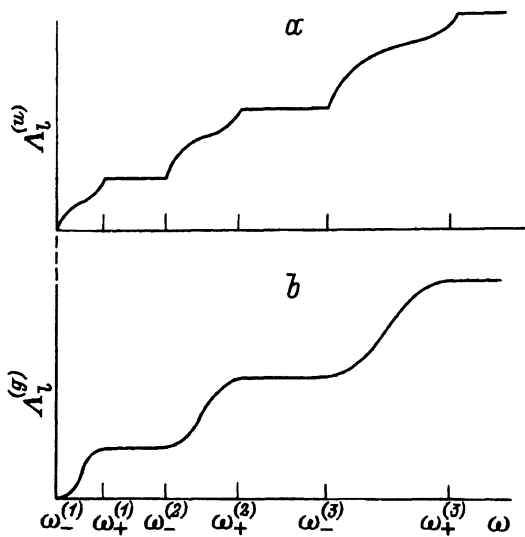


Рис. 1. Качественный вид спектра нечетно- ($\Lambda_l^{(u)}$, (40)–(42), $l = 1$) (а) и четно-фотонного ($\Lambda_l^{(g)}$, (48), $l = 2$) (б) межзонного поглощения в сверхрешетке в области первых n мини-зон с граничными частотами $\omega_{-,+}^{(n)}$.

приведенными ширинами запрещенных мини-зон, а областей нарастания — суммарными ширинами разрешенных мини-зон.

В случае однофотонного поглощения ($l = 1, p = 0$) из формулы (39) следует

$$\alpha_1(\omega) \sim \alpha_0 \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_-, \\ \varphi_0(\omega), & \omega_- \leq \omega \leq \omega_+, \\ \pi, & \omega \geq \omega_+. \end{cases} \quad (45)$$

Этот результат был приведен ранее Сурисом и Бережковским [13] при расчете однофотонного поглощения слабой волны. Здесь уместно заметить, что несмотря на то что формула (38) применима, вообще говоря, при $l \gg 1$, даже для небольших значений $l = 1, 2, 3$ отклонение коэффициента B_l (38) составляет лишь несколько процентов от результата интегрирования в (37) путем разложения экспоненты в ряд при $\gamma^{-1} \ll 1, \xi\gamma^{-1} \ll 1$.

Качественный вид спектра однофотонного поглощения (45) изображен на рис. 1, а. Спектры нечетно-фотонного поглощения с $l \neq 1$ будут иметь аналогичный характер.

Переходя в выражении (41) к предельному случаю широких мини-зон $\omega - \omega_- \ll \omega_+ - \omega_-$, получим правильную зависимость

$$\Lambda_l^{(u)}(\omega) \sim \varphi_0(\omega) \simeq \frac{2}{(\omega_+ - \omega_-)^{1/2}} (\omega - \omega_-)^{1/2}, \quad \omega \geq \omega_-,$$

установленную ранее в [13, 14] для нечетно-фотонного поглощения в обычных полупроводниках.

2) Четно-фотонное поглощение $l = 2(p + 1)$, $p = 0, 1, 2, \dots$. В случае четных l следует сохранить зависимость B_l (38) от малого параметра, ξ . Аналогичная процедура вычисления в (29) приводит к выражению

для четно-фотонного поглощения

$$\alpha_l^{(g)}(\omega) = \alpha_0 \frac{\exp(l)}{4l\pi} \left(\frac{\zeta_{eh}\beta^2}{16l\pi} \right)^{l-1} l \zeta_{eh} 2\Lambda_l^{(g)}(\omega), \quad (46)$$

$$\Lambda_l^{(g)}(\omega) = \Lambda_{l-1}^{(u)}(\omega) - \Lambda_{l+1}^{(u)}(\omega), \quad (47)$$

причем $\Lambda_l^{(u)}(\omega)$ определена формулами (40)-(42).

В частном случае $l = 2, p = 0$ имеем

$$\lambda_2(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \leq \omega_-, \\ \frac{1}{2} \left[\arccos \frac{\omega_+ + \omega_- - 2\omega}{\omega_+ - \omega_-} - \frac{2(\omega_+ + \omega_- - 2\omega)}{(\omega_+ - \omega_-)^2} \sqrt{(\omega - \omega_-)(\omega_+ - \omega)} \right], & \omega_- \leq \omega \leq \omega_+, \\ \frac{\pi}{2}, & \omega \geq \omega_+. \end{cases} \quad (48)$$

Качественный вид спектра двухфотонного поглощения (48) изображен на рис. 1, б. Спектры четно-фотонного поглощения с $l \neq 2$ будут аналогичны изображенному.

Если перейти в формулах (47), (48) к пределу широких мини-зон $\omega - \omega_- \ll \omega_+ - \omega_-$, то получим известный ранее результат [13,14], справедливый для однородных полупроводников и четных l .

$$\Lambda_l^{(g)}(\omega) \sim \varphi_0^3 \simeq \frac{2^3}{(\omega_+ - \omega_-)^{3/2}} (\omega - \omega_-)^{3/2}, \quad \omega \geq \omega_-.$$

4. Экситонное многофотонное поглощение

Экспериментальные и теоретические исследования последнего времени [5,9] показывают, что спектр оптического поглощения сверхрешеткой в значительной степени определяется экситонными эффектами. Рассматриваемый здесь экситон большого радиуса возникает в результате кулоновского взаимодействия электрона и дырки в среде с диэлектрической проницаемостью κ . В ряде случаев боровский радиус экситона r_0 может превышать период сверхрешетки a . В структуре GaAs-AlGaAs такая ситуация возникает для сверхрешеток с периодом $a < r_0 \simeq 100 \text{ \AA}$. В таких соединениях экситоны локализуются в гетероплоскостях и носят двумерный характер.

Последовательный учет экситонного взаимодействия приводит к тому, что в общем выражении для коэффициентов A_l (36) в качестве функции Φ_{\perp} следует использовать функции относительного движения экситона. Волновые функции $\Phi_{\perp}(\rho)$ двумерных экситонов для дискретного $\mathcal{E}_{\perp}(n) < 0$ и сплошного $\mathcal{E}_{\perp}(k_{\perp}) \geq 0$ спектров энергии относительного движения, а также их значения $\Phi_{\perp}(0)$ приведены в [11]

$$|\Phi_{\perp}(0)|^2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi r_0^2 (n + \frac{1}{2})^3}, & \mathcal{E}_{\perp}(n) = -\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2 (n + \frac{1}{2})^2}, \quad r_0 = \frac{\kappa \hbar^2}{\mu e^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \frac{1}{4\pi^2} \frac{e^{\pi/k_{\perp} r_0}}{\text{ch}(\pi/k_{\perp} r_0)}, & \mathcal{E}_{\perp}(k_{\perp}) = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2\mu}. \end{cases} \quad (49)$$

Экситонные функции сплошного спектра нормированы таким же образом, как и функции свободной частицы.

Повторяя изложенную выше процедуру вычисления коэффициента поглощения (29) с поперечными функциями (49), придем в зависимости от четности числа фотонов l соответственно к формулам (39) и (46) с заменой в них $\Lambda_l^{(u,g)} \rightarrow \lambda_{l,\text{ex}}^{(u,g)}$, где

$$\Lambda_{l,\text{ex}}^{(u,g)}(\omega) = 8 \sum_n \frac{|\mathcal{E}_\perp(n)|}{(n + \frac{1}{2}) l \hbar (\omega_+ - \omega_-)} \left[\frac{2(\omega_+^{\text{ex}}(n) - \omega)(\omega - \omega_-^{\text{ex}}(n))}{(\omega_+ - \omega_-)^2} \right]^{\pm 1/2} \times$$

$$\times \left(\frac{2\omega - \omega_+^{\text{ex}}(n) - \omega_-^{\text{ex}}(n)}{\omega_+ - \omega_-} \right)^{p'} + \frac{a}{2} \int_{-\pi/a}^{+\pi/a} dk \Theta(l \hbar \omega - \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_e(k) - \mathcal{E}_h(k)) \times$$

$$\times \frac{e^{\nu(k)}}{\text{ch } \nu(k)} (\cos ka)^{p'} \frac{1}{2} \left[\sin^2(ka) + \sin^2 \left(ka + l \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{2} (1 + (-1)^{l-1}) \right], \quad (50)$$

$$\omega_{+,-}^{\text{ex}}(n) = \omega_{+,-} + \frac{\mathcal{E}_\perp(n)}{l \hbar}, \quad p' = \begin{cases} l-1, & l=1, 3, 5, \dots, \\ l-2, & l=2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

$$\nu(k) = \pi \left[\frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2 (l \hbar \omega - \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_e(k) - \mathcal{E}_h(k))} \right]^{1/2},$$

причем для нечетных и четных l в формуле (50) следует взять соответственно нижний и верхний знаки.

Из (50) следует, что экситонное квантование поперечных состояний существенно изменяет спектр многофотонного поглощения. Ниже края ω_- возникает последовательность полос непрерывного поглощения, каждая из которых соответствует определенному экситонному состоянию и нумеруется индексом n . В каждой полосе поглощение отлично от нуля в области частот $\omega_-^{\text{ex}}(n) \leq \omega \leq \omega_+^{\text{ex}}(n)$. Вне полосы поглощение отсутствует. Верхняя и нижняя границы полосы смещены относительно грани фундаментального поглощения $\omega_{-,+}$ в низкочастотную часть спектра на величину энергии связи данного экситонного состояния $|\mathcal{E}_\perp(n)|$. При этом ширины всех полос одинаковы и совпадают с шириной полосы фундаментального поглощения $\omega_+ - \omega_-$. В том случае, если энергия связи основного состояния экситона $|\mathcal{E}_\perp(0)|$ превышает ширину мини-зон $l \hbar (\omega_+ - \omega_-)$, первые наиболее длинноволновые полосы поглощения оказываются разделенными интервалами, в которых поглощение отсутствует. По мере смещения в коротковолновую часть спектра эти интервалы сужаются и, начиная с полосы, для которой $\omega_+^{\text{ex}}(n_0) \simeq \omega_-^{\text{ex}}(n_0 + 1)$ полосы с более высокими $n > n_0$ будут уже перекрываться. Если же экситонная связь относительно слабая, а мини-зона широкая ($|\mathcal{E}_\perp(0)| < l \hbar (\omega_+ - \omega_-)$), то разделения экситонных полос не происходит. В пределе $n \rightarrow \infty$ экситонные полосы группируются в полосу фундаментального поглощения с границами $\omega_{+,-}$. В области $\omega > \omega_-$ экситонные эффекты продолжают сказываться в интервале частот $l \hbar \Delta \omega < |\mathcal{E}_\perp(0)|$, выше которого поглощение становится близким к фундаментальному. Для нахождения явного вида спектра в области $\omega \gtrsim \omega_-$ необходим численный расчет интеграла в формуле (50).

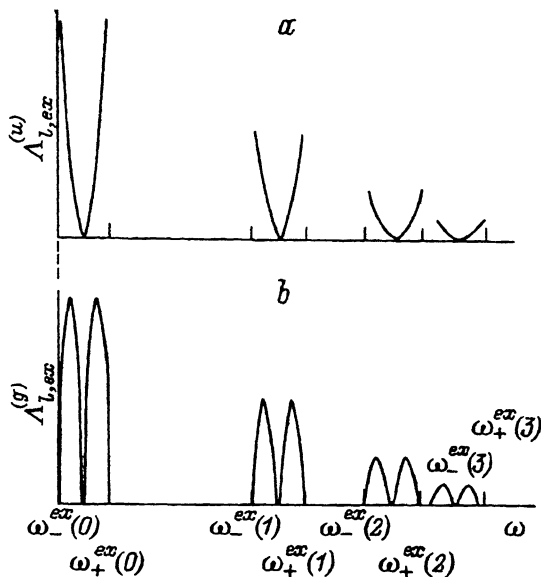


Рис. 2. Качественный вид спектра экситонного нечетно- (а) и четно-фотонного (b) поглощения $\Lambda_l^{(u,g)}$ (50) в области ниже длинноволнового края основной электрон-дырочной мини-зоны $\omega < \omega_-$.

Как видно из формулы (50), интенсивность n -й экситонной полосы определяется отношением энергии связи соответствующего состояния $|\mathcal{E}_\perp(n)|$ к ширине мини-зоны $l\hbar(\omega_+ - \omega_-) \simeq \Delta_e + \Delta_h$ и быстро убывает $\sim n^{-3}$.

Согласно (50), форма спектра внутри полосы с данным значением n зависит от четности l . При нечетных l поглощение вблизи границ полосы имеет корневые особенности равной интенсивности $\sim (\omega_+^{ex}(n) - \omega)^{-1/2} (\omega - \omega_-^{ex}(n))^{-1/2}$. В центре полосы при $\omega = \frac{1}{2} (\omega_+^{ex}(n) + \omega_-^{ex}(n))$ поглощение обращается в нуль для всех случаев, кроме однофотонного $l = 1, p' = 0$. Качественный вид спектра нечетно-фотонного поглощения двумерными экситонами в сверхрешетке приведен на рис. 2, а.

Для нечетных l поглощение на границах полос обращается в нуль согласно зависимости $(\omega_+^{ex}(n) - \omega)^{1/2} (\omega - \omega_-^{ex}(n))^{1/2}$. В центре полосы поглощение, за исключением двухфотонного $l = 2, p' = 0$, отсутствует. Качественный вид спектра четно-фотонного поглощения изображен на рис. 2, б.

Форма экспериментального спектра существенно зависит от характеристик полупроводника и сверхрешетки. Приведем некоторые оценки, используя для этого параметры GaAs ($m_e = 0.065m_0, m_{hh} = 0.55m_0, m_{lh} = 0.09m_0, l\hbar\omega \simeq \mathcal{E}_g = 1.53\text{eV}, \kappa = 13.1$) в гетероструктуре GaAs-AlGaAs с периодом сверхрешетки $a = 50\text{\AA}$ и параметром $\lambda_e = 0.05$. Заметим, что при таком выборе λ_e ширина электронной мини-зоны оказывается равной $\Delta_e = 0.0926\text{eV}$, что очень близко к значению $\Delta_e = 0.0950\text{eV}$, полученному в [10] при численном расчете структуры с прямоугольными ямами шириной 40\AA , разделенными барьерами протяженностью 15\AA . Другие параметры оказываются равными $\lambda_{hh} = 0.006, \lambda_{lh} = 0.036, \Delta_{hh} = 0.0013\text{eV}, \Delta_{lh} = 0.048\text{eV}$. Сум-

марная ширина мини-зон, совпадающая с шириной полосы поглощения $l\hbar(\omega_+ - \omega_-)$, составит $\Delta_e + \Delta_{lh} = 0.14\text{eV}$, $\Delta_e + \Delta_{hh} = 0.094\text{eV}$.

Спектр экситонного поглощения будет определяться соотношением между энергией связи экситона $\mathcal{E}_\perp(n)$ и шириной полосы поглощения. Для легких дырок $\mathcal{E}_\perp(0) \simeq 0.04\text{eV}$, а для тяжелых $\mathcal{E}_\perp(0) \simeq 0.02\text{eV}$, что в несколько раз меньше ширин соответствующих полос. Таким образом, в спектре данной гетероструктуры произойдет наложение полос и поглощение в экситонной области будет иметь довольно сложный вид. Разделение экситонных полос может быть достигнуто выбором полупроводника с сильно связанными двумерными экситонами и сверхрешеткой с достаточно большим периодом.

Отметим в заключение, что аналитическая простота и наглядность приведенных выше окончательных результатов могут оказаться удобными для интерпретации экспериментальных данных по многофотонному поглощению в слоистых полупроводниковых гетероструктурах.

Список литературы

- [1] Mendez E.E., Agullo-Roeda F., Hong J.M. Phys. Rev. Lett. **60**, 2426 (1988).
- [2] Chomette A., Lambert B., Deveaun F., Bastard G. Europhys. Lett. **4**, 461 (1987).
- [3] Dignam M.M., Sipe J.E. Phys. Rev. **B43**, 4097 (1991).
- [4] Blease J., Bastard G., Voisin P. Phys. Rev. Lett. **60**, 220 (1988).
- [5] Fox A.M., Miller D.A., Cunningham J.E., Jan W.Y., Chao C.V., Chuang S.L. Phys. Rev. **B46**, 15365 (1992).
- [6] Pacheco M., Barticevic Z., Claro F. Phys. Rev. **B46**, 15200 (1992).
- [7] Alexandrou A., Mendez E.E., Hong J.M. Phys. Rev. **B44**, 1934 (1991).
- [8] Alexandrou A., Dignam M.M., Mendez E.E., Sipe J.E., Hong J.M. Phys. Rev. **B44**, 13124 (1991).
- [9] Dignam M., Sipe J.E. Phys. Rev. **B45**, 6819 (1992).
- [10] Mendez E.E. Localization and Confinement of Electrons in Semiconductors. Springer Series in Solid State Sc. **97**, 224 (1990).
- [11] Жилич А.Г. ФТТ **34**, 11, 3501 (1992).
- [12] Жилич А.Г. ФТТ **36**, 3, 792 (1994).
- [13] Келдыш Л.В. ЖЭТФ **47**, 1945 (1964).
- [14] Бычков Ю.А., Дыхне А.М. ЖЭТФ **58**, 1734 (1970).
- [15] Бережковский А.М., Сурис Р.А. ФТП **18**, 1224 (1984).
- [16] Weiler M.H., Reine M., Lax V. Phys. Rev. **171**, 949 (1968).
- [17] Аронов А.Г. ФТТ **5**, 2, 552 (1963).
- [18] Elliott R.J. Phys. Rev. **108**, 1384 (1957).