

УДК 537-611.2

©1995

## НЕЛИНЕЙНЫЕ СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ И СТАЦИОНАРНЫЕ СОЛИТОНЫ В ОДНОМЕРНОМ АНИЗОТРОПНОМ МАГНЕТИКЕ

*Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов*

Таджикский государственный университет,  
734016, Душанбе, Таджикистан  
(Поступила в Редакцию 20 октября 1993 г.  
В окончательной редакции 9 мая 1995 г.)

На основе ранее полученных авторами систем уравнений, дающих квазиклассическое описание магнетиков со слабой анизотропией типа «легкой оси» и «легкой плоскости», исследованы основные состояния и проведен анализ спектров энергии магнонов. Получены также стационарные солитоноподобные решения системы уравнений в случае обменной и одноионной анизотропий.

Как известно, нелинейные явления в магнетиках определяются нелинейным характером динамики намагниченности. Причем нелинейные эффекты могут быть связаны не только с взаимодействием собственных колебаний магнитной системы, но быть обусловленными воздействием на магнетик внешнего переменного магнитного поля. Большое внимание уделяется исследованию нового типа нелинейных коллективных возбуждений в магнитоупорядоченных средах — так называемым частицеподобным (или солитоноподобным) возбуждениям [1,2]. Исследование спектра частицеподобных решений в различных нелинейных теориях (таких как теория структурных фазовых переходов, теории сверхпроводимости и сверхтекучести, спиновых и квазиспиновых систем в магнитных и биологических моделях и т.д.), т.е. установление структурных единиц, поведение которых описывает динамику соответствующей физической системы, выявляя новые возможности квантовой теории (конденсированных сред), представляет одну из самых перспективных задач современной нелинейной математической физики [3-5].

Следует отметить, что термин «спиновая волна», применяемый при классическом описании ферромагнетика, означает малоамплитудные колебания вектора спина около основного состояния, распространяющиеся в безграничном ферромагнетике в виде плоской волны. При изучении малоамплитудных колебаний вектора спина параметры, характеризующие этот спин, разлагают вблизи основного состояния, а описывающие динамику этих параметров уравнения линеаризуют.

Рассмотрим вышеизложенное на примере одномерных одноосных анизотропных магнетиков с единичным спином

$$\hat{H} = -I \sum_j (\hat{S}_j \hat{S}_{j+1} + \delta \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+n}^z), \quad (1)$$

где  $\hat{S}_j^i$  — спиновые операторы,  $I$  — обменный интеграл,  $\delta$  — константа анизотропии,  $n = 0, 1$  соответствует одноионной и обменной анизотропии. Для перехода к полуклассическому описанию модели (1) и получения соответствующего классического аналога исходного гамильтониана будем использовать в качестве базиса пробных функций обобщенные спиновые когерентные состояния (ОСКС) группы  $SU(3)$ , которые соответствуют симметрии исходного гамильтониана. Напомним, что в [6] для изучения моделей с произвольным спином  $s$  были построены ОСКС группы  $SU(2s+1)$  в следующем виде:

$$|\Psi\rangle = e^{i \sum_{i=1}^{2s} \{\xi_i \hat{T}_i^+ + \bar{\xi}_i \hat{T}_i^-\}} |0\rangle = \left(1 + \sum_{i=1}^{2s} |\Psi_i|^2\right)^{-1/2} \left\{|0\rangle + \sum_{i=1}^{2s} \Psi_i |i\rangle\right\}, \quad (2),$$

где  $\Psi = \xi_i \operatorname{tg} |\xi|/|\xi|$ ,  $|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{2s} |\xi_i|^2$ ,  $|\xi| < \pi/2$  — параметры полуклассического описания,  $\hat{T}_i^\pm$  — генераторы фундаментального представления группы  $SU(2s+1)$ ,  $|0\rangle$  — референтное состояние, а  $|i\rangle$  — орт с единицей на  $(i+1)$ -й строке снизу. ОСКС (2) дают адекватное описание полуклассического поведения произвольной спиновой системы посредством  $4s$  параметров, учитывающих полную размерность пространства спиновых состояний. В случае  $S = 1$  необходимо использовать ОСКС группы  $SU(3)$ , которые имеют вид

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2}} \{|0\rangle + \Psi_1 |1\rangle + \Psi_2 |2\rangle\} \quad (3)$$

и являются фактически обобщением волновой функции в приближении Хартри. Для получения динамических уравнений усредняем гамильтониан (1) по ОСКС (3), в результате чего получаем его классический аналог, варьируя который, после недолгих вычислений приходили к следующим уравнениям.

В случае обменной анизотропии имеем

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \Psi_{1t} &= -\sqrt{2}(\Psi_2 - \Psi_1^2) \left(S^+ + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^+\right) - \sqrt{2} \left(S^- + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^-\right) - \\ &\quad - 2(\delta + 1)\Psi_1 \left(S^z + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^z\right), \\ \frac{i}{\omega_0} \Psi_{2t} &= \sqrt{2}\Psi_1\Psi_2 \left(S^+ + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^+\right) - \sqrt{2} \left(S^- + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^-\right) \Psi_1 - \\ &\quad - 4(\delta + 1)(S^z + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^z), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega_0 = I/(a_0 \hbar s^2)$ ,  $a_0$  — период кристаллической решетки,  $S^i \equiv \langle \hat{S}^i \rangle$  — оператор спина, усредненный по ОСКС группы  $SU(3)$ .

В случае одноионной анизотропии динамические уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \Psi_{1t} &= -\sqrt{2}(\Psi_2 - \Psi_1^2) \left( S^+ + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^+ \right) - \sqrt{2} \left( S^- + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^- \right) - \\ &\quad - 2\Psi_1 \left( S^z + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^z \right) + \delta \Psi_1, \\ \frac{i}{\omega_0} \Psi_{2t} &= \sqrt{2} \Psi_2 \Psi_1 \left( S^+ + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^+ \right) - \sqrt{2} \Psi_1 \left( S^- + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^- \right) - \\ &\quad - 4\Psi_2 \left( S^z + \frac{a_0^2}{2} S_{xx}^z \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, однако, что исследование систем (4), (5) представляет большую трудность ввиду их громоздкости, поэтому мы приходим к необходимости из разложения вблизи основного состояния и обрыва ряда [7,8]. Сначала исследуем распространение волн вблизи основного (вакуумного) состояния легкоосных ферромагнетиков с обменной анизотропией. Поскольку основное состояние есть  $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ , то, линеаризуя (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{i}{\omega_0} \Psi_{1t} &= -a_0^2 \Psi_{1xx} + 2\delta \Psi_1, \\ \frac{i}{\omega_0} \Psi_{2t} &= 4(1 + \delta) \Psi_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда дисперсии спиновых волн есть

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0(k^2 a_0^2 + 2\delta), \\ \omega_2 &= 4\omega_0(1 + \delta). \end{aligned} \quad (7)$$

Видно, что вблизи основного состояния распространяются низкочастотные волны  $\omega_1$  и независимо от них существуют стоячие высокочастотные волны  $\omega_2$ . Этим спиновым волнам можно поставить в соответствие набор квазичастиц-магнонов, энергия которых равна

$$\begin{aligned} E_1 &= \hbar\omega_0(k^2 a_0^2 + 2\delta), \\ E_2 &= 4\hbar\omega_0(1 + \delta). \end{aligned} \quad (8)$$

В данном случае, когда магноны не взаимодействуют, они ведут себя как Бозе-частицы. Поэтому слабо возбужденное состояние магнетика эквивалентно состоянию почти идеального Бозе-газа, характеризующегося набором чисел заполнения  $n_k$ .

Соотношение (8) можно переписать в более удобной форме

$$\begin{aligned} E_1 &= \hbar\tilde{\omega}_0(1 + k^2 l_0^2), \\ E_2 &= 2\hbar\tilde{\omega}_0 \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

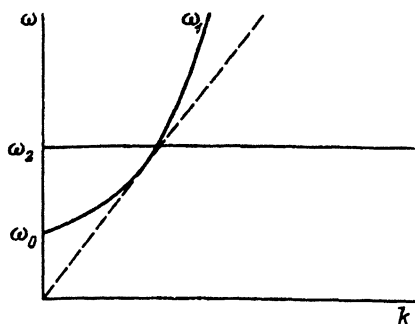


Рис. 1. Закон дисперсии спиновых волн в легкоосном ферромагнетике.

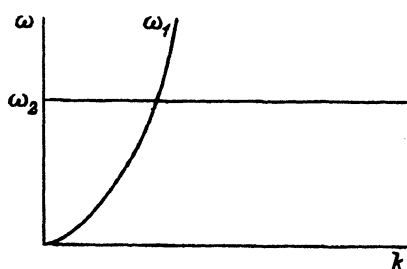


Рис. 2. Дисперсия спиновых волн в легкоплоскостном ферромагнетике.

где  $\tilde{\omega}_0 = 2\delta\omega_0$  — частота однородного ферромагнитного резонанса,  $l_0 = a_0/\sqrt{2\delta}$  — магнитная длина. Как видно из (9), спектр  $E_1$  энергии магновов имеет щель  $\hbar\tilde{\omega}_0$ . Графически (рис. 1) ее можно представить в виде сплошной линии, характеризующей дисперсию, и штриховой линии, определяющей минимальную фазовую скорость магновов  $E_1$

$$v_f = 2\omega_0 l_0; \quad (10)$$

минимальная групповая скорость есть

$$v_g = \omega_0 \frac{a_0^2}{\delta} k. \quad (11)$$

Законы дисперсии теперь можно выразить через фазовую и групповую скорости

$$E_1 = \hbar\tilde{\omega}_0 \left( 1 + \left( \frac{v_g}{v_f} \right)^2 \right),$$

$$E_2 = 2\hbar\tilde{\omega}_0 \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right). \quad (12)$$

Теперь рассмотрим распространение спиновых волн вблизи легкоплоскостного вакуума. Представим  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  вблизи вакуума в виде

$$\Psi_1 = \sqrt{2} + \xi_1, \quad \Psi_2 = 1 + \xi_2.$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (4) и линеаризуя по  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , имеем

$$\frac{i}{\omega_0} \xi_{1t} = 8\xi_1 - \sqrt{2}\delta\bar{\xi}_2 - (4 + \delta)\xi_2 - a_0^2 \xi_{2xx},$$

$$\frac{i}{\omega_0} \xi_{2t} = -\delta(\xi_2 + \bar{\xi}_2) - a_0^2 \xi_{2xx}. \quad (13)$$

Представляя  $\xi_1$  и  $\xi_2$  в виде плоских волн, приходим к однородной системе уравнений, детерминант которой, будучи приравнен к нулю, приводит к дисперсионному соотношению

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left( 64 + k^2 a_0^2 (k^2 a_0^2 + 2\delta) \right) + 64k^2 a_0^2 (k^2 a_0^2 - 2\delta) = 0. \quad (14)$$

Решая биквадратное уравнение (14), получим

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2 k^2 a_0^2 (k^2 a_0^2 + 2|\delta|),$$

$$\omega_2^2 = 32\omega_0^2. \quad (15)$$

Как и следовало ожидать, в случае легкоплоскостной модели (аналогично легкоосной) появилась также высокочастотная ветвь  $\omega_2$  наряду с низкочастотной  $\omega_1$ , соответствующей в феноменологии боголюбовской дисперсии.

Спектр энергии магнонов имеет соответственно вид

$$E_1 = \hbar\tilde{\omega}_0 k a_0 \sqrt{k^2 a_0^2 + 2|\delta|},$$

$$E_2 = 8\hbar\tilde{\omega}_0, \quad (16)$$

где  $\tilde{\omega}_0 = \omega/\sqrt{2}$ . Как видно, в случае легкой плоскости спектр магнонов не имеет щели (рис. 2).

Аналогичную процедуру можно провести в случае исследования спиновых волн легкоосного магнетика с одноионной анизотропией.

Учтем теперь слабое взаимодействие между магнонами в легкоосном ферромагнетике как с обменной, так и с одноионной анизотропией. В таком случае вблизи основного состояния  $\Psi_2 \sim \Psi_1^2$  в системах уравнений (4), (5) учтем члены не выше третьего порядка малости по  $\Psi_1$ . В случае обменной анизотропии система уравнений, описывающая спиновую динамику, выглядит следующим образом [3]:

$$\frac{i}{\omega_0}\Psi_{1t} + a_0^2\Psi_{1xx} - 2\delta\Psi_1 + 4\bar{\Psi}_1\Psi_2 - 2(1-\delta)|\Psi_1|^2\Psi_1 = 0,$$

$$\frac{i}{\omega_0}\Psi_{2t} - 4(1+\delta)\Psi_2 + 2\Psi_1^2 = 0. \quad (17)$$

Аналогично укороченная система уравнений для магнетиков с одноионной анизотропией примет вид

$$\frac{i}{\omega_0}\Psi_{1t} + a_0^2\Psi_{1xx} - \bar{\delta}\Psi_1 + 4\bar{\Psi}_1\Psi_2 - 2|\Psi_1|^2\Psi_1 = 0,$$

$$\frac{i}{\omega_0}\Psi_{2t} - 4\Psi_2 + 2\Psi_1^2 = 0. \quad (18)$$

Решая систему (17), получим

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{(2\delta + k^2 a_0^2 - \omega/\omega_0)(2(1+\delta) - \omega/\omega_0)}{4\delta + (1-\delta)\omega/\omega_0}} e^{i(kx-\omega t)},$$

$$\Psi_2 = \frac{2\delta + k^2 a_0^2 - \omega/\omega_0}{4\delta + (1-\delta)\omega/\omega_0} e^{2i(kx-\omega t)}, \quad (19)$$

если выполняется условие  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,  $k_2 = 2k_1$ . Связь между частотами и волновым числом и амплитудой второй волны можно представить в виде

$$\omega = \omega_0 \frac{k^2 a_0^2 - 2\delta - 4\delta^2 \varphi_2}{1 + 2(1 - \delta)\varphi_2}, \quad (20)$$

где амплитуды первой и второй волны связаны соотношением

$$\varphi_1^2 = \frac{k^2 a_0^2 - 2 - 4\varphi_2}{1 + 2(1 - \delta)\varphi_2} \varphi_2.$$

Как видно из этих соотношений, учет слабой нелинейности при рассмотрении спиновых волн вблизи основного состояния легкоосновного ферромагнетика с обменной анизотропией привел к исчезновению волны в спектре энергии магновов. Это, вероятно, означает, что при взаимодействии магновов происходит перераспределение энергии между магнонами, и, таким образом, высокочастотные спектры подстраиваются под низкочастотные.

Такие же результаты дает рассмотрение нелинейных спиновых волн легкоосного магнетика с одноионной анизотропией, т.е.

$$\Psi_1 = \sqrt{\frac{\omega - 2\omega_0}{\omega} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - k^2 a_0^2 - \bar{\delta} \right)} e^{i(kx - \omega t)}, \quad (22)$$

$$\Psi_2 = \frac{\omega_0}{2\omega} \left( k^2 a_0^2 + \bar{\delta} - \frac{\omega}{\omega_0} \right) e^{2i(kx - \omega t)},$$

откуда следует, что

$$\omega = \omega_0 \frac{k^2 a_0^2 + \bar{\delta}}{1 + 2\varphi_2}, \quad \varphi_1^2 = \frac{2 + 4\varphi_2 - k^2 a_0^2 - \bar{\delta}}{2\varphi_2 + 1} \varphi_2.$$

Вернемся к системе (17). Из второго уравнения этой системы получим

$$\varphi_2 = \frac{\omega_0}{2\omega_0(1 - \delta) + \omega} \varphi_1^2, \quad (23)$$

т.е. связь между амплитудами обеих компонент. Теперь, учитывая связь (23) в первом уравнении (17), приходим к нелинейному уравнению Шредингера

$$a_0^2 \varphi_{1xx} - 2\delta \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \varphi_1 + 2\delta \varphi_1^3 = 0. \quad (24)$$

Это уравнение имеет односолитонное решение

$$\varphi_1 = \frac{b}{\operatorname{ch} \sqrt{2\delta - \frac{\omega}{\omega_0}} a_0 x}, \quad (25)$$

где  $b$  — свободный параметр, а

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} \left[ (1 - \delta)b^2 + 2 + 4\delta \pm \sqrt{\delta^2 b^2 + 4b^2(1 + \delta) + 4 - 8\delta(1 + \delta)} \right].$$

Учитывая (25) и (23), можем записать общее решение системы (17) в виде

$$\Psi_1 = \frac{b}{\operatorname{ch} \sqrt{2\delta - \frac{\omega}{\omega_0}} a_0 x} e^{-i\omega t}, \quad (26)$$

$$\Psi_2 = \frac{b^2}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{2\delta - \frac{\omega}{\omega_0}} a_0 x} \frac{e^{-2i\omega t}}{2(1 - \delta) + \frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (27)$$

Для системы уравнений (18) стационарные солитоноподобные решения таковы:

$$\Psi_1 = \frac{b}{\operatorname{ch} \sqrt{\delta - \frac{\omega}{\omega_0}} a_0 x} e^{-i\omega t}, \quad (28)$$

$$\Psi_2 = \frac{b}{2 - \frac{\omega}{\omega_0}} - \frac{e^{-2i\omega t}}{\operatorname{ch}^2 \sqrt{\delta - \frac{\omega}{\omega_0}} a_0 x}, \quad (29)$$

где

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} (3 + \bar{\delta} \pm \sqrt{9 - \bar{\delta} + \bar{\delta}^2}).$$

Численные эксперименты показали, что линейные волны, описывающие динамику магновов, заполняют все четырехмерное спиновое фазовое пространство. Малоамплитудные спиновые волны вида (26) также устойчивы и лежат в некотором двумерном сечении этого фазового пространства. Это сечение в спиновом фазовом пространстве легкоосной модели изучаемого магнетика с обменной анизотропией является так называемым двумерным классическим аттрактором для исследованных типов нелинейных волн.

#### Список литературы

- [1] Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев (1983). 192 с.
- [2] Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х. ФТТ **36**, 1, 170 (1994).
- [3] Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Максудов А.Т. ФТТ **34**, 2, 544 (1992).
- [4] Федянин В.К., Якушевич Л.В. Препринт ОИЯИ. Р17-84-359. Дубна (1984).
- [5] Якушевич Л.В. Методы теоретической физики в исследовании свойств биополимеров. Пущино (1990). 122 с.
- [6] Abdulloev Kh.O. In: Proc. of the IV Intern. Workshop «Solitons and Applications». W. S. Singapore (1990). P. 244-265.
- [7] Абдуллоев Х.О., Максудов А.Т., Муминов Х.Х. ДАН Таджикистана **34**, 3, 327 (1991).
- [8] Makhankov A.V., Makhankov V.G. Phys. Stat. Sol. (b) **145**, 669 (1988).