

УДК 538.945:517.957

©1995

ДВУМЕРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ДЕФЕКТЫ В ПРОТЯЖЕННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТАХ

А.Б.Борисов, В.В.Киселев

Институт физики металлов Уральского отделения Российской академии наук,
620219, Екатеринбург, Россия
(Поступила в Редакцию 1 августа 1994 г.)

В рамках двумерной модели стационарного эффекта Джозефсона исследована структура вихрей, которые возникают в результате проникновения абрикосовских вихрей из сверхпроводящих электродов в область туннельного перехода.

Сверхпроводящие туннельные переходы представляют интерес из-за многочисленных применений в квантовых интерференционных приборах, логических элементах и ячейках памяти ЭВМ. Изменение режима работы реальных джозефсоновских контактов существенным образом определяется абрикосовскими вихрями, захваченными электродами туннельного контакта при переходе в сверхпроводящее состояние. Известно, что внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости сверхпроводник-диэлектрик-сверхпроводник, проникает в туннельный переход в виде абрикосовских вихрей [1], пронизывающих как туннельный переход, так и две сверхпроводящие пленки [2] (рис. 1). Такие «замороженные вихри» сохраняются и при полном выключении внешнего поля. Поскольку вихри в каждой пленке магнитно связаны через изолирующий слой, такая система действует как сверхпроводящий трансформатор: ток в одной пленке (первичной) индуцирует движение вихрей в обеих пленках. В пренебрежении джозефсоновским током сила магнитной связи между вихрями в первичной и вторичной пленках и ее влияние на вольт-амперную характеристику теоретически и экспериментально исследовались в ряде работ [3,4]. Существуют два механизма, определяющих свойства захваченных абрикосовских вихрей и туннельного перехода [5]: 1) «кernовый» — связанный с перестройкой гриновских функций сверхпроводящих электродов; 2) электродинамический — вызванный изменением магнитного поля вихрей и приводящий к появлению координатной зависимости разности фаз φ параметров порядка сверхпроводящих электродов. В пренебрежении джозефсоновским током по сравнению с вихревыми (размеры туннельного контакта меньше джозефсоновской глубины проникновения λ_J) эти механизмы проанализированы в работах [3-5].

Применение метода низкотемпературного электронного сканирования позволило впервые измерить пространственное распределение

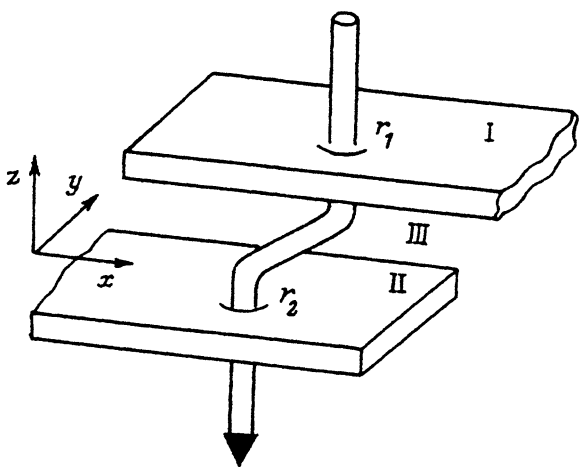


Рис. 1. Схема проникновения абрикосовского вихря в область туннельного перехода.

I, II — сверхпроводящие электроды, III — область туннельного перехода.

джозефсоновского тока в двумерных туннельных переходах и дало результаты, отличающиеся от опубликованных к тому времени теоретических вычислений [6]. Основная причина этого обстоятельства состоит в том, что, хотя фундаментальное уравнение для фазы φ в двумерных туннельных переходах (уравнение sine-Gordon) известно давно, вычисление плотности джозефсоновского тока является с математической точки зрения точным решением краевой задачи для нелинейного уравнения и нельзя применять упрощения. Сложность этой проблемы привела к развитию различных численных методов, позволяющих вычислить локальную структуру тока (см. [7] и ссылки там).

К настоящему времени метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) является единственным методом, позволяющим получить аналитические точные результаты для нелинейных уравнений. Применение МОЗР и соответствующей теории возмущений оказалось плодотворным для описания динамики поля φ в квазиодномерных туннельных переходах для нестационарного эффекта Джозефсона. Для прямоугольных джозефсоновских контактов с размерами L_1, L_2 поле φ при условии $L_1 \gg \lambda_J, L_2 \ll \lambda_J$ зависит только от одной переменной. В этом случае полное решение уравнения sine-Gordon с различными граничными условиями для токов и магнитных полей проведено Куликом, Оуэном и Скалапино [8,9]. Они нашли, что в зависимости от величины внешнего магнитного поля, приложенного в плоскости контакта, возможно или выталкивание поля из области контакта (однородное мейснеровское состояние), или проникновение внешнего магнитного поля в форме периодической одномерной решетки джозефсоновских вихрей — флюксонов (смешанное состояние).

В этой работе мы применяем МОЗР для описания стационарного эффекта Джозефсона в двумерных туннельных переходах, содержащих абрикосовские вихри. В отличие от работ [3-7] мы рассматриваем случай «больших» контактов, размеры которых велики по сравнению с λ_J , а расстояние между центрами вихрей в первичной и вторичной сверхпроводящих пленках больше λ_J (рис. 1). В этом случае распределение джозефсоновского тока зависит от двух пространственных переменных

и магнитные поля от абрикосовских вихрей в первичной и вторичной сверхпроводящих пленках не подчиняются принципу линейной суперпозиции, который использовался в предыдущих работах. Распределение токов и магнитных полей на границах бесконечно протяженных контактов (граничные условия) в данной работе отвечает одномерной решетке флюксонов Кулика, Оуэна, Скалапино. Иными словами, мы рассматриваем двумерное распределение поля φ , индуцированное наличием абрикосовских вихрей в квазиодномерной решетке джозефсоновских вихрей.

1. Основные уравнения и соотношения

Обсудим основные соотношения стационарного эффекта Джозефсона. Плотность джозефсоновского тока сверхпроводящего туннельного перехода

$$\mathbf{J} = J_1 \mathbf{n} \sin \varphi(x, y) \quad (1)$$

зависит от разности фаз $\varphi(x, y)$ макроскопических волн функций верхнего и нижнего сверхпроводящих электродов. Амплитуда J_1 пространственно однородна, если высота туннельного барьера и энергетическая щель постоянны. Фаза $\varphi(x, y)$ зависит от магнитного поля $\mathbf{H}(x, y)$, проникающего в туннельный барьер.

$$\mathbf{H} = \hbar c (2ed)^{-1} [\mathbf{n}, \nabla \varphi]. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} — вектор нормали к плоскости перехода. Эффективная длина туннельного барьера d складывается из эффективных лондоновских глубин проникновения сверхпроводников, образующих контакт, и толщины барьера. Магнитное поле H включает как поле, возникающее при протекании через контакт тока, так и приложенное внешнее магнитное поле. Подставляя соотношения (1), (2) в уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$, мы получаем хорошо известное двумерное уравнение sine-Gordon

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \varphi = \lambda_J^{-2} \sin \varphi, \quad (3)$$

которое описывает всю электродинамику джозефсоновского перехода. Джозефсоновская глубина проникновения $\lambda_J = (\hbar^2 / 8\pi ed J_1)^{1/2}$ представляет собой характерную ширину области по краям контакта, в которую проникает магнитное поле (эффект Мейсера-Оскенфельда).

Граничные условия для нелинейного уравнения определяются значениями нормальной компоненты $\nabla \varphi$ вдоль границы туннельной области и выражаются через токи J_n , текущие в электроды,

$$\nabla_n \varphi = 8ed\pi (\hbar c^2)^{-1} J_n.$$

Детальное обсуждение граничных условий для плоских протяженных контактов приведено в [10].

Для дальнейшего рассмотрения удобно перейти к безразмерным переменным $x\lambda_J^{-1} \rightarrow x$, $y\lambda_J^{-1} \rightarrow y$, тогда (3) можно записать в виде

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \varphi = \sin \varphi. \quad (4)$$

Пусть в плоскости контакта антипараллельно оси ОУ приложено внешнее магнитное поле. При определенных значениях поля мейснеровское состояние становится неустойчивым и туннельный контакт ведет себя как сверхпроводник второго рода в смешанном состоянии, в который оказывается возможным проникновение джозефсоновских вихрей. Этому случаю отвечает пространственно-периодическое одномерное решение уравнения (4)

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} \operatorname{cn}(\chi + \chi_0)[1 + \operatorname{sn}(\chi + \chi_0)]^{-1}, \quad \chi = x/k, \quad (5)$$

найденное Куликом, Оуэном, Скалапино. Модуль эллиптических функций k и параметр χ_0 определяются из граничных условий и зависят от геометрии контакта. Термодинамический анализ [9] показывает, что при значениях внешних полей H , меньших значения термодинамического нижнего критического поля $H_1 = 2\Phi_0/\pi^2 d\lambda_J$, устойчиво лишь мейснеровское состояние $\varphi = 0$. При $H > H_1$ ($H \ll H_c$, где H_c — величина критического поля разрушения сверхпроводимости) туннельный контакт переходит в устойчивое смешанное состояние. Согласно [2,5], магнитное поле $H_y = -\hbar c(edk\lambda_J)^{-1} (dn)\chi$ в области перехода образует решетку с периодом $L = 2kK\lambda_J$ ($K = K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода). Поток магнитного поля Φ_0 , приходящийся на один джозефсоновский вихрь (отвечающий изменению поля φ на 2π), равен

$$\Phi_0 = d \int_0^L H_y(x) dx = \pi \hbar c / e \quad (6)$$

и совпадает с квантом магнитного потока вихревой абрикосовской нити. Здесь мы использовали размерные переменные.

2. Абрикосовский вихрь в джозефсоновском контакте

Пусть одиночный абрикосовский вихрь проходит через поверхность контакта, как показано на рис. 1, и проникает в область перехода в верхнем сверхпроводнике в точке с координатами \mathbf{r}_1 и в нижнем сверхпроводнике в точке \mathbf{r}_2 . В общем случае из-за случайного распределения центров пиннинга и гранулированной структуры сверхпроводящих пленок вихревая линия непрямолинейна ($\mathbf{r}_1 \neq \mathbf{r}_2$). Такие «захваченные» вихри значительно меняют джозефсоновский ток [4,6,7]. При обходе вихревой линии в сверхпроводнике по замкнутому контуру фаза параметра порядка меняется на 2π . Поэтому поле φ , характеризующее локальную разность фаз параметров порядка в верхней и нижней сверхпроводящих пленках, имеет топологический заряд

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \nabla \varphi dl, \quad (7)$$

равный 1 для замкнутого контура γ в плоскости контакта, обходящего точку \mathbf{r}_2 против часовой стрелки, и -1 для контура около точки \mathbf{r}_1 .

Таким образом, захваченный абрикосовский вихрь порождает магнитный диполь в плоскости перехода. Для «малых» контактов, размеры которых меньше λ_J , уравнение (3) сводится к линейному, $\Delta\varphi = 0$. Соответствующая граничная задача о магнитном диполе с граничными условиями на инжекционные токи теоретически и экспериментально исследовалась в ряде работ (см. [6,7] и ссылки там).

Для больших контактов вычисление $\varphi(x, y)$ требует решения нелинейного уравнения (3). Хотя уравнение sine-Gordon обладает L -А-парой, процедура определения данных рассеяния по граничным условиям для ограничения областей до сих пор отсутствует.¹ В этой работе мы используем модификацию МОЗР, впервые предложенную в [12,13], для решения нелинейной краевой задачи, содержащей топологические дефекты в плоскости (x, y) .

Для описания нелинейного магнитного диполя с топологическим зарядом $Q = 1$ в точке $(0, 0)$ и -1 в точке $(0, l)$ на фоне одномерной решетки флюксонов удобно, как и в линейной теории дислокаций, задать разрез $S = \{y|x = 0, y > l, y < 0\}$, на котором поле $\varphi(x, y)$ претерпевает скачок

$$\varphi^+ - \varphi^- = -2\pi, \quad (x, y) \in S. \quad (8)$$

Здесь и далее $\varphi^+ = \lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x, y)$, $\varphi^- = \lim_{x \rightarrow -0} \varphi(x, y)$. Вне разреза поле $\varphi(x, y)$ непрерывно, а магнитное поле и, следовательно, предельные значения производных не имеют скачков на разрезе

$$(\partial_x \varphi)^+ - (\partial_x \varphi)^- = (\partial_y \varphi)^+ - (\partial_y \varphi)^- = 0, \quad (x, y) \in S. \quad (9)$$

Нелинейная задача (4), (8), (9) допускает редукцию

$$\varphi(x, y) = 2\pi - \varphi(-x, y). \quad (10)$$

Условия (8)–(10) определяют предельные значения φ^\pm , $(\partial_x \varphi)^\pm$, $(\partial_y \varphi)^\pm$ на всей оси Y , кроме точек, где расположены вихри ($y \neq 0, y \neq l$),

$$\varphi^+ = \begin{cases} 0, & y > l, y < 0, \\ \pi, & 0 < y < l, \end{cases} \quad \varphi^- = \begin{cases} 2\pi, & y > l, y < 0, \\ \pi, & 0 < y < l, \end{cases}$$

$$(\partial_x \varphi)^+ = (\partial_x \varphi)^-, \quad (\partial_y \varphi)^\pm = 0. \quad (11)$$

Граничные условия при $x > 0, x^2 + y^2 \equiv r^2 \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \operatorname{cn}(\chi + K)[1 + \operatorname{sn}(\chi + K)]^{-1}. \quad (12)$$

При $x < 0, r^2 \rightarrow \infty$ имеем

$$\varphi_0(x) = 4 \operatorname{arctg} \operatorname{cn}(\chi - K)[1 + \operatorname{sn}(\chi - K)]^{-1}. \quad (13)$$

Здесь под $\operatorname{arctg} z$ понимается полная квазипериодическая функция, а не ее главное значение, причем для определенности считаем $\operatorname{arctg} \operatorname{cn} K / (1 + \operatorname{sn} K) = 0$.

¹ Применение метода обратной задачи для описания эффекта Джозефсона впервые обсуждалось в работе [11].

Таким образом, задача о вихревом диполе естественным образом свелась к решению двух краевых задач Дирихле в полуплоскостях $x > 0$, $x < 0$ и последующей их сшивке на разрезе S . Применение МОЗР к решению таких задач возможно, если по граничным условиям для поля $\varphi(x, y)$ удастся определить данные рассеяния. В [14,15] разработан МОЗР для уравнения sine-Gordon эллиптического типа (4), который позволяет перечислить все его возможные решения с заданной асимптотикой типа кноидальной волны (5) при $|y| \rightarrow \infty$. Существенно, что в [14,15] на решения $\varphi(x, y)$ не налагались никаких ограничений при $x = 0$ и $|x| \rightarrow \infty$. Данные рассеяния в МОЗР оставались не определенными через граничные условия, поэтому формулы работ [14,15] для рассматриваемой задачи нуждаются в конкретизации.

Согласно [14,15], поле $\varphi(x, y)$ определяется выражением

$$\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{4} = \int_{-\infty}^y dy' \left[a(y, y') \cos \frac{\varphi_0}{2} + b(y, y') \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{\partial_x \varphi_0}{4} (y - y') \right], \quad \partial_x \varphi_0 < 0. \quad (14)$$

Функции $a(y, y')$ и $b(y, y')$ удовлетворяют набору уравнений обратной задачи рассеяния (типа Гельфанда-Левитана-Марченко)

$$8a(y, y'') - \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{4} \Phi_{1,1}(y + y'') + \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{4} \Phi_{0,2}(y + y'') + \\ + \int_{-\infty}^y dy' [a(y, y') \Phi_{1,1}(y' + y'') + b(y, y') \Phi_{0,2}(y' + y'')] = 0, \\ 8b(y, y'') - \sin \frac{\varphi + \varphi_0}{4} \Phi_{2,0}(y + y'') + \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{4} \Phi_{1,1}(y + y'') + \\ + \int_{-\infty}^y dy' [a(y, y') \Phi_{2,0}(y' + y'') + b(y, y') \Phi_{1,1}(y' + y'')] = 0, \quad y'' < y. \quad (15)$$

Ядра $\Phi_{mn}(y)$ выражаются в терминах данных рассеяния $\left\{ \rho(\alpha, \tau) = S_{21}(\alpha, \tau) S_{22}^{-1}(\alpha, \tau), (\alpha, \tau) \in \Gamma, (\alpha_p, \tau_p) \in D, \gamma_p = -2b_p^{-1} \times \right.$
 $\left. \times \det S(\alpha_p, \tau_p) [\alpha \tau \partial_\alpha S]^{-1} |_{(\alpha, \tau) = (\alpha_p, \tau_p)} \right\}$ как

$$\Phi_{mn}(y) = \sum_{p=1}^{4N+2M} w_1^m(\alpha_p) w_2^n(\alpha_p) \gamma_p \exp \left[-\frac{i\tau_p y}{4} \right] + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) w_1^m(\alpha) w_2^n(\alpha) \rho(\alpha, \tau, x) \exp \left[-\frac{i\tau y}{4} \right]. \quad (16)$$

Здесь $w_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1})$, $w_2 = \frac{1}{2i}(\alpha - \alpha^{-1})$, $\tau = 2[w_1^2 - k^{-2}]^{1/2}$ — функции спектрального параметра α , множество $\Gamma = \{\alpha | \text{Im } \tau = 0\}$ формирует непрерывный спектр задачи рассеяния; S_{ij} — элементы матрицы перехода ($i, j = 1, 2$); не зависящие от x нули (α_p, τ_p) коэффициента $S_{22}(\alpha, \tau)$, аналитического в области $D = \{(\alpha, \tau) | \text{Im } \tau = 0\}$, отвечают дискретному спектру; b_p — нормировочные множители для функций Иоста. Благодаря редукциям точки (α_p, τ_p) и параметры b_p распадаются на два множества, содержащих $4N$ и $2M$ элементов. Эти редукции и явная зависимость от x параметров b_p и элементов матрицы перехода приведены в [14,15].

Отметим следующее обстоятельство: в [16] детально исследованы так называемые солитонные решения уравнения sine-Gordon эллиптического типа (4) с асимптотикой типа кноидальной волны (5) при $|y| \rightarrow \infty$. Солитонные решения отвечают наличию только дискретного спектра в задаче рассеяния ($\gamma_p \neq 0$, $\rho = 0$) и находятся в явном виде из (14)–(16) в результате алгебраических вычислений. Оказалось, что они соответствуют дефектам поля $\varphi(x, y)$ с топологическим зарядом $Q = \pm 1$ и могут быть интегрированы как результат проникновения из сверхпроводника в плоскость джозефсоновского контакта вихревой абрикосовской нити с четырьмя квантами магнитного потока. Как показывают численные расчеты [17], топологическим дефектам поля $\varphi(x, y)$ с $Q = \pm 1$ в рамках модели (4) отвечает оборванный 2π -кинк. В плоскости джозефсоновского контакта такой дефект можно наглядно представить как оборванный джозефсоновский вихрь (« $\frac{1}{2}$ флюксон»). Анализ показывает [12,13], что топологические дефекты поля $\varphi(x, y)$ с $Q = \pm 1$ принадлежат непрерывному спектру задачи рассеяния ($\gamma_p = 0$, $\rho \neq 0$), содержащему сингулярности.

Согласно [14,15], явная зависимость от x коэффициента отражения $\rho(\alpha, \tau, x)$ имеет вид

$$\rho(\alpha, \tau, x) = \left[\frac{i\tau + \partial_x \varphi_0}{-i\tau + \partial_x \varphi_0} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{i w_1 w_2 \Sigma}{2} \int_0^x dx' \left[w_1^2 - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} \right]^{-1} \right\} \rho_0(\alpha, \tau). \quad (17)$$

Таким образом, задача о диполе сводится к тому, чтобы по крайевым условиям (8)–(13) определить функцию спектрального параметра $\rho_0(\alpha, \tau)$ в (17). Тогда поле $\varphi(x, y)$ будет определяться линейными интегральными уравнениями (14)–(16), в которых следует положить $\gamma_p = 0$. Эта непростая математическая процедура будет полностью рассмотрена в другой работе. Здесь мы лишь наметим основные этапы вычислений и приведем окончательный результат. Общая схема аналогична изложенной в [12,13].

1) Условие $\varphi(x, y) \rightarrow \varphi_0(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$ приводит к требованию $\rho_0(\alpha, \tau) = 0$ на тех участках контура Γ , где выражение (17) экспоненциально возрастает при $|x| \rightarrow \infty$. Эти ограничения удобно записать, используя униформизацию $\alpha = \text{sn}(\lambda, k) + i \text{cn}(\lambda, k)$. В новых переменных контур Γ задается простыми соотношениями $\lambda = u + iK'$, $\lambda = v - iK'$, где u, v — вещественные параметры, $-2K \leq u, v \leq 2K$.

Мы нашли, что $\rho_0(\alpha, \tau) \neq 0$ лишь на следующих участках Γ : для $x > 0$ $-2K \leq u, v \leq -K$, $0 \leq u, v \leq K$; для $x < 0$ $-K \leq u, v \leq 0$, $K \leq u, v \leq 2K$.

2) Для вычисления отличных от нуля коэффициентов $\rho_0(\alpha, \tau)$ удобно перейти от $\rho(\alpha, \tau, x)$ к вспомогательной функции $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{2d\alpha}{\alpha\tau} \right) \rho(\alpha, \tau, x) (i\tau - \partial_x \varphi_0) \exp \left[-\frac{i\tau y}{2} \right]. \quad (18)$$

Можно показать, что функция Φ удовлетворяет уравнению Ламе

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi = \cos \varphi_0 \Phi. \quad (19)$$

Важно, что уравнение (19) является линейным. В результате достигается переход от краевой задачи для нелинейного уравнения (4) к более простой проблеме. Функция Φ замечательна также тем, что определяет асимптотику поля диполя $\varphi(x, y)$ при $\tau \rightarrow \infty$

$$\varphi(x, y) \simeq \varphi_0(x) + \Phi(x, y). \quad (20)$$

3) Как и в [12,13], краевые условия для функции Φ находим из анализа как прямой, так и обратной задачи рассеяния. Мы нашли, что $\Phi(x, y) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

$$\Phi^{\pm}(y) = \begin{cases} 0, & y > l, y < 0, \\ \pm f, & 0 < y < l. \end{cases} \quad (21)$$

Здесь $f = \text{const}$. С помощью преобразования Фурье из (18), (21) получаем

$$[\rho_0(\alpha, \tau)]^{\pm} = \pm \frac{w_1 w_2 f}{i\tau [i\tau/2 + k'/k]} \left\{ \exp \frac{i\tau l}{2} - 1 \right\}. \quad (22)$$

4) Для определения постоянной f заметим, что вблизи особых точек $(0,0)$, $(0,l)$ в уравнении (4) более важны градиенты поля $\varphi(x, y)$, чем слагаемое $\sin \varphi$. Так что имеем $\Delta \varphi \cong 0$, и, следовательно, асимптотическое поведение поля $\varphi(x, y)$ вблизи особенностей нам известно

$$\begin{aligned} \varphi &\simeq \frac{\pi}{2} + \text{arctg} \frac{y}{x}, & (y, x) \approx (0, 0), \\ \varphi &\simeq \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{y-l}{x}, & (y, x) \approx (l, 0), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны, из уравнений прямой задачи рассеяния можно получить интегральное представление, выражающее $\rho(\alpha, \tau)$ через поле $\varphi(x, y)$ и его производные. Оказывается, что асимптотическое разложение функции $\rho(\alpha, \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ определяется поведением поля $\varphi(x, y)$ вблизи особенностей (23) и, следовательно, может быть вычислено явно. Сравнение этого разложения с найденным из (22) дает значение $f = \pi$.

Поскольку теперь данные рассеяния для магнитного диполя вычислены, определение поля $\varphi(x, y)$ сводится к решению линейных интегральных уравнений (15) с известными ядрами. Такое представление

подобно интегралу Фурье, дает полное решение краевой задачи (4), (8)–(13) и может быть исследовано асимптотическими и численными методами.

Чтобы проиллюстрировать эффективность полученных результатов, исследуем асимптотическое поведение поля $\varphi(x, y)$ диполя при $r \rightarrow \infty$. Мы показали, что в данной задаче нет резонансной области [18] и асимптотическое поведение φ определяется линейным приближением по амплитуде отклонения поля $\varphi(x, y)$ от основного состояния $\varphi_0(x)$. Согласно (17), (20), (22), имеем

$$\varphi = \varphi_0(x) + \frac{f \operatorname{sign} x}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{\tau^2 + (\partial_x \varphi_0)^2}{\tau^2 + (2k'/k)^2} \right]^{1/2} \frac{1}{\tau} \left(\exp \frac{i\tau l}{2} - 1 \right) \times$$

$$\times \exp \left\{ -|\chi| \sigma(\tau) - \frac{i\tau y}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\theta_4[(F(\beta, k) + K + |\chi|)/2K]}{\theta_4[(F(\beta, k) - K - |\chi|)/2K]} \right\},$$

$$\sigma(\tau) = \frac{k|\tau|}{2} \left[\frac{\tau^2 + (2k'/k)^2}{\tau^2 + (2/k)^2} \right]^{1/2} + Z(\beta, k). \quad (24)$$

При вычислении эллиптического интеграла третьего рода в (17), (24) мы учли редукции на контур Γ и использовали формулы, приведенные в [19]. В (24) параметр θ — функций Якоби $q = \exp\{-\pi K'/K\}$, K, K' — полные эллиптические интегралы первого рода, $F(\beta, k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, $Z(\beta, k)$ — функция Якоби [20], $\beta = \arcsin \left[1 + \left(\frac{k\tau}{2} \right)^2 \right]^{-1/2}$.

Используя для оценки интеграла в (24) метод перевала, асимптотику поля φ можно записать в виде суммы двух слагаемых

$$\varphi \approx \varphi_0(x + \alpha(x, y)) + \varphi_s(x, y), \quad r \rightarrow \infty, \quad (25)$$

$$\alpha(x, y) = \frac{k}{2k'} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{(y-l)k'K}{xE} - \operatorname{arctg} \frac{yk'K}{xE} \right\}, \quad (26)$$

$$\varphi_s(x, y) = \frac{k^2}{2} \operatorname{sign} x \operatorname{sd} \lambda_+ \operatorname{cn} \lambda_+ \exp \{ |\chi| Z(\lambda_+) + y \operatorname{dn} \lambda_+/k \} \times$$

$$\times \frac{\theta_3(0)\theta_2[(\lambda_+ - |\chi|)/2K]}{\theta_3[|\chi|/2K]\theta_2[\lambda_+/2K]} \left\{ \exp \left[-\frac{l \operatorname{dn} \lambda_+}{k} \right] - 1 \right\} \times$$

$$\times \left\{ 2\pi|x|^{-1} \operatorname{sd} \lambda_+ \operatorname{cn} \lambda_+ \left[\operatorname{cn}^2 \lambda_+ \left(1 - \frac{E}{K} \right) + \operatorname{sn}^2 \lambda_+ \left(\frac{E}{K} - (k')^2 \right) \right]^{-1} \right\}^{1/2}. \quad (27)$$

В формулах (26), (27) $E = E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, $Z(\lambda) = Z(\lambda, k)$ — функция Якоби (при вычислении интеграла (24) используется приведенная выше униформизация контура Γ), точка λ_+ является корнем уравнения

$$\frac{\operatorname{cn} \lambda_+}{\operatorname{sn} \lambda_+} = \left\{ k^2 \frac{y}{|x|} + \left[k^4 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \left(\frac{E}{K} - (k')^2 \right) \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right]^{1/2} \right\} \left[2 \left(1 - \frac{E}{K} \right) \right]^{-1}, \quad (28)$$

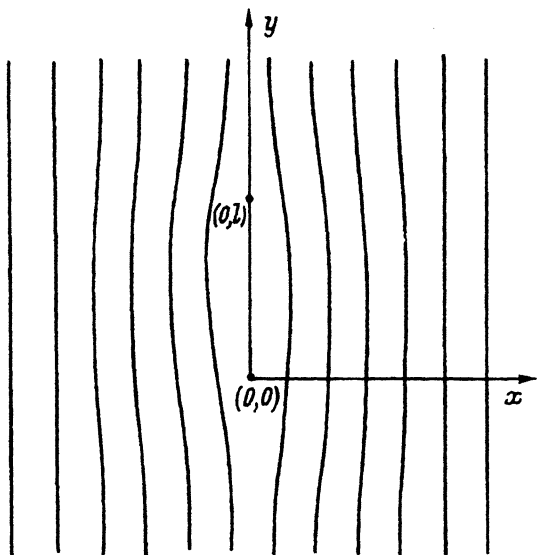


Рис. 2. Магнитный диполь в решетке флюксоновых линий.

Сплошные линии соответствуют центрам флюксонов — линиям уровня $\varphi = \pi n$, n — целое.

лежащим в прямоугольнике $-K < \text{Re } \lambda_+ < 0$; $-K' < \text{Im } \lambda_+ < K'$. В (28) выбирается ветвь квадратного корня, совпадающая с $y/|x|$ при $k \rightarrow 1$.

Первое слагаемое в правой части (25) отвечает «адиабатическому приближению» и описывает двумерную деформацию одномерной решетки флюксонов (5) из-за наличия магнитного диполя. Отметим, что в рамках модели sine-Gordon топологические дефекты на фоне периодического распределения параметра порядка (для несоизмеримых структур) впервые рассматривались в [21]. Приведенный анализ показывает, что вклад (26) можно интерпретировать как наличие дислокационного диполя в решетке флюксоновых линий, что качественно совпадает с результатами работ [21]. Картина искривления центров флюксонов (центров 2π -кинков поля φ) представлена на рис. 2. Однако вектор Бюргерса дислокаций, образующих диполь, равен $k(2k')^{-1}\lambda_j$ (в размерных переменных) и в отличие от [21] не совпадает с периодом решетки 2π -кинков поля φ . В пределе $k \rightarrow 1$, когда период L решетки флюксонов стремится к бесконечности, этот вклад исчезает. Второе слагаемое φ_s в правой части формулы (25) в указанном пределе остается и принимает простой вид

$$\varphi = 2\pi\theta(-x) + \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \frac{x}{y} e^{-r} \left[\exp \frac{ly}{r} - 1 \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right) \right). \quad (29)$$

Здесь $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Выражение (29) совпадает с приведенным в работах [12,13], где рассматривались краевые задачи для изолированных топологических дефектов. Согласно [12,13,17], поле φ_s (29) в плоскости xu описывает асимптотическое поведение при $r \rightarrow \infty$ струнной конфигурации, которая представляет собой отрезок 2π -кинка между точками $(0,0)$ и $(0,l)$. Таким образом, слагаемое φ_s в правой части формулы (25) в определенном смысле описывает собственное поле магнитного диполя в плоскости туннельного перехода.

Заметим, что пока существует решетка флюксонов, первое слагаемое в (25), убывающее как r^{-1} при $r \rightarrow \infty$, преобладает над экспоненциально малым полем φ_s . Однако здесь мы сохранили оба вклада, так как они имеют разный физический смысл и существует область значений параметров задачи, где важны оба слагаемых в (25).

Итак, мы показали, что метод обратной задачи эффективен при определении распределения джозефсоновского тока, индуцированного проникновением абрикосовского вихря в область туннельного перехода. Мы надеемся, что полученные результаты могут быть экспериментально проверены.

Авторы признательны А.Г.Шагалову за плодотворные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-02-2011).

Список литературы

- [1] Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М. (1987). 520 с.
- [2] Giaever I. Phys. Rev. Lett. **15**, 21, 177 (1965); Giaever I. Phys. Rev. Lett. **16**, 11, 460 (1966).
- [3] Sherrill M.D. Phys. Rev. **B7**, 8, 1908 (1973); Clem J.R. Phys. Rev. **B** **12**, 5, 1742 (1973).
- [4] Ekin J.W., Clem J.R. Phys. Rev. **B12**, 5, 1753 (1975); Ekin J.W., Serin B., Clem J.R. Phys. Rev. **B9**, 3, 912 (1974).
- [5] Голубов А.А., Куприянов М.Ю. ЖЭТФ **92**, 4, 1512 (1987).
- [6] Manhart J., Bosch J., Gross R., Huebener R.P. J. Low. Temp. Phys. **70**, 5/6, 459 (1988).
- [7] Manhart J., Bosch J., Gross R., Huebener R.P. Phys. Rev. **B35**, 10, 5267 (1987).
- [8] Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. Физика и применения / Пер. с англ. М. (1984). 639 с.
- [9] Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М. (1970). 272 с.
- [10] Baron A., Esposito F., Likharev K.K., Semenov V.K., Todorov B.N., Vaglio R. J. Appl. Phys. **53**, 8, 5802 (1982).
- [11] Гутшабаш Е.Ш., Липовский В.Д. Вопросы квантовой теории поля и статистической физики 9. Записки научн. семина. ЛОМИ. (1990). Т. 180. Р. 53–61.
- [12] Borisov A.B. Phys. Lett. A. **143**, 1,2, 52 (1990); Borisov A.B., Ionov S.N., Shagalov A.G. Nonlinear World. IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. World Scientific (1990). V. 1. P. 65–72.
- [13] Borisov A.B., Ionov S.N. Proc. of NEED's 92. Springer Verlag (1993).
- [14] Borisov A.B., Kiseliev V.V. Inverse Problem. **5**, 959 (1989); Borisov A.B., Kiseliev V.V. Nonlinear World: IV Int. Workshop on Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. World Scientific (1990). V. 1. P. 73–83.
- [15] Борисов А.Б., Киселев В.В. Деп. в ВИНТИ № 5330-В 88. М. (1988). 53 с.
- [16] Borisov A.B., Kiseliev V.V. Solid State Commun. **59**, 7, 445 (1986); Borisov A.B., Kiseliev V.V. Physica **D31**, 49 (1988).
- [17] Борисов А.Б., Танкеев А.П., Шагалов А.Г. ФТТ **31**, 5, 140 (1989).
- [18] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. М. (1980). 319 с.
- [19] Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists. Springer-Verlag (1971). 359 p.
- [20] Бейтмен Г., Эрдейи А. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье / Пер. с англ. М. (1967). 300 с.
- [21] Люксютов И.Ф. ЖЭТФ **82**, 4, 1267 (1982); Pokrovsky V.L., Talapov A.L. Theory of Incommensurate Crystals. Harwood Academic Publishers (1984). 163 p.