

ТРАНСПОРТ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФОНОНОВ В НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ (Обзор)

© В.И.Козуб, А.М.Рудин¹

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия

¹Present address: Theoretical Physics Institute, University of Minnesota,
Minneapolis, USA.

(Поступила в Редакцию 16 июня 1995 г.)

Выполнен обзор существующих теоретических представлений о кинетике неравновесных фононов в двух классах неупорядоченных систем: диэлектрических стеклах и легированных компенсированных полупроводниках (ЛКП). Описание низкоэнергетических колебательных возбуждений в стеклах производится на базе двух моделей: модели двухуровневых систем и модели мягких атомных потенциалов. ЛКП исследуются в режиме, когда транспорт неравновесных фононов в них определяется в основном рассеянием на электронных двухуровневых системах.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

1. Локализованные колебательные состояния в неупорядоченных системах
 - 1.1. Введение. Универсальные аномальные свойства стекол
 - 1.2. Модель двухуровневых систем для стекол
 - 1.3. Модель мягких атомных потенциалов
 - 1.4. Электронные двухуровневые системы в полупроводниках
2. Фононная кинетика в аморфных слоях
 - 2.1. Обзор экспериментальных данных
 - 2.2. Кинетика неравновесных фононов, инжектированных из «холодного» кристалла
 - 2.3. Распространение слабонеравновесных тепловых импульсов в объемном стекле
 - 2.4. Стационарный фононный транспорт в системе с тепловым генератором
 - 2.5. Нестационарный случай: фононное горячее пятно
 - 2.6. Замечания относительно возможной роли поверхности
 - 2.7. Замечания относительно возможной роли конверсии мод
 - 2.8. Сравнение с экспериментом

3. Кинетика неравновесных фононов в легированных компенсированных полупроводниках (ЛКП)

- 3.1. Магнетотеплопроводность и возможности фононной спектроскопии в ЛКП
- 3.2. Взаимодействие акустических фононов произвольной частоты с электронными двухуровневыми системами
- 3.3. Поглощение фононов двухуровневыми системами при наличии магнитного поля
- 3.4. Взаимное влияние неравновесности чисел заполнения фононов и электронных двухуровневых систем
- 3.5. Возможные экспериментальные следствия

1. Локализованные колебательные состояния в неупорядоченных системах

1.1. Введение. Универсальные аномальные свойства стекол

Акустические и диэлектрические свойства стекол при низких температурах интенсивно изучаются уже в течение ряда лет. Наиболее выдающимся экспериментальным результатом этих исследований [1] явилось открытие набора так называемых «универсальных аномальных свойств стекол», отличающих стекла от кристаллических веществ и слабо зависящих от конкретного химического состава стекла. Этот набор включает в себя аномалии низкотемпературной теплоемкости, теплопроводности, скорости и поглощения ультразвука, диэлектрических потерь, электрического и акустического эха и др. К настоящему времени имеется большое количество обзоров экспериментальных работ, содержащих подробное описание этих свойств (см., например, обзоры [2-4]). Мы приведем лишь некоторые фундаментальные экспериментальные факты, свидетельствующие о разительном отличии термодинамики и фононной кинетики стекол от аналогичных характеристик в кристаллах.

Как впервые было показано Зеллером и Полом [1], тепловые свойства стекол при низких температурах ($T < 10\text{ K}$) сильно отличаются от соответствующих свойств кристаллов. Так, низкотемпературная теплоемкость C стекол оказывается гораздо больше, чем соответствующая величина в кристаллических диэлектриках. В то же время теплопроводность κ стекол оказывается гораздо меньше кристаллической. В кристаллах, как это хорошо известно, при низких температурах $C \propto T^3$, тогда как в стеклах C растет практически линейно с температурой $C \propto T$. При низких температурах теплопроводность стекла $\kappa \propto T^2$. При более высоких температурах $T > 10\text{ K}$ тепловые свойства меняются. Так, в температурной зависимости отношения C/T^3 имеется пик, который указывает на наличие избыточной (по сравнению с дебаевской) теплоемкости. Положение и относительная величина этого пика изменяются от стекла к стеклу довольно слабо. В теплопроводности стекла наблюдается плато при $T \approx 3-10\text{ K}$, а затем медленный, более слабый, чем квадратичный, рост с температурой.

Между положением пика в C/T^3 и плато в $\kappa(T)$ имеется явно выраженная корреляция.

Важным доказательством специфики атомной динамики в стеклах является поведение некоторых кинетических величин, в частности коэффициента поглощения звука и соответственно длины свободного пробега акустических фононов.

При очень низких температурах ($T < 1$ К) линейный по интенсивности коэффициент поглощения звука в стекле описывается эмпирической формулой

$$\Gamma_0 \propto \omega \operatorname{th}(\hbar\omega/2T).$$

Соответственно также ($\propto \omega \operatorname{th}(\hbar\omega/2T)$) ведет себя и обратная длина свободного пробега низкочастотных акустических фононов. При увеличении частоты фононов уменьшение длины пробега фононов с ростом частоты становится более резким. Впервые количественные данные об упругом рассеянии фононов в области плато в теплопроводности были получены Дитче и Киндером [5], которые получили зависимость $l^{-1} \propto \omega^4$.

Приведенные выше экспериментальные результаты показывают, что в стеклах присутствуют некие дополнительные по сравнению с кристаллическими системами низкоэнергетические возбуждения. Эти возбуждения ответственны за низкотемпературную термодинамику и фононную кинетику стекол. Универсальность аномальных свойств стекол приводит к выводу о том, что эти возбуждения также универсальны и внутренне присущи любой аморфной системе самой по себе (подробнее об этом см. [6]).

Как показывают эксперименты (см. ранее), важным свойством указанных возбуждений является их существенный агармонизм. Он обуславливает сильное неупругое рассеяние фононов в стекле в дополнение к резонансному упругому. Подробнее экспериментальные данные о неупругом рассеянии фононов в стеклах будут обсуждаться в начале раздела 2. Здесь же мы лишь отметим, что данный канал рассеяния фононов оказывается чрезвычайно эффективным и при некоторых условиях может сравниться с упругим. Соответственно он сильно влияет на кинетику неравновесных фононов в стекле и заслуживает детального изучения.

Беспорядок приводит к появлению новых типов возбуждений не только в диэлектрических аморфных системах, но и в легированных полупроводниках. В них образуются так называемые электронные двухуровневые системы [7], образованные близкорасположенными свободным и занятым примесными центрами. Взаимодействие неравновесных фононов с такими объектами также весьма интересно и будет обсуждено в настоящем обзоре.

Целью настоящей работы является последовательный обзор существующих на сегодняшний день теоретических представлений о транспорте неравновесных фононов в неупорядоченных системах. В частности, мы подробно обсудим кинетику неравновесных фононов в аморфных материалах и полупроводниках, находящихся в режиме прыжковой проводимости. С самого начала необходимо отметить, что, когда дело будет касаться чисто аморфных систем (стекол), речь в основном пойдет об области частот, типичной для экспериментов с неравновесными фононами, $T < 10$ К (см. далее). В области больших частот все

сложнее, так как в ней становится существенным взаимодействие между локализованными возбуждениями. К счастью, при таких температурах за редким исключением [8] реализуется равновесная или квазиравновесная ситуация (теплопроводность), что радикальным образом упрощает анализ.

1.2. Модель двухуровневых систем для стекол

Важным шагом к пониманию аномальных свойств стекол явилась так называемая модель туннельных состояний (или, иначе, модель двухуровневых систем (ДУС)), предложенная в 1972 г. Андерсоном, Халпериным, Вармой [9] и независимо Филлипсом [10]. Не вдаваясь в детали, рассмотрим основные положения данной модели и некоторые ее следствия (хороший обзор модели ДУС, равно как и ее приложений к теории стекол, дан Филлипсом [4]).

Представим себе агрегат атомов, который может существовать в двух квазистационарных состояниях. В качестве простой модели этого объекта можно взять частицу атомной массы, двужущуюся в эффективном двухъямном потенциале (рис. 1). Состояние частицы в этом потенциале описывается двумя параметрами: асимметрией Δ , которая примерно равна разности между положениями минимумов потенциала, и константой туннелирования λ , определяющей прозрачность барьера Δ_0

$$\Delta_0 = \hbar\omega_0 \exp(-\lambda). \quad (1)$$

Здесь ω_0 — характерная частота внутриямных колебаний. Легко показать, что если асимметрия Δ не слишком велика, то расстояние E между основным и первым возбужденным состояниями частицы в нашем потенциале (эти уровни, собственно, и образуют ДУС) есть

$$E = \sqrt{\Delta^2 + \Delta_0^2}. \quad (2)$$

В рассматриваемой модели предполагается, что в стекле имеется набор таких ДУС, а величины Δ и λ распределены равномерно в неких широких интервалах

$$P(\Delta, \lambda)d\Delta d\lambda = \bar{P}d\Delta d\lambda, \quad |\Delta| \leq \Delta_{\max}, \quad \lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}, \quad (3)$$

что, как можно легко показать, с логарифмической точностью соответствует постоянной плотности состояний ДУС по энергии

$$n_{\text{TLS}}(E) = \bar{P} \ln \left(\frac{2E}{\Delta_{0\min}} \right), \quad \Delta_{0\min} = \hbar\omega_0 \exp(-\lambda_{\max}). \quad (4)$$

Обсудим некоторые следствия модели ДУС. Для оценки теплоемкости отметим, что при температуре T возбуждены будут только ДУС с энергиями $E < T$. Их число оказывается порядка $\bar{P}T$, полная заключенная в них энергия — $\bar{P}T^2$, тогда как теплоемкость получается дифференцированием энергии по температуре и, очевидно, пропорциональна T .

Чтобы получить выражения для теплопроводности и коэффициента поглощения звука, оценим длину свободного пробега фонона частоты ω — $l(\omega)$ — относительно рассеяния на ДУС. В случае резонансного рассеяния имеем

$$l^{-1} = l_{\text{res}}^{-1} \approx \lambda_{\text{ph}}^2 n \Gamma \text{th} \left(\frac{\hbar \omega}{2T} \right), \quad (5)$$

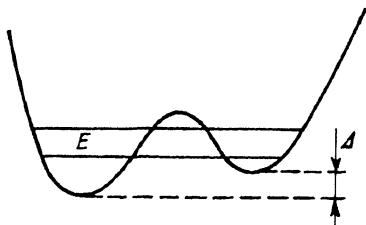


Рис. 1. Двухуровневая система.

где $\lambda_{\text{ph}} = s/\omega$ обозначает длину волны фонона (s — скорость звука), произведение $n\Gamma$ представляет собой плотность ДУС, находящихся в резонансе с фононом, т.е. обладающих энергией $E \approx \hbar\omega \pm \Gamma$, где $\Gamma \approx |Z|^2 g(E)$ — параметр энергетического уширения, $g(E) = E^2 / (\hbar\omega_D)^3$ — дебаевская плотность фононных состояний, Z — матричный элемент взаимодействия фононов с ДУС. Фактор $\text{th}(\hbar/2T)$ описывает разность заселенностей уровней резонансных ДУС. Принимая во внимание, что, как можно показать,

$$Z \approx \frac{\Delta_0}{E} \Lambda u_{ii}^{\text{ph}} \approx \frac{\Delta_0}{E} \Lambda \left(\frac{E}{m_a s^2} \right)^{1/2},$$

где Λ — деформационный потенциал взаимодействия, m_a — атомная масса, легко получаем

$$\Gamma \approx \frac{\Lambda^2}{m_a s^2} \left(\frac{E}{\hbar\omega_D} \right)^3, \quad (6)$$

$$l_{\text{res}}^{-1}(\omega) \approx \frac{\Lambda^2 n \omega}{m_a \omega_D^3} \text{th} \left(\frac{\hbar \omega}{2T} \right). \quad (7)$$

Найдем, наконец, зависимость фононной теплопроводности $\kappa \approx C_{\text{ph}} l_{\text{res}} s$ от температуры. Для этого учтем, что фононная теплоемкость $C_{\text{ph}} \propto T^3$ и $\hbar\omega \approx T$. В результате имеем $\kappa \propto T^2$.

Полученные предсказания модели туннельных состояний находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными, по крайней мере для температур ниже 1–3 К [2–4].

Как уже отмечалось, при температурах выше 1–3 К свойства стекол начинают весьма заметно отличаться от предсказанных моделью ДУС. Например, зависимость теплопроводности от температуры выходит на плато [11,12], которое не может быть объяснено в терминах постоянной плотности туннельных состояний; теплоемкость начинает быстрее расти с температурой, что также указывает на наличие неких дополнительных по отношению к ДУС низкоэнергетических возбуждений.

К настоящему времени имеется довольно много различных объяснений универсальных аномалий поведения стекол при температурах от 1 до 30 К. Одна из возможностей — объяснить плато в теплопроводности рассеянием фононов на объектах, обусловленных статическим

беспорядком [13-15] и связать наличие дополнительных по отношению к ДУС возбуждений в стекле с фоновой локализацией. У указанного подхода имеются две существенные слабости: во-первых, трудно понять, почему фононы с длинами волн, на масштабах которых стекло практически однородно, рассеиваются столь сильно, и, во-вторых, отсутствует сколько-нибудь естественное объяснение наличия туннельных состояний.

Другая возможность — попытаться расширить область применимости модели ДУС в область больших температур и энергий. Такая попытка была сделана в работе Карпова, Клигера и Игнатъева [16] и ряде последующих работ [6,17-20]. Рост теплоемкости здесь связывается с появлением дополнительных локализованных низкоэнергетических возбуждений, тогда как плато в теплопроводности объясняется резонансным рассеянием фононов на этих возбуждениях. Данный подход — так называемая модель мягких атомных потенциалов (МАП) — позволяет воспроизвести при низких температурах результаты модели туннельных состояний, а при более высоких температурах самосогласованно описать экспериментальные данные по акустическим и диэлектрическим свойствам стекол, теплоемкости и теплопроводности.

1.3. Модель мягких атомных потенциалов

Рассмотрим основные положения модели МАП [6,16,19,20]. Она предполагает наличие в стекле набора мягких локализованных колебательных состояний, каждое из которых может быть описано неким эффективным ангармоническим потенциалом вида

$$V(x) = \mathcal{E} \left[\eta \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \xi \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \left(\frac{x}{a} \right)^4 \right], \quad (8)$$

где \mathcal{E} — энергия порядка атомной, a — межатомное расстояние. Параметры η и ξ распределены случайно. Типичный вид их распределения будет обсуждаться далее.

Определим характерный масштаб энергии, соответствующий уравнению (8). Рассмотрим уравнение Шредингера для частицы массы M , находящейся в потенциале $V(x, \eta = 0, \eta = 0)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n + \mathcal{E} (x/a)^4 \psi_n = E_n \psi_n.$$

Расстояние между основным ($n = 0$) и первым возбужденным ($n = 1$) уровнями в данном потенциале есть

$$W = \mathcal{E} \eta_L^2, \quad \eta_L = (\hbar^2 / 2M a^2 \mathcal{E})^{1/3}. \quad (9)$$

Если мы возьмем массу M порядка атомной, то энергия W окажется порядка 3–10 К, и мы получаем некий новый характерный масштаб энергий в аморфной системе по сравнению с кристаллом. Как было показано в [6,17], кинетика фононов в стекле сильно зависит от соотношения между энергией фонона $\hbar\omega$ и W .

Как уже указывалось, распределение параметров η и ξ в стекле предполагается случайным, и, вообще говоря, функция распределения $P(\eta, \xi)$ должна удовлетворять лишь симметричным соотношениям $P(\eta, \xi) = P(\eta, -\xi)$. Как было показано в [18], для малых значений η и ξ это распределение можно записать в виде

$$P(\eta, \xi) = P_0|\eta|, \quad (10)$$

где P_0 — медленно меняющаяся функция η и ξ , которая в дальнейшем будет считаться константой.

Взаимодействие мягких мод с фононами в модели МАП в первом приближении описывается выражением [19]

$$\delta\hat{V}(x, \epsilon_{ph}) = \Lambda \hat{\epsilon}_{ph} \frac{x}{a}, \quad (11)$$

где $\hat{\epsilon}_{ph}$ — оператор, описывающий фононную деформацию, Λ — константа билинейного деформационного взаимодействия. В дальнейшем мы почти везде будем пренебрегать зависимостью параметров взаимодействия от фононной поляризации.

В модели МАП можно выделить четыре характерных типа возбуждений, соответствующих различным областям энергий.

1) Область туннельных состояний. Энергетический интервал между уровнями частицы в потенциале (8) есть величина порядка W и больше. Единственным исключением является случай двухъямного потенциала, $\eta < 0$. Для таких потенциалов модель МАП воспроизводит результаты модели туннельных состояний с точностью до логарифмических поправок. Параметры Δ и λ модели ДУС выражаются через η , ξ как

$$\Delta = \frac{W|\xi|}{\sqrt{2}\eta_L^{1/2}} \frac{|\eta|^{3/2}}{\eta_L^{3/2}}, \quad (12)$$

$$\lambda \equiv \ln \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0} = \ln \frac{\hbar\omega_D}{W} + \frac{\sqrt{2}}{3} \left| \frac{\eta}{\eta_L} \right|^{3/2}, \quad (13)$$

а плотность состояний ДУС есть

$$P(\Delta, \lambda) = \frac{4P_0\eta_L^{7/2}}{W|\eta|}. \quad (14)$$

В данном приближении плотность состояний ДУС не является постоянной, как в оригинальной модели туннельных состояний, а зависит от $|\eta|$ (т.е. P обратно пропорциональна корню из высоты барьера ДУС $V_B = \mathcal{E}|\eta|^2/4$), что приводит к логарифмическому расхождению результатов моделей ДУС и МАП в соответствующем диапазоне температур ($< 3\text{K}$).

Рассмотрим взаимодействие фононов с ДУС в рамках модели МАП и найдем эффективности их упругого и неупругого рассеяния (см. [6,19,20]).

По крайней мере при низких температурах низкоэнергетические фононы $\hbar\omega \ll W$ рассеиваются в основном на ДУС, и эффективность этих процессов резонансного рассеяния дается выражением

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\right)_{\text{TLS}} = \pi\omega C \operatorname{th} \left[\frac{\hbar\omega}{2T} \right], \quad (15)$$

где

$$C = \frac{2P_0\eta_L^{7/2}}{W} \frac{\Lambda^2}{\rho s^2}. \quad (16)$$

Что касается процессов неупругого рассеяния фононов с энергиями $\hbar\omega \ll W$, то для случая $T = 0$ можно получить с логарифмической точностью следующее выражение для эффективности рассеяния (ср. с [21]):

$$\left(\frac{1}{\tau_{\text{in}}}\right)_{\text{TLS}} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2/3} \frac{\pi^2}{288} C \sqrt{\eta_L} \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 \omega \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right)^2. \quad (17)$$

При температурах $T > W$, как будет показано далее, для эффективности рассеяния можно использовать уравнения (32), (33).

2) **Область двухуровневых флуктуаторов.** В рамках модели МАП можно представить себе двухъямные объекты с настолько большим барьером, что в каждой яме будет присутствовать несколько уровней. Рассеяние фононов на таких объектах может быть существенным и его необходимо учитывать. Кроме того, как было показано [6,22], они могут играть важную роль в различных процессах медленной релаксации, в том числе вносить вклад в низкочастотные шумы (см. [22–24]), причем присутствие высших уровней в каждой яме не создает больших проблем. Дело в том, что внутриямное движение в каждой яме происходит гораздо быстрее межъямного, т.е., изучая редкие межъямные переходы, мы можем описывать каждую яму с помощью некоторых усредненных характеристик, например чисел заполнения. В результате мы получим некий двухуровневый флуктуатор (ДУФ), параметры которого описываются теорией МАП [6,22]. Для рассматриваемого мягкого двухъямного потенциала (8) $\eta < 0$, $\eta_L \ll |\eta| \ll 1$ и $t \ll 1$. Последнее неравенство соответствует утверждению о том, что асимметрия потенциала не должна быть слишком велика, так как большая асимметрия потенциала ДУФ препятствует его активации. Характерное число уровней в каждой яме составляет порядка $n_0 \approx V_B/\Delta E^d \approx 0.1(|\eta|/\eta_L)^{3/2}$, где $V_B = (\mathcal{E}|\eta|^2)/4$ — высота барьера, $\Delta E^d \approx 2^{3/2}\mathcal{E}|\eta|^{1/2}\eta_L^{3/2}$ — характерное расстояние между уровнями. Здесь мы рассматриваем ДУФ с настолько большим барьером, что $n_0 \gg 1$.

Подробнее поведение таких «медленно релаксирующих» возбуждений рассмотрено в [6,23,24].

3) **Область мягких осцилляторов.** При выполнении условия $1 \gg \eta \gg \eta_L$ ангармоничность колебательных состояний оказывается относительно слабой. В этом случае уравнение (8) описывает мягкий квазигармонический осциллятор (МО) с энергией

$\hbar\omega \approx 2^{3/2}\mathcal{E}|\eta|^{1/2}\eta_L^{3/2}$, лежащей в диапазоне $\hbar\omega_D \gg \hbar\omega \gg W$. Для плотности состояний таких возбуждений легко получить [19]

$$n_{SO}(E) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \frac{P_0\eta_L^{5/2}}{W} \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right)^4. \quad (18)$$

Полученный быстрый рост плотности состояний с энергией оказывается весьма важной характерной чертой стекол. В частности, он объясняет быстрый рост теплоемкости стекол с температурой при температурах в несколько градусов Кельвина, а также эксперименты по нейтронному рассеянию.

Рассмотрим взаимодействие фононов с МО в рамках модели МАП и найдем эффективности их упругого и неупругого рассеяния. Мы будем следовать работам [19,20,25].

Основным процессом упругого рассеяния фононов с энергией $\hbar\omega > W$ является их резонансное рассеяние на МО. Эффективность этого рассеяния легко оценить [19]

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\right)_{SO} = \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \omega C \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right)^3. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь процессы неупругого рассеяния фононов. Начнем со случая [25] $T = 0$, когда в равновесии ни фононы, ни МО не возбуждены и существенны лишь процессы распада неравновесных фононов. Указанные процессы с участием осцилляторов можно разделить на три группы [25]: 1) нерезонансное поглощение фонона частоты ω МО с энергией $E < \hbar\omega$, сопровождающееся испусканием фонона с энергией $\hbar\omega' = \hbar\omega - E$; 2) резонансное поглощение фонона МО с последующим процессом ангармонического двухфононного распада; 3) ангармоническое поглощение фонона МО с междуровневым расстоянием $E = \hbar\omega/2$.

Эффективности неупругого рассеяния фононов, соответствующие первому и второму процессам, легко получить во втором порядке теории возмущений по взаимодействию (11). Действительно, благодаря ангармоничности потенциала (8) фонон приводит к модуляции междуровневого расстояния МО, которое можно описать потенциалом деформации (он был введен в работе Паршина [20])

$$D = 12 \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \Lambda \eta_L^{1/2} \left(\frac{W}{E}\right)^2. \quad (20)$$

Для случая $T = 0$ возможны переходы лишь между двумя нижними уровнями МО. Следовательно, по аналогии со случаем ДУС [21] можно ввести [25] «диагональный» \mathcal{D} и резонансный «недиагональный» \mathcal{M} матричные элементы взаимодействия (11)

$$\mathcal{D} = D\epsilon_{ph}, \quad \mathcal{M} = \Lambda \sqrt{\frac{\hbar^2}{2MEd^2}} \epsilon_{ph}. \quad (21)$$

Теперь легко получить [25] оценку для эффективности неупругого рассеяния фононов за счет процессов первого типа (нерезонансное поглощение)

$$\left(\frac{1}{\tau_{\text{in}}}\right)_1 = \frac{1}{4\pi\mathcal{V}s^7\hbar^5\rho^2\omega} \sum_{SO} \mathcal{M}^2 \mathcal{D}^2 E^2 (\hbar\omega - E) \theta(\hbar\omega - E) \approx$$

$$\approx \frac{4\sqrt{2}}{27\pi} \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 \frac{P_0\Lambda^2\eta_L^4}{\rho s^2} \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right)^2 \approx \frac{2\sqrt{2}}{27\pi} \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 \omega\sqrt{\eta_L C} \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right). \quad (22)$$

Здесь мы использовали выражение (18) для плотности состояний МО.

Обсудим теперь процессы второго типа. Нетрудно усмотреть [25], что эффективность такого процесса можно оценить как

$$\left(\frac{1}{\tau_{\text{in}}}\right)_2 = \frac{1}{\tau_{r,SO}} \frac{1/\tau_{2\text{ph}}}{1/\tau_{1\text{ph}}}, \quad (23)$$

где [20]

$$\tau_{1\text{ph}}^{-1} = \frac{\eta_L^{9/2}}{4} \frac{\Lambda^2}{W\hbar} \left(\frac{E}{W}\right)^2 \quad (24)$$

есть скорость однофононного распада МО, тогда как для скорости двухфононного распада имеем

$$\tau_{2\text{ph}}^{-1} = \sum_{\omega_1, \omega_2} \delta(E - \hbar\omega_1 - \hbar\omega_2) \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{U}|^2. \quad (25)$$

Суммирование здесь производится по всем конечным фононным состояниям, а эффективный матричный элемент взаимодействия имеет вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{M}\mathcal{D} \frac{\sqrt{\hbar\omega_1\hbar\omega_2}}{2\rho s^2\mathcal{V}} \frac{E}{\hbar\omega_1(E - \hbar\omega_1)}, \quad (26)$$

\mathcal{V} — нормировочный объем.

В результате [25] для эффективности процессов второго типа (резонансное поглощение с последующим двухфононным распадом) получаем

$$\left(\frac{1}{\tau_{\text{in}}}\right)_2 \approx \frac{2\sqrt{2}}{27\pi} \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 \omega\sqrt{\eta_L C} \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right). \quad (27)$$

Заметим, что полученная оценка совпадает с оценкой (22) для нерезонансного поглощения.

Обсудим теперь возможный вклад процессов третьего типа (ангармоническое поглощение), который связан с ангармоническим взаимодействием фононов с МО, приводящим к переходам МО из состояния $|0\rangle$ в состояние $|2\rangle$,

$$\hat{V}_{\text{int}} \approx \mathcal{E}\xi \left(\frac{\hat{x}}{a}\right)^2 \hat{\epsilon}_{\text{ph}}. \quad (28)$$

Для соответствующей эффективности переходов имеем

$$\left(\frac{1}{\tau_{in}}\right)_{\beta} = \frac{1}{\tau_{an}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{SO} \langle 0|V_{int}|2\rangle|^2 \delta(E - \hbar\omega/2) \approx \frac{2\sqrt{2}\pi}{81} \eta_L^2 C\omega \left(\frac{\hbar\omega}{W}\right)^4, \quad (29)$$

где мы использовали равенство $\eta = \eta_L(E/2W)^2$ и учли, что суммирование по ξ ограничено условием одноячности потенциала МО $|\xi| < \sqrt{32\eta/9}$. Легко видеть [25], что благодаря малости параметра η_L данный вклад в неупругое рассеяние фононов оказывается меньше вкладов от процессов первого и второго типов, и в дальнейшем мы учитывать его не будем.

Далее нам понадобится не только полная эффективность неупругого рассеяния фононов, но также и парциальная вероятность рождения фонона с данной частотой, т.е. эффективность фонон-фононных процессов с участием МО. Если переписать полную эффективность рассеяния как

$$\frac{1}{\tau_{in}(\omega)} = \sum_{\omega_1} W(\omega, \omega_1), \quad \sum_{\omega_1} = \int d\omega_1 g(\omega_1) \quad (30)$$

(где $g(\omega)$ — фононная плотность состояний), получим для процессов неупругого рассеяния первого и второго типов

$$W(\omega, \omega_1) \approx \frac{2\sqrt{2}}{27\pi} \sqrt{\eta_L} \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 C\omega \frac{1}{\omega g(\omega)} \frac{\omega - \omega_1}{\omega_1}. \quad (31)$$

Отметим [25], что найденная вероятность расходится в пределе $\omega_1 \rightarrow 0$.

Теперь кратко обсудим случай конечных температур (детали можно найти, например, в работе Паршина [20]). В данном случае мы должны учесть процессы фонон-фононного рассеяния с участием возбужденных МО. В частности, необходимо рассмотреть процесс неупругого поглощения низкочастотного фонона ($\hbar\omega \ll T$) возбужденным МО с последующим испусканием фонона энергии $E + \hbar\omega$. Такие процессы могут быть описаны уравнением (27) после замены $\omega \rightarrow E/\hbar + \omega$ и включения дополнительного термодинамического фактора $(N(E)[N(E + \hbar\omega) + 1] - [N(E) + 1]N(E + \hbar\omega))$, где $N(E) = (\exp(E/kT) - 1)^{-1}$ — функция Планка. В результате легко получить для эффективности неупругого рассеяния фононов

$$\frac{1}{\tau_{in}} \approx \frac{2\sqrt{2}}{27\pi} \sqrt{\eta_L} C \left(\frac{\Lambda\eta_L^2}{W}\right)^2 \frac{W}{\hbar} \left(\frac{T}{W}\right)^2, \quad (32)$$

что соответствует оценке для релаксационного поглощения звука на МО, полученной Паршиным [20].

Процессы двухфононного рассеяния могут быть рассмотрены аналогично и дают тот же результат.

В случае конечных температур мы должны также учесть процессы неупругого рассеяния на двухъямных потенциалах с достаточно высокими барьерами [19]. Соответствующая эффективность рассеяния есть

$$\left(\frac{1}{\tau_{in}}\right)_{rel} \approx \pi\omega C \left(\frac{T}{W}\right)^{3/4} \ln^{-1/4}(1/\omega\tau_0). \quad (33)$$

Здесь τ_0^{-1} — частота попыток.

4) Промежуточная область. Необходимо отметить, что промежуточная частотная область $\hbar\omega \approx W$ оказывается выделенной [25] по отношению к процессам неупругого рассеяния благодаря присутствию в стекле большого количества сильно ангармонических двухъямных потенциалов с величиной барьера порядка W . Для таких объектов можно ожидать ситуации, когда два нижних уровня локализованы в ямах, а третий расположен над барьером («трехуровневая система»). Легко видеть, что в этом случае последовательные резонансные переходы типа $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ приводят к неупругому рассеянию фонона. Для получения грубой оценки эффективности данного процесса предположим, что деформационный потенциал взаимодействия, описывающий переходы между уровнями в такой системе, по порядку величины совпадает с деформационным потенциалом ДУС

$$D \approx \Lambda \sqrt{|\eta|/2}. \quad (34)$$

Тогда получим [25]

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\right)_{1-3} = \sum_{SAP} \frac{2\pi}{\hbar} | \langle 1 | \mathcal{H}' | 3 \rangle |^2 \nu P(\eta, \xi) \delta(\hbar\omega - E_{1-3}), \quad (35)$$

где

$$\langle 1 | \mathcal{H}' | 3 \rangle \approx \Lambda \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\rho\nu s^2}}.$$

Для анализа данных выражений удобно сделать замену переменных $(\eta, \xi) \rightarrow (\Delta, V_B)$, где Δ — асимметрия ям, а V_B — высота барьера. Якобиан преобразования имеет вид

$$\left| \frac{\delta(\eta, \xi)}{\delta(\Delta, V_B)} \right| = \frac{\eta_L^{3/2}}{2} V_B^{-5/4} W^{3/4}.$$

Теперь для фононов с энергией $\hbar\omega \approx W$ легко получить искомую оценку для процессов неупругого рассеяния [25]

$$\left(\frac{1}{\tau_r}\right)_{1-3} \Big|_{\hbar\omega \approx W} \approx C \left(\frac{\Lambda \eta_L^2}{W}\right)^2 \omega, \quad (36)$$

которая по порядку величины совпадает с оценкой для резонансного рассеяния фононов на МО в соответствующем частотном диапазоне.

Заметим, что рассмотренный выше процесс рассеяния приводит лишь [25] к эффективному перераспределению энергии в переходной частотной области $\hbar\omega \approx W$, но не связывает между собой низко- ($\hbar\omega \ll W$) и высокочастотные ($\hbar\omega \gg W$) фононные моды.

В заключение данного подраздела приведем сводную таблицу для эффективностей различных процессов рассеяния фононов.

$1/\tau_{el}$ для процессов упругого рассеяния, ответственных за диффузию фононов

$\hbar\omega \ll W$	$\tau_{r,tl}^{-1} \approx \pi\omega C \operatorname{th} \left[\frac{\hbar\omega}{2T} \right]$
$\hbar\omega \gg W$	$\tau_{r,SO}^{-1} \approx \frac{1}{6\sqrt{2}\pi} \omega C \left(\frac{\hbar\omega}{W} \right)^3$

 $1/\tau_{in}$ для процессов неупругого рассеяния

	$T \ll W$	$T \gg W$
$\hbar\omega \ll W$	$\left(\frac{1}{\tau_{in}} \right) \approx \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)^{2/3} \frac{\pi^2}{288} C \times$ $\times \sqrt{\eta L} \left(\frac{\Lambda \eta^2}{W} \right)^2 \omega \left(\frac{\hbar\omega}{W} \right)^2$	$\frac{1}{\tau_{in}} \approx \frac{4\sqrt{2}}{27\pi} \sqrt{\eta L} C \left(\frac{\Lambda \eta^2}{W} \right)^2 \frac{W}{\hbar} \left(\frac{T}{W} \right)^2 +$ $+ \pi\omega C \left(\frac{T}{W} \right)^{3/4} \ln^{-1/4}(1/\omega\tau_0)$
$\hbar\omega \gg W$	$\left(\frac{1}{\tau_{in}} \right) \approx \frac{2\sqrt{2}}{27\pi} \left(\frac{\Lambda \eta^2}{W} \right)^2 \omega \sqrt{\eta L} C \left(\frac{\hbar\omega}{W} \right)$	$\frac{1}{\tau_{in}} \approx \frac{4\sqrt{2}}{27\pi} \sqrt{\eta L} C \left(\frac{\Lambda \eta^2}{W} \right)^2 \frac{W}{\hbar} \left(\frac{T}{W} \right)^2 +$ $+ \pi\omega C \left(\frac{T}{W} \right)^{3/4} \ln^{-1/4}(1/\omega\tau_0)$

В переходной частотной области $\hbar\omega \approx W$ эффективности упругого и неупругого рассеяния фононов оказываются величинами одного порядка и описываются оценкой (36). Однако эффективность неупругого рассеяния, описывающая обмен энергией с высокоэнергетическими возбуждениями, в данном случае также дается оценками (32), (33).

1.4. Электронные двухуровневые системы в полупроводниках

С тех пор как под влиянием идей Андерсона, Халперина, Вармы [9] и Филлипса [10] было установлено, что за низкотемпературные свойства стекол ответственны двухуровневые туннельные системы, стала обращать на себя внимание определенная аналогия в свойствах стекол и известных к тому времени свойствах полупроводников в области прыжковой проводимости. Было показано, что данная аналогия в значительной мере обусловлена наличием в полупроводниках электронных двухуровневых систем (ЭДУС), определяющим их низкотемпературные свойства. Указанные ЭДУС образованы близкорасположенными свободным и занятым примесными центрами (см. [7]) (двухузельная модель), а их плотность состояний как функция энергии оказывается приблизительно постоянной (мы считаем выполненным условие $E \ll (e^2 N_D^{2/3} r_E / \epsilon)$)

$$F(E) = \frac{N_D^2 K f(K)}{2(e^2 N_D^{1/3} / \epsilon)^2 \epsilon r_E} e^2, \quad (37)$$

что делает аналогию со стеклами достаточно полной. Здесь N_D — концентрация доноров, K — степень компенсации, e и ϵ — заряд электрона и диэлектрическая проницаемость среды соответственно, $r_E \equiv r(I(r) = E)$, (I — интеграл перекрытия волновых функций доноров, образующих ЭДУС), а $f(K)$ — некая функция (см. раздел 3). Далее (см. раздел 3) мы проанализируем влияние ЭДУС на рассеяние неравновесных фононов в полупроводниках.

2. Фононная кинетика в аморфных слоях

2.1. Обзор экспериментальных данных

К настоящему времени имеется большое количество экспериментальных данных по распространению неравновесных фононов в стеклах. Полученные результаты сводятся в основном к следующему.

Прежде всего многочисленные экспериментальные данные свидетельствуют о сильном (значительно более сильном, чем в кристаллах) упругом рассеянии с сильной частотной зависимостью. Так, в [5,19;26,27] наблюдалось очень сильное упругое рассеяние высокочастотных фононов в стекле. Хотя поведение коэффициента диффузии этих фононов и описывалось законом $D \propto \omega^{-4}$, рассеяние было существенно сильнее, чем можно было ожидать, экстраполируя результаты для рэлеевского рассеяния в грязных кристаллах на случай стекол.

В экспериментах со слабыми тепловыми импульсами [28] было обнаружено поведение типа T^5 для эффективного коэффициента диффузии фононов, что также свидетельствует о сильной частотной зависимости коэффициента диффузии.

Далее в стекле было обнаружено сильное неупругое рассеяние фононов. Впервые этот факт был отмечен Литче и Киндером [5,26], которые изучали транспорт неравновесных фононов в пленках аморфного SiO_2 . В этих экспериментах квазимонохроматические фононные пучки с энергиями фононов до 12 К генерировались с помощью сверхпроводящего туннельного контакта [29] и пропускались через аморфную пленку SiO_2 . Спектр прошедших через пленку фононов анализировался с использованием резонансного рассеяния фононов на ионах V^{3+} в Al_2O_3 вместе с обычным (Al-Al) детектором. Результаты экспериментов показали, что фононы испытывают сильное, на много порядков величины большее, чем в кристалле, неупругое рассеяние. Было также продемонстрировано, что эффективность неупругого рассеяния фононов довольно быстро растет с частотой фононов.

Впоследствии термализацию неравновесных фононов в стекле, а также конверсию их вниз по спектру изучали во многих работах [30-33]. Так, например, в работе [33] исследовалось прохождение терагерцовых фононов через тонкие аморфные пленки $a\text{-Si:H}$ и $a\text{-Ge}$ на кристаллической подложке $c\text{-Si}$. Измерения проводились при субгелиевой температуре с помощью метода оптического детектирования неравновесных фононов, использующего влияние фононов на экситонную люминесценцию $c\text{-Si}$. Было установлено, что в аморфных пленках имеет место весьма эффективная конверсия высокочастотных фононов в низкочастотные, обусловленная сильным неупругим рассеянием фононов.

В целом, к сожалению, большинство экспериментов не дает никаких количественных оценок эффективности процессов неупругого рассеяния фононов, за исключением утверждения о том, что она является аномально высокой по сравнению с ситуацией в кристаллах. Особняком стоит работа Шерга и др. [27], где была сделана попытка выделить значения неупругих длин пробега. Однако относительно узкий диапазон исследованных частот, неучет процессов конверсии фононных мод между ветвями спектра (что кажется важным для данного эксперимента), а также неопределенность в реальных граничных условиях задачи делают затруднительным количественный анализ полученных результатов.

Особо следует выделить совокупность экспериментальных фактов, полученных для кристаллических образцов, но также связанных, на наш взгляд, со структурным беспорядком. Речь идет о двух фундаментальных явлениях, первым из которых является наблюдавшееся в целом ряде работ [34–38] сильное неупругое рассеяние фононов на поверхности кристаллических образцов. Это рассеяние, по-видимому, было связано с аморфизацией приповерхностного слоя. Второе явление — феномен «сопротивления Капицы» (см., например, [39]) — аномально малое тепловое сопротивление интерфейса между кристаллом и окружающим его гелием или между двумя кристаллами. Последнее, по-видимому, имеет место лишь для поверхностей, обладающих [40] известной степенью беспорядка.

Как известно, неравновесный фононный транспорт в кристаллах может обладать весьма богатой физической картиной [41], и тем более этого следует ожидать в аморфных материалах, где процессы упругого и (что важно) неупругого рассеяния фононов, как показывают эксперименты, на много порядков величины эффективнее. Кроме того, сама проблема фононной кинетики в аморфных материалах имеет ряд особенностей по сравнению с ситуацией в кристаллах. В частности, неупругое рассеяние фононов в кристаллах при низких температурах относительно слабо и может проявиться лишь в объемных образцах, тогда как в аморфных материалах учет как упругого, так и неупругого рассеяния оказывается важен даже в тонких пленках и слоях, где кинетика фононов сильно зависит от граничных условий. Таким образом, можно ожидать, что многие широко известные концепции фононной кинетики в кристаллах (например, концепция фононных поколений [42], нелокальной теплопроводности [43], горячего пятна [44,45] и др.) должны будут подвергнуться существенному пересмотру для ситуации аморфного материала.

В то же самое время последовательный анализ фононного транспорта в стеклах на основе какой-либо теоретической модели до последнего времени, по сути дела, отсутствовал или был ограничен уже описанным выше изучением локальной фононной теплопроводности и поглощения звука (см. [6,19,20]).

В [25] вышеуказанные пробелы в теории были в какой-то мере заполнены и было дано детальное описание фононного транспорта в аморфных системах для некоторых типичных экспериментальных ситуаций. Для описания низкоэнергетических локализованных возбуждений в стекле, контролирующих фононное рассеяние, в этой работе была использована модель мягких потенциалов (см. раздел 1). В дальнейшем мы будем следовать работе [25].

2.2. Кинетика неравновесных фононов, инжектированных из «холодного» кристалла

Рассмотрим поток неравновесных фононов, падающий из кристаллического полупространства (где фононы распространяются без рассеяния) на исследуемую аморфную пленку. Такая ситуация реализуется, например, в системе, состоящей из аморфной пленки, нанесенной на подложку из кристаллического Si, где наблюдалось баллисти-

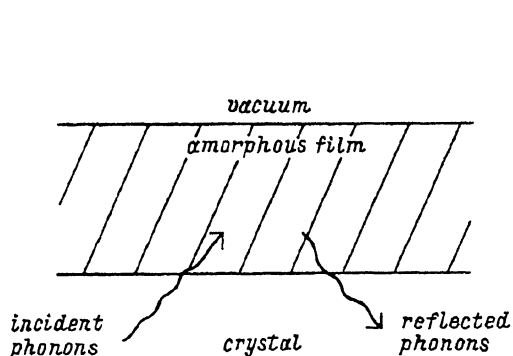


Рис. 2. Геометрия «на отражение».

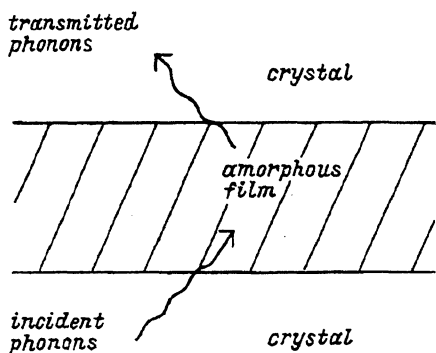


Рис. 3. Геометрия «на прохождение».

ческое распространение фононов с энергиями до 40 К (см., например, [33]). Нетрудно усмотреть две возможные геометрии соответствующего эксперимента: 1) исследуется поток фононов, отраженных от аморфной пленки (геометрия «на отражение») (рис. 2); 2) исследуется поток фононов, прошедших через пленку (геометрия «на прохождение») (рис. 3).

1) Геометрия «на отражение». Для простоты будем считать падающий на пленку фононный пучок квазимонохроматическим с характерной частотой $\omega \approx \omega_i$; $\hbar\omega_i \gg T_0$, где T_0 — температура тепловой бани. Запишем функцию распределения фононов в этом пучке в виде

$$f_i(\omega) = G(\omega, \omega_i),$$

где $G(\omega, \omega_i) = (G_0/\sqrt{\pi}) \exp\{-[(\omega - \omega_i)/\delta\omega]^2\}$ — узкий гауссовский колокол с максимумом в $\omega = \omega_i$.

Если бы в аморфной пленке процессы неупругого рассеяния отсутствовали и соответственно движение фононов являлось бы чисто диффузионным, то с учетом граничного условия «полного отражения» на открытой границе пленки ($x = L$) мы легко получили бы однородное пространственное распределение фононов в пленке $f(x, \omega) = f_i(\omega)$. Здесь x — координата по оси, нормальной к поверхности пленки и имеющей начало ($x = 0$) на интерфейсе между пленкой и подложкой. Отметим, что мы рассматриваем случай, когда толщина пленки L мала по сравнению с шириной пучка падающих фононов, что позволяет нам считать кинетику неравновесных фононов в пленке квазиодномерной.

Неупругие процессы фононного рассеяния меняют полученную простую картину. Как мы покажем, их изучение позволяет получить дополнительную информацию о поведении фононов в стекле. В данном подразделе мы ограничимся лишь линейным случаем $f(\omega) \ll 1$, который актуален для многих экспериментов. Это позволит нам пренебречь процессами слияния фононов. Принимая во внимание, что эффективность упругого рассеяния фононов (по крайней мере в диапазоне частот $\hbar\omega \gg W$) гораздо больше эффективности неупругого, кинетику фононов частоты ω_i можно описать обычным уравнением диффузии

$$D_{\omega_i} \Delta f(\omega_i) - \frac{f(\omega_i)}{\tau_{\text{in}}(\omega_i)} = 0 \quad (38)$$

с граничным условием $f(\omega)|_{x=0} = f_i(\omega)$. Заметим, что в приповерхностном слое толщины порядка длины свободного пробега $l = \sigma \tau_{e1}$ данное уравнение, очевидно, несправедливо, и использованное нами граничное условие представляет собой эффективное граничное условие для описания приповерхностного слоя. Таким образом, мы заключаем, что 1) преобладающим для фононов является диффузное упругое рассеяние, большинство фононов из исходного пучка вернется обратно в подложку и интенсивность отраженного потока фононов на частоте ω_i примерно равна интенсивности падающего; 2) функция распределения фононов с частотой ω_i в аморфной пленке имеет вид $f(\omega \approx \omega_i, x) = f_i(\omega) \exp(-x/l_d(\omega))$, $l_d(\omega) = \sqrt{D(\omega)\tau_{\text{in}}(\omega)}$. В дальнейшем будем считать $l_d(\omega_i) \ll L$.

Неупругие процессы фононного рассеяния рождают фононы с более низкими частотами ω_2 (конверсия вниз по спектру), причем как можно видеть, вероятность рождения фонона с частотой $\omega_2 \approx \omega_i/2$ максимальна. Уравнение для таких фононов имеет вид

$$D_{\omega_2} \Delta f(\omega_2) + Q(\omega_2) - \frac{f(\omega_2)}{\tau_{\text{in}}(\omega_2)} = 0 \quad (39)$$

с эффективным граничным условием, соответствующим свободному баллистическому выходу фононов из пленки в кристаллическую подложку через интерфейс $x = 0$

$$sf(\omega)|_{x=-0} = D_{\omega} \nabla f(\omega)|_{x=+0}. \quad (40)$$

Второй член в уравнении (39) — $Q(\omega)$ — есть источник, описывающий рождение фононов с частотой ω за счет спектральной конверсии вниз высокочастотных фононов; третий член описывает дальнейший фононный распад. Здесь и далее (см. также замечания относительно акустического рассогласования в подразделе 2.5) мы не учитываем различий между пленкой и подложкой в скорости звука, плотности фононных состояний и др., так как их учет сильно усложнил бы картину, не изменяя ее принципиально.

Используя выражения для парциальных вероятностей фононного распада, данных уравнениями (30), (31), запишем источник в виде

$$Q(\omega_{n+1}) = \sum_{\omega_n} W(\omega_n, \omega_{n+1}) f(\omega_n). \quad (41)$$

Для первой ступени конверсии, учитывая квазимонохроматичность исходного распределения $f_i(\omega_1)$ по ω_1 , получаем

$$Q(\omega_2) \approx G_0 \delta \omega \nu(\omega_i) W(\omega_i, \omega_2),$$

и, наконец, используя (30), (31), имеем

$$Q(\omega_2) = G_0 \frac{\delta \omega}{\omega_i} \frac{\alpha(\omega_2, \omega_i)}{\tau_{\text{in}}(\omega_i)}, \quad (42)$$

где $\alpha(\omega_2, \omega_i)$ фактор, описывающий эффективность конверсии. Заметим, что, согласно (31), $W(\omega_1, \omega_2)$ (и, следовательно, α) оказывается пропорциональной ω_2^{-1} при $\omega_2 \rightarrow 0$.

Используя уравнения (38)–(42), можно оценить функцию распределения фононов половинной (по отношению к начальной) частоты

$$f(\omega_2)|_{x=0} \approx G_0 \frac{\delta\omega}{\omega_i} \frac{l_d(\omega_i)}{s\tau_{in}(\omega_i)} \alpha(\omega_2, \omega_i), \quad (43)$$

и ее максимальное значение (в точке $x \approx l_d(\omega_i)$)

$$f(\omega_2)|_{x \approx l_d(\omega_i)} \approx G_0 \frac{\delta\omega}{\omega_i} \frac{l_d^2(\omega_i)}{D_\omega \tau_{in}(\omega_2)} \alpha(\omega_2, \omega_i). \quad (44)$$

Уравнение (43) дает оценку для функции распределения фононов, появившихся за счет спектральной конверсии и ушедших обратно в подложку; именно они регистрируются как «отраженный» поток. Типичные фоновые детекторы регистрируют (парциальную) плотность энергии фононного пучка. Для соответствующей эффективности конверсии имеем

$$K(\omega_2, \omega_i) \approx \frac{l_d(\omega_i)}{s\tau_{in}(\omega_i)} \alpha(\omega_2, \omega_i) \frac{\nu(\omega_2)}{\nu(\omega_i)} \propto \sqrt{\frac{\tau_e(\omega_i)}{\tau_{in}(\omega_i)}} \omega_2. \quad (45)$$

Проанализируем процессы конверсии более высокого порядка. Как можно видеть из (44), каждая последующая ступень конверсии $k \rightarrow k+1$ дает дополнительный множитель

$$\frac{l_d^2(\omega_k)}{D_{\omega_{k+1}} \tau_{in}(\omega_{k+1})} \alpha(\omega_{k+1}, \omega_k) \propto \frac{D_{\omega_{k+1}} \tau_{in}(\omega_{k+1})}{D_{\omega_k} \tau_{in}(\omega_k)} \alpha(\omega_{k+1}, \omega_k).$$

Поскольку, согласно (19), (22), (27), $D_\omega \tau_{in}(\omega) \propto \omega^{-6}$, данный множитель мал и вкладом процессов многоступенчатого распада можно пренебречь по сравнению с $K(\omega_2, \omega_i)$.

Таким образом, изучение процессов «неупругого отражения», описываемого (45), дает нам информацию о величине отношения τ_e/τ_{in} для падающих фононов.

2) Геометрия «на проходе». Для того чтобы избежать обсуждения транспорта фононов внутри фононного детектора, мы предполагаем, что $x = L$ соответствует интерфейсу с другим «баллистическим» кристаллом. Указанная ситуация имеет место во многих реальных экспериментах (см., например, [27, 33]). Тогда мы должны и на этой поверхности использовать условие «баллистического выноса» для всех фононов

$$-D_\omega \nabla f(x, \omega)|_{x=L-0} = s f(x, \omega)|_{x=L+0}. \quad (46)$$

В отсутствие неупругих процессов в пленке мы бы получили из (38), (46)

$$f(x = L, \omega_i) \approx f_i \frac{D_{\omega_i}}{sL} = f_i \frac{l_e(\omega_i)}{L},$$

тогда как для случая $l_d(\omega_i) = \sqrt{D_{\omega_i} \tau_{in}(\omega_i)} \ll L$ имеем

$$f(x, \omega_i) = f_i \left[\exp\left(-\frac{x}{l_d(\omega_i)}\right) - \exp\left(\frac{x-2L}{l_d(\omega_i)}\right) \left(\frac{1 + D_{\omega_i}/sl_d(\omega_i)}{1 - D_{\omega_i}/sl_d(\omega_i)}\right) \right]. \quad (47)$$

Следовательно, для функции распределения прошедших через пленку фононов начальной частоты ω_i имеем

$$f(\omega = \omega_i, x = L) \approx f_i \exp\left(-\frac{L}{l_d(\omega_i)}\right) \frac{2D_{\omega_i}}{sl_d(\omega_i)}. \quad (48)$$

Что же касается ситуации с низкочастотными фононами, появляющимися вследствие процессов конверсии вниз по спектру, она сильно зависит от соотношения между их диффузионной длиной $l_d(\omega) = \sqrt{D_{\omega} \tau_{in}(\omega)}$ и толщиной аморфной пленки L . Для фононов с $D_{\omega} \tau_{in}(\omega) \gg L^2$ получаем

$$f(\omega, x = L) \approx f_i \frac{D_{\omega_i}}{sL} \alpha(\omega, \omega_i). \quad (49)$$

Для обратного предельного случая $D_{\omega} \tau_{in}(\omega) \ll L^2$ уравнение (39) вместе с граничными условиями (40), (46) дает

$$f(\omega, x = L) = f_i \exp\left(-\frac{L}{l_d(\omega)}\right) \frac{D_{\omega_i}}{sl_d(\omega)} \alpha(\omega, \omega_i). \quad (50)$$

Видно, что наиболее эффективно переносятся фононы с частотами $\omega < \omega_{th}$, где ω_{th} дается условием

$$D_{\omega_{th}} \tau_{in}(\omega_{th}) \approx L^2. \quad (51)$$

Поскольку для каждой последующей ступени спектральной конверсии наиболее вероятными процессами являются процессы с $\omega_{k+1} \approx \omega_k/2$, можно ожидать картину, аналогичную «фононным поколениям» Казаковцева и Левинсона [42] при условии $\omega_i \gg \omega_{th}$. Однако, следуя тем же самым соображениям, что и для геометрии «на отражение», можно показать, что вследствие ухода фононов через границу $x = 0$ источник в (39) сильно уменьшается с каждым последующим шагом конверсии

$$Q_{k+1} \approx Q_k \frac{D_{\omega_k} \tau_{in}(\omega_k)}{D_{\omega_{k+1}} \tau_{in}(\omega_{k+1})} \alpha(\omega_{k+1}, \omega_k).$$

Полное число фононов, появившихся вследствие конверсии вниз, пропорционально $Q_k l_d(\omega_k)$ (т.е. произведению относительной величины источника на его характерный пространственный масштаб), тогда как отношение эффективностей двух последовательных актов конверсии есть

$$\frac{l_d(\omega_k)}{l_d(\omega_{k+1})} \alpha(\omega_{k+1}, \omega_k).$$

Учитывая, что $l_d \propto \omega^{-3}$, а $\alpha(\omega_2, \omega_1) \propto \omega_2^{-1}$, видим, что в процессе конверсии главный вклад опять вносит первая ступень.

Таким образом, спектр прошедших фононов резко обрезан в высокочастотной области $\omega > \omega_{th}$, а парциальная эффективность конверсии для низких частот дается выражением

$$K(\omega, \omega_i) \approx \frac{D_{\omega_i}}{sL} \frac{\nu(\omega)}{\nu(\omega_i)} \alpha(\omega, \omega_i). \quad (52)$$

Отметим, что здесь мы ограничились случаем, когда начальные числа заполнения фононов малы и $f_i \ll 1$. В случае конечных f_i в дополнение к чисто распадным процессам следует учитывать также и процессы слияния фононов. Определим «парциальную температуру» фононов частоты $\omega \approx \omega_{th}$ (вносящих основной вклад в плотность энергии в точке $x = L$) $T_{p,th}$ как

$$T_{p,th} = \frac{\hbar\omega_{th}}{\ln[1 + 1/f(\omega = \omega_{th})]}. \quad (53)$$

Ясно, что числа заполнения $f(\omega)$, данные уравнением (50), не могут рассматриваться меньшими, чем определяемые этой парциальной температурой

$$f(\omega > \omega_{th}, x = L) \geq N_0(\omega, T_{p,th}(x = L)). \quad (54)$$

Отметим, что l_d^{-1} и соответственно аргумент в экспоненте (48) являются суперлинейными функциями ω , тогда как аргумент экспоненты в N_0 линеен по частоте. Данное обстоятельство приводит к ослаблению экспоненциального уменьшения чисел заполнения прошедших высокочастотных фононов с частотой. Этот факт качественно объясняет результаты экспериментов [27].

Таким образом, видно, что процессы неупругого рассеяния (слияния) могут «замаскировать» возможную локализацию высокочастотных фононов [25].

2.3. Распространение слабонерновесных тепловых импульсов в объемном стекле

В следующих двух подразделах мы обсудим некоторые ситуации, типичные для экспериментов с тепловыми импульсами (рис. 4), когда имеет смысл говорить о температуре фононов, по крайней мере для некоторых фононных частот.

Сначала изучим случай «слабых» тепловых импульсов с характерной температурой T , лишь немного превышающей температуру бани T_0 . Для образцов с размерами, большими, чем диффузионная длина пробега фононов, ответственных за теплоперенос в стекле, мы можем использовать обычное уравнение теплопроводности [25]

$$C(T) \frac{dT}{dt} - \nabla(\kappa(T)\nabla T) = 0. \quad (55)$$

Здесь $C(T)$ — теплоемкость, $\kappa(T)$ — теплопроводность среды. В случае $T - T_0 \equiv \delta T \ll T_0$ уравнение (55) можно линеаризовать. Получаем

$$\frac{d\delta T}{dt} - D_{\text{eff}}(T_0)\Delta\delta T = 0. \quad (56)$$

Здесь мы ввели эффективный коэффициент диффузии

$$D_{\text{eff}}(T) = \frac{\kappa(T)}{C(T)}. \quad (57)$$

Рассмотрим одномерную задачу для образца, имеющего вид полупространства $x > 0$. Если в качестве начального условия в момент времени $t = 0$ мы инжектируем в образец некоторую энергию с поверхностной плотностью Q и возьмем граничное условие $\nabla\delta T|_{x=0} = 0$ (теплоизолированная поверхность), то получим решение (56) в известном виде

$$\delta T(t) = \frac{Q/C(T_0)}{\sqrt{2\pi D_{\text{eff}}(T_0)t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{\text{eff}}(T_0)t}\right). \quad (58)$$

Легко видеть, что, если мы детектируем импульс с помощью болометра, расположенного в точке $x = L$, максимум сигнала на детектор придет в момент времени

$$t_{\text{max}} \approx \frac{L^2}{D_{\text{eff}}(T_0)}. \quad (59)$$

Для аморфного образца в области температур, соответствующей плато в теплопроводности ($\kappa(T) \approx \text{const}$), теплоемкость $C \propto T^5$. Тогда получаем

$$t_{\text{max}} \propto T^5. \quad (60)$$

Такое поведение действительно было обнаружено в ряде экспериментов на образцах аморфного SiO_2 в температурном диапазоне 2–5 К (см. [28] и ссылки там).

2.4. Стационарный фононный транспорт в системе с тепловым генератором

Рассмотрим теперь ситуацию, когда источником неравновесных фононов в аморфном слое является нанесенная на него тонкая металлическая пленка, нагреваемая электрическим током или импульсами лазерного света («тепловой генератор»), а сам слой расположен на «холодной» кристаллической подложке, где фононы могут распространяться баллистически (ситуация, изучавшаяся, например, в [27,33]). Мы рассмотрим случай достаточно тонких аморфных слоев, т.е. таких,

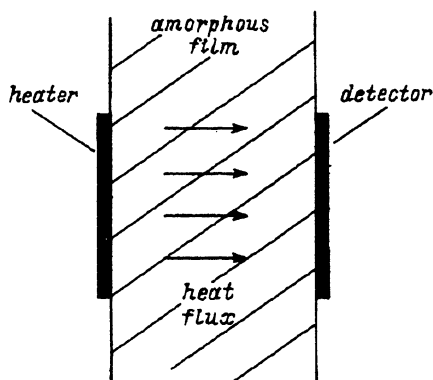


Рис. 4. Схема эксперимента на прохождении тепловых импульсов.

для которых характерное время, проводимое фононами в слое, гораздо меньше длительности теплового импульса, и кинетику фононов в слое можно считать стационарной. Работая, как и прежде, в одномерной геометрии, мы можем описать тепловой генератор эффективным граничным условием для фононной функции распределения на интерфейсе [25]

$$f(\omega)|_{x=0} = N_0(\omega, T_H), \quad (61)$$

где N_0 — функция Планка, T_H — температура металлической пленки, задаваемая внешним возбуждением. В реальной ситуации извне задается лишь некий поток энергии в единицу времени \dot{Q} , а значение T_H должно определяться самосогласованно с учетом эффективности оттока тепла от генератора, т.е. с учетом кинетики фононов в аморфном слое. Для интерфейса слой-кристалл мы можем использовать граничное условие (46).

Будем считать, что характерная температура фононного газа T больше W , но не выходит далеко за область плато в теплопроводности стекла. В этом случае теплоперенос осуществляется в основном за счет подтепловых фононов с частотой $\bar{\omega}$ ($\hbar\bar{\omega} \approx W \ll T$) (см., например, [6]). Если диффузионная длина пробега этих фононов меньше толщины слоя L , мы имеем дело с хорошо определенным понятием температуры для фононов, ответственных за теплоперенос, и можем описывать их кинетику внутри слоя с помощью (стационарного) уравнения теплопроводности

$$\kappa[T(x)]\nabla T(x) = \dot{Q} = \text{const}. \quad (62)$$

Ясно, что температура в слое уменьшается с увеличением x по закону

$$\int_{T(x)}^{T_H} dT' \frac{\kappa(T')}{\dot{Q}} = x, \quad (63)$$

что в области плато соответствует линейной зависимости $T(x)$.

Задание температуры теряет смысл на интерфейсе с подложкой, где уход фононов является баллистическим. Температура может быть определена лишь на некотором расстоянии от интерфейса

$$\Delta x \equiv L - x \geq l_d(\bar{\omega}, T(x)). \quad (64)$$

Важно отметить, что l_d в данном случае есть диффузионная длина пробега фононов по отношению к неупругим процессам рассеяния, ответственным за обмен энергии между фононами $\omega \approx \bar{\omega}$ и высокочастотными возбуждениями (см. (32), (33)). Следовательно, l_d зависит от температуры.

Необходимо иметь в виду, что решение $T(x)$ уравнения (62) не может быть найдено, пока мы не определили величину T_H . Для нахождения последней нам необходимо некоторое эффективное граничное условие. Определим значения $x = x^*$, $T = T^*$ как обращающие неравенство (64) в равенство и будем описывать теплоперенос в области $x^* < x < L$ с помощью уравнения диффузии для фононов «главной» частоты $\omega \approx \bar{\omega}$

$$\hbar\bar{\omega}C_{\text{ph}}(\hbar\bar{\omega})D_{\bar{\omega}}\nabla f(\bar{\omega}) \approx -\dot{Q}. \quad (65)$$

Здесь $C_{\text{ph}}(\hbar\bar{\omega})$ — фононная теплоемкость, описывающая фазовый объем «главных» фононов. В качестве граничного условия для (65) при $x = x^*$ мы сошьем искомое решение с квазиравновесным фононным распределением при $x < x^*$

$$f(\omega)|_{x=x^*} = N_0(T^*, \omega) \approx \frac{T^*}{\hbar\omega},$$

где мы приняли во внимание условие $T^* \gg W$. Для границы $x = L$ мы должны использовать условие (46), в любом случае приводящее к выполнению неравенства $f(x = L) \ll f(x = x^*)$. Тогда мы можем переписать (65) в виде

$$\hbar\bar{\omega}C_{\text{ph}}(\hbar\bar{\omega}) \frac{D_{\bar{\omega}}T^*}{\hbar\bar{\omega}l_d(\bar{\omega}, T^*)} \approx \dot{Q}, \quad (66)$$

что дает нам оценку для величины T^* . Сравнивая уравнения (63) и (66), видим, что для достаточно больших \dot{Q} и L мы имеем $T^* \ll T_H$, $L - x^* \ll L$. Следовательно, мы можем оценить T_H , полагая в (63) $x = L$, $T = 0$. Спектральная плотность испущенных баллистических фононов частоты $\omega \approx \bar{\omega}$ находится с помощью граничного условия (46)

$$\hbar\bar{\omega}sf(\bar{\omega})|_{x=L} \propto \dot{Q}. \quad (67)$$

Что же касается фононов более высоких частот $\omega > \bar{\omega}$, их эффективная температура (и, следовательно, температура МО соответствующих энергий) определяется балансом с «главными» фононами $\omega \approx \bar{\omega}$ и таким образом задается парциальной температурой последних

$$T_{\omega} \approx T_{p, \bar{\omega}} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{\ln[1 + 1/f(\omega = \bar{\omega})]}. \quad (68)$$

Из (65) видно, что $f(\omega = \bar{\omega})$ уменьшается линейно с x вблизи $x = L$. Следовательно, в области $L - x \approx l_d(\omega)$, откуда фононы частоты $\omega > \bar{\omega}$ могут выйти в подложку без неупругого рассеяния, имеем

$$f(\omega \approx \bar{\omega})|_{L-x \approx l_d(\omega)} \approx N_0(\bar{\omega}, T^*)l_d(\omega)l_d(\bar{\omega}, T^*)$$

(l_d здесь берется по отношению к чисто распадным процессам), и, следовательно, числа заполнения испущенных фононов в области частот $\omega > \bar{\omega}$ имеют вид

$$f(\omega) \approx \frac{D_{\omega}}{sl_d(\omega)} N_0 \left(\omega, T = \frac{\hbar\bar{\omega}}{\ln[1 + N_0^{-1}(\bar{\omega}, T^*)l_d(\bar{\omega}, T^*)/l_d(\omega)]} \right). \quad (69)$$

Для ω , близких к $\bar{\omega}$, когда

$$l_d(\bar{\omega}, T^*)/l_d(\omega) < N_0(\bar{\omega}, T^*),$$

получаем

$$\frac{f(\omega)}{f\bar{\omega}} \approx \frac{D_{\omega}}{D_{\bar{\omega}}} \frac{l_d(\bar{\omega}, T^*)}{l_d(\omega)} \frac{\hbar\bar{\omega}}{T^*} N_0 \left(\omega, T = T^* \frac{l_d(\omega)}{l_d(\bar{\omega}, T^*)} \right). \quad (70)$$

Таким образом, мы вначале (при $\omega < \sqrt{\bar{\omega}T^*/\hbar}$) имеем степенное уменьшение $f(\omega)$ с ростом частоты $f \propto D_\omega/\omega \propto \omega^{-5}$, которое при более высоких частотах переходит в экспоненциальное (см. (69)).

Что касается низкочастотных фононов ($\omega \ll \bar{\omega}$), то легко усмотреть, что они находятся в равновесии с высокочастотными в более «горячих» областях аморфного слоя (т.е. при меньших x). Для данной частоты ω мы можем оценить значения величин $x = x_\omega$, $T = T_\omega$, удовлетворяющие условию $L - x_\omega \approx l_d(\omega, T_\omega)$ для найденного выше профиля температуры.

Например, при $\kappa = \text{const}$ мы получаем для случая, когда τ_{in} определяется рассеянием на МО

$$L - x_\omega \approx l_d \propto \sqrt{D_\omega}, \quad T_\omega \approx T^* \sqrt{D_\omega/D_{\bar{\omega}}}. \quad (71)$$

Во всех случаях $T_\omega > T^*$. Для чисел заполнения испущенных фононов имеем

$$f(\omega) \approx \frac{D_\omega}{s(L - x_\omega)} N_0(\omega, T_\omega). \quad (72)$$

Итак, мы получили следующие результаты [25]: 1) вид спектрального распределения испущенных в подложку фононов сильно отличается от планковского; 2) максимум плотности энергии прошедших фононов соответствует частотам $\omega \approx \bar{\omega} \approx W/\hbar$ вне зависимости от температуры теплового генератора ($T \gg W$); 3) при высоких частотах спектральная плотность уменьшается как $\propto D_\omega/\omega \propto \omega^{-5}$ вплоть до частоты $\hbar\omega \approx T^*l_d(\omega)/l_d(\bar{\omega}, T^*)$, которую можно оценить из (70); 4) при низких частотах вплоть до частоты, соответствующей условию $l_d(\omega, T_H) \approx L$, и для $\kappa = \text{const}$ (т.е. $T(x)/(L - x) = \text{const}$) $f(\omega)$ растет с уменьшением частоты как $f(\omega) \propto D_\omega$.

Теперь кратко обсудим случай тонких пленок ($l_d(\bar{\omega}, T = T_H) > L$). Для таких пленок неупругие процессы рассеяния фононов с частотами $\omega \approx \bar{\omega}$ в пленке оказываются неэффективными, и картина зависит от скорости термализации фононов внутри самого «теплового генератора».

Действительно, если характерное время термализации для какой-нибудь низкочастотной моды ω в генераторе есть $\tau_{\text{in},H}(\omega)$, то полный поток энергии, переданный данной моде от высокочастотных фононов, не может превысить

$$\frac{\hbar\omega}{\tau_{\text{in},H}} N_0(\omega, T_H) \nu(\omega).$$

С другой стороны, полный поток энергии, перенесенный модой ω через интерфейс $x = 0$, ограничен сверху оценкой

$$\frac{\hbar\omega}{\tau_{\text{in},H}} N_0(\omega, T_H) \nu(\omega) \min[d, l_{d,H}(\omega, T_H)],$$

где d — толщина «генератора», а $l_{d,H}$ — диффузионная длина пробега фононов в нем. Следовательно, мы можем заключить, что если

$$\frac{1}{\tau_{\text{in},H}} \min(d, l_{d,H}(\omega, T_H)) \geq \frac{D_\omega}{L}, \quad (73)$$

то мода ω может быть в состоянии равновесия с генератором при $x = 0$ (т.е. мы можем положить $f(\omega, x = 0) = N_0(\omega, T_H)$); если же условие (73) не выполняется, то мода ω не вносит заметного вклада в теплоперенос.

Для частот, удовлетворяющих одновременно условию (73) и условию $l_d(\omega) > L$, спектр фононов, испущенных нагревателем в аморфную пленку, может быть оценен как

$$f(\omega) \approx \frac{N_0(\omega, T_H) D_\omega}{sL}. \quad (74)$$

Следовательно, основная энергия потока фононов сконцентрирована в области низких частот.

2.5. Нестационарный случай: фононное горячее пятно

Рассмотрим нестационарный фононный транспорт через относительно толстый аморфный слой толщины $L \gg l_d(\bar{\omega})$. В таком слое мы можем ввести понятие температуры для фононов, вносящих главный вклад в теплоперенос, и использовать для них обычное уравнение теплопроводности. Фононная кинетика в такой системе в условиях сильного приповерхностного возбуждения воспроизводит картину так называемого фононного горячего пятна [25,44,45]. Мы будем в основном следовать работам [25,45].

Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы инжектируем в холодный ($T = 0$) образец энергию с поверхностной плотностью Q_0 . Известно [46], что, если теплопроводность $\kappa(T)$ и теплоемкость $C(T)$ зависят от температуры степенным образом, т.е.

$$C(T) \equiv C_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\alpha-1}, \quad \kappa(T) \equiv \kappa_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\beta, \quad (75)$$

и если

$$\alpha - 1 - \beta \equiv n > 0, \quad (76)$$

решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$C(T) \frac{dT}{dt} - \nabla[\kappa(T') \nabla T] = 0 \quad (77)$$

с вышеуказанными начальными и обычными граничными условиями

$$\nabla T|_{x=0} = 0, \quad T(x \rightarrow \infty) = 0 \quad (78)$$

можно записать в виде

$$\Xi \equiv \int_0^T dT' C(T') = \left(\frac{4Q_0}{at} \right)^{\frac{\alpha}{2\alpha-n}} \left[\frac{n}{2(2\alpha-n)} \left(\xi_0^2 + \frac{x^2}{\left[\frac{at}{(2Q_0)^{n/\alpha}} \right]^{\frac{2\alpha}{2\alpha-n}}} \right) \right]^{-\alpha/n}, \quad (79)$$

где

$$a \equiv \{ \kappa(T) \Xi^{n/\alpha} C(T) \} \Big|_{T=T_0} \approx D_0 (C_0 T_0)^{n/\alpha} / 4^{n/\alpha}, \quad (80)$$

$$\xi_0^{2-n/\alpha} \approx 2\alpha(2-n/\alpha)\pi^{n/2\alpha} n^{-1} \Xi^{n/\alpha} (\alpha/n - 1/2) \Xi^{-n/\alpha} (\alpha/n) \approx 1. \quad (81)$$

В области плато в теплопроводности стекол $\kappa(T) \approx \text{const}$, $C(T) \propto T^5$. Следовательно, условие (76) является выполненным, и решение (79) применимым.

В решении (79), можно выделить область ядро (x достаточно мало, чтобы первый член в скобках в правой части (79) был доминирующим) и асимптотическую область (большие x). В ядре содержится большая часть энергии, заключенной в системе, а температура $T_c(t)$ в нем почти постоянна по координате. Граница ядра x_c и его температура даются выражениями

$$x_c \approx (D_0 t)^{n/(2\alpha-n)} \left(\frac{C_0 T_0}{Q_0} \right)^{\frac{n}{2\alpha-n}},$$

$$T_c \approx T_0 \left(\frac{Q_0}{C_0 T_0 x_c} \right)^{1/\alpha}. \quad (82)$$

В асимптотической области $x \gg x_c$

$$T(x, t) \approx T_0 \left(\frac{Dt}{x^2} \right)^{-1/n}. \quad (83)$$

Для того чтобы уравнение имело смысл, необходимо, чтобы

$$x_c \gg l_d(\bar{\omega}, T_c). \quad (84)$$

Это задает ограничения снизу на возможные значения t и Q_0 .

До сих пор мы рассматривали чисто одномерную (1D) геометрию, что соответствует условию $x \ll r_0$, где r_0 — радиус области начального поверхностного возбуждения. Теперь рассмотрим общий случай. Согласно работе [45], для d -мерного случая решение уравнения (77) типа (79) существует, если

$$n < n_c = 2\alpha/d. \quad (85)$$

В области плато в теплопроводности $\beta = 0$, $n = \alpha - 1$, так что данное условие выполняется для $d = 1, 2$ но не для $d = 3$. Следовательно, для чисто 3D-геометрии горячее пятно образоваться не может [45], т.е. нелинейное уравнение (77) не имеет диффузионного решения типа (79). Напротив, оно описывает мгновенный перенос тепла на бесконечность. Другими словами, решение уравнения (77) не имеет какого-либо характерного пространственного масштаба [45]. Тем не менее в трехмерных образцах горячее пятно может существовать, пока $x < r_0$, т.е. пока геометрия является квазиодномерной.

Рассмотрим случай, когда полная инжектированная энергия фононов $\pi Q_0 r_0^2$ настолько велика, что условие $T_c > W$ выполняется по крайней мере до времен $x_c(t) \approx r_0$; это необходимо для того, чтобы в области $r < r_0$ существовало решение типа (79). Данное условие имеет вид

$$\pi Q_0 r_0^2 \geq C(k_B T = W) W r_0^3. \quad (86)$$

Для области $r > r_0$ вместо (79) необходимо использовать квазистационарное решение уравнения (77), соответствующее сохранению [45]

полного теплового потока $I(r)$. В сферически-симметричном случае этот поток записывается как

$$I(r) = 2\pi r^2 \kappa [T(r)] \nabla T(r) = \text{const.} \quad (87)$$

Решение (79) должно переходить в решение уравнения (87) при $r \approx r_0$ и должно давать $T \rightarrow 0$ в пределе $r \rightarrow \infty$. Таким образом, при $r > r_0$ имеем

$$\left[1 - \left(\frac{T}{T^*} \right)^{\alpha-n} \right] = \frac{I}{\kappa(T^*)2\pi T^*} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)^{\alpha-n}. \quad (88)$$

Поскольку $T(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, при больших r получаем

$$T \sim T^* \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1/(\alpha-n)}, \quad r \gg r_0. \quad (89)$$

Температура «горячего пятна» $T^* \equiv T(r = r_0)$ дается (83) при $x = r_0$

$$T^* \approx T_0 \left(\frac{D_0 t}{r_0^2} \right)^{-1/n}. \quad (90)$$

Следовательно, температура «границы пятна» увеличивается вплоть до времен $t = t_c$, когда $x_c(t_c) \approx r_0$.

Как уже отмечалось, фоновое горячее пятно не может существовать в чисто трехмерной геометрии. Следовательно, при $t > t_c$ пятно [44,45] «коллапсирует» вследствие быстрого оттока энергии в холодный объем. Время коллапса по порядку величины совпадает со временем предшествующей эволюции пятна t_c .

Плотность потока низкочастотных фононов, испускаемых пятном, сильно зависит от частоты фононов ω . Для фононов предельно низких частот ($\omega \rightarrow 0$), которые рождаются в области ядра, сигнал определяется температурой ядра T_c и, следовательно, монотонно уменьшается со временем вместе с T_c . Фононы с промежуточными частотами $l_d(\omega, T^*) \ll r_0$ рождаются в «атмосфере» пятна, и их плотность потока определяется температурой «края пятна» T^* . Следовательно, плотность потока таких фононов меняется со временем немонотонно.

Таким образом, мы обсудили взаимодействие фононов с мягкими локальными колебаниями в стекле. Мы показали, что это взаимодействие приводит к картине фоновое горячее пятно, качественно похожей на соответствующую картину в кристаллических системах. В стеклах [25] условия для наблюдения горячего пятна являются даже более предпочтительными из-за меньшей подвижности фононов в стекле и высокой эффективности процессов их неупругого рассеяния. В результате неравенство (84) выполняется даже для не слишком высоких мощностей нагрева, или, иными словами, для относительно небольших температур T_c . В частности, для SiO_2 мы получим при $T \approx W \approx 4\text{ K}$ (SiO_2) значение $l_d \approx 10^{-2}\text{ cm}$, что дает возможность получить горячее пятно с $r_0 \approx 10^{-2}\text{ cm}$ при T_c больше или порядка 4 К.

Известно, что многие свойства аморфных систем не имеют аналога в кристаллах. Одним из таких свойств является наличие в аморфном материале большого количества мягких двухъямных потенциалов, которые ответственны за различные эффекты долговременной релаксации [6]. В частности, они ответственны за так называемый heat release. Энергия, запасенная в двухъямных потенциалах, может при внезапном уменьшении температуры системы быть освобождена лишь за время, необходимое для преодоления потенциальных барьеров. Вследствие того что спектр времен релаксации двухъямных потенциалов в стекле экспоненциально широк, испускаемый поток тепла за счет этих процессов будет меняться медленно (неэкспоненциально) со временем [6]. Естественно, что подобного рода явления важны и для ситуации фоновного горячего пятна [25].

Двухъямные потенциалы с относительно высокими барьерами $V_B \gg W$, которые релаксируют за счет процессов активации на последней стадии эволюции пятна (после коллапса), обладают чрезвычайно большими временами релаксации, так как на этой стадии $T \rightarrow 0$. Следовательно, эти объекты хоть и хранят некоторую часть энергии системы, но не высвобождают ее и образуют нечто вроде «мертвого ядра».

Основной же вклад в heat release вносят объекты с относительно небольшими барьерами, которые соответствуют активным при $T \approx 0$ туннельным состояниям [47]. На начальных стадиях эволюции горячего пятна температура среды достаточно высока, и времена релаксации данных объектов малы. Как следствие они находятся в тепловом равновесии с окружением до тех пор, пока температура пятна не опустится до критического значения, соответствующего переходу от активации к туннелированию [6],

$$k_B T_{cr} \approx (3/8)^{4/3} W [\ln(t/\tau_0)]^{1/3}. \quad (91)$$

Здесь τ_0 — частота попыток ($\approx 10^{-13}$ s). Энергия $k_B T_{cr}$ оказывается порядка W , т.е. наиболее низкой температуры, достаточной для существования горячего пятна. Наибольший возможный объем ($r < r_{HR}$) со средней температурой $\approx T_{cr}$ достигается во время коллапса горячего пятна. Его можно грубо оценить из соображений сохранения энергии

$$C(k_B T \approx W) W \frac{2}{3} \pi r_{HR}^3 \approx \pi Q_0 r_0^2. \quad (92)$$

Соответственно высвобождаемый поток тепла на расстоянии $r \gg r_{HR}$ можно оценить как

$$I_{HR} \approx \frac{1}{2\pi r^2} \frac{2}{3} \pi r_{HR}^3 \sum_i \frac{E}{\tau} (T = T_{cr}) \exp(-t/\tau), \quad (93)$$

где произведено суммирование по всем двухъямным потенциалам в единице объема, n_0 — равновесное число заполнения на верхнем уровне. Заменяя суммирование интегрированием по E и τ и пренебрегая логарифмическими членами, имеем [6,47]:

$$I_{HR} \approx \frac{1}{3} \frac{r_{HR}^3}{r^2} \frac{\dot{P}}{t} (k_B T_{cr})^2 \propto Q_0. \quad (94)$$

Эффективная температура медленно релаксирующих возбуждений не зависит от начальных условий. Несмотря на это, наблюдаемый поток тепла зависит от энергии начального теплового импульса Q_0 за счет соответствующей зависимости эффективного объема τ_{HR}^3 (ср. с [47]).

В заключение данного подраздела мы отметим интересную возможность получения «фотографии» «мертвого ядра». Дело в том, что медленно релаксирующие возбуждения в стекле обладают электрическим дипольным моментом. Если во время эволюции горячего пятна приложить к системе внешнее электрическое поле, числа заполнения возбуждений изменятся [6,48]. Поскольку за время t лишь объекты с $\tau \leq t$ будут переориентированы, мы можем оценить объемную поляризацию стекла к моменту времени, когда система достигнет температуры T ,

$$\hat{M}_{\text{elect}}(x) \approx \sum_{\tau_i < t} \mu_i (\mu_i \mathcal{E}_{\text{elect}}) \frac{\partial n_i}{\partial E} \approx 4\hat{\mu}^2 \mathcal{E}_{\text{elect}} \hat{P} \left(\frac{k_B T}{W} \right)^{1/4} (\ln(t/\tau_0))^{1/4}. \quad (95)$$

Здесь μ есть эффективный дипольный момент, $\mathcal{E}_{\text{elect}}$ — электрическое поле. Профиль температуры изменяется со временем. Однако, согласно (95), замороженный дипольный момент гораздо более чувствителен к температуре среды, чем ко времени, за которое эта температура будет достигнута. Поэтому профиль локальной поляризации будет отражать профиль максимальной температуры, которая задается параметрическим соотношением

$$T = T_c(t), \quad x = x_c(t). \quad (96)$$

Соответствующий профиль поляризации $M_{\text{elect}}(x)$ будет «заморожен» в образце и может наблюдаться.

2.6. Замечания относительно возможной роли поверхности

В приведенном выше анализе мы пренебрегали всеми возможными поверхностными эффектами (включая и акустическое рассогласование). Однако хорошо известно, что не только акустическое рассогласование (возможная роль которого обсуждалась, например, Киндером и Берберихом [49]), но также и качество поверхности [50] может сильно влиять на результаты экспериментов с неравновесными фононами.

Даже в кристаллических образцах поверхность может заметно влиять на фононный транспорт, предоставляя дополнительный механизм неупругого фононного рассеяния, что было обнаружено во многих экспериментах (см. [34–38]). Эффективность этих неупругих процессов оказалась весьма высокой, достигающей в некоторых случаях значений порядка единицы. Как впервые указал Левинсон [51], такое неупругое рассеяние может быть связано с аморфизованностью приповерхностного слоя образца и с наличием в нем ДУС, которые и предоставляют канал для сильного ангармонического фононного рассеяния. С другой стороны, Киндер [52,53] показал, что, предполагая наличие

ДУС у поверхности, можно в принципе объяснить феномен «сопротивления Капицы». Он также продемонстрировал экспериментально [40], что аномальное сопротивление Капицы имеет место лишь для поверхностей, обладающих известной степенью беспорядка. Тот факт, что оба эффекта (неупругое рассеяние фононов на поверхности и аномальное сопротивление Капицы) могут быть описаны в рамках одного и того же механизма, кажется нам весьма привлекательным.

Для того чтобы оценить вероятность неупругого рассеяния фонона U на поверхностных дефектах, мы, следуя [25] и действуя по аналогии с Киндером [52], используем «золотое правило Ферми». В результате получаем

$$U \approx \frac{\pi}{\hbar \rho s^3} |\mathcal{U}|^2 N(E) E, \quad (97)$$

где $N(E)$ — поверхностная плотность локализованных состояний, а \mathcal{U} — эффективный матричный элемент, описывающий рассеяние (в случае взаимодействия с МО здесь необходимо использовать (26), для взаимодействия с ДУС выражение имеет практически тот же вид, что и (26) (ср. с [21]), а для взаимодействия с «трехуровневыми системами» ($E \approx W$) см. (35)). Мы видим, что вероятность U зависит от фоновой энергии E за счет соответствующей зависимости \mathcal{U} и N , и вообще говоря, меньше, чем вероятность упругого рассеяния на тех же самых объектах (ответственных за аномалию Капицы [52]). Однако, как мы уже обсуждали ранее, по крайней мере для фононных энергий $\hbar\omega \approx W$ указанные вероятности оказываются величинами одного порядка (см. (35)). Следовательно, для того чтобы оценить минимальное значение $N(E)$, необходимое для объяснения экспериментально наблюдаемых значений U (к примеру, $U \approx 0.1$), мы положим $\mathcal{U} \approx 1 \text{ eV}$ (как для резонансного процесса), $E \approx W \approx 5 \text{ K}$, $\rho \approx 3 \text{ g/cm}^3$ и $s \approx 3 \cdot 10^5 \text{ cm/s}$. Тогда мы сразу же имеем $N \approx 2 \cdot 10^{27} \text{ cm}^{-2} \cdot \text{erg}^{-1}$, что в предположении эффективной толщины неупорядоченного поверхностного слоя $\approx 10^{-7} \text{ cm}$ приводит нас к значению соответствующей объемной плотности локализованных состояний порядка $p(E) \approx 2 \cdot 10^{34} \text{ cm}^{-3} \cdot \text{erg}^{-1}$. Данное значение, как минимум, в 20 раз больше типичного значения плотности состояний в объемных аморфных материалах.

Необходимо иметь в виду, однако, что плотность локализованных состояний в стекле контролируется особенностью в распределении $P(\eta)$ [18,19] ($P \propto |\eta|$ при малых $|\eta|$), так называемой «птичкой». Ввиду того что структура поверхностного слоя существенно отличается от структуры объема, мы можем предположить отсутствие птички для поверхностных состояний. Как нетрудно показать [25], отсутствие птички может увеличить плотность локализованных мягких колебательных состояний на два порядка величины. Таким образом, мы заключаем, что существующие экспериментальные данные по неупругому рассеянию фононов на поверхности, а также по аномальному сопротивлению Капицы хорошо согласуются с идеей об отсутствии птички в плотности локализованных состояний в неупорядоченных приповерхностных слоях.

2.7. Замечания относительно возможной роли конверсии мод

Другая проблема, требующая обсуждения, связана с конверсией мод в процессе диффузии фононов. Впервые на важную роль процессов конверсии мод для некоторых ситуаций в кристаллах указали Гусейнов и Левинсон [54]. Мы до сих пор пренебрегали различием между ветвями фононного спектра. Однако, как было недавно продемонстрировано в работе Шерга и др. [27], кинетика продольных (L) и поперечных (T) фононов в стекле может быть существенно различной (мы благодарны проф. Киндеру за привлечение нашего внимания к данному обстоятельству). В частности, средняя длина пробега продольных фононов оказывается гораздо большей, чем поперечных. Эта разница может быть связана как с различием в скоростях звука L - и T -фононов, так и с большей амплитудой рассеяния поперечных фононов. Нетрудно усмотреть [25], что в такой ситуации процессы конверсии мод могут заметно повлиять на фононную кинетику. Связанную парциальную диффузию L - и T -фононов в отсутствие неупругого рассеяния мы будем описывать следующими уравнениями:

$$D^L \Delta f_L - \frac{f_L}{\tau_{L \rightarrow T}} + Q_L = 0, \quad (98)$$

$$D^T \Delta f_T - \frac{f_T}{\tau_{T \rightarrow L}} + Q_T = 0. \quad (99)$$

Здесь D^L и D^T — коэффициенты диффузии соответствующих мод, $\tau_{L \rightarrow T}$ и $\tau_{T \rightarrow L}$ — характерные времена жизни по отношению к соответствующим процессам конверсии мод, а Q_L и Q_T — источники, обусловленные этой конверсией. Согласно принципу детального равновесия, имеем

$$Q_L = \frac{f_T}{\tau_{T \rightarrow L}} \frac{\nu_T}{\nu_L}, \quad Q_T = \frac{f_L}{\tau_{L \rightarrow T}} \frac{\nu_L}{\nu_T}, \quad (100)$$

где $\nu_{L(T)}$ — плотность состояний соответствующей фононной ветви на анализируемой частоте.

В нашей модели мы предполагаем [25], что конверсия мод происходит главным образом путем поглощения фонона локализованным мягким состоянием и последующего распада последнего, сопровождающегося испусканием фонона другой ветви. Отношение вероятностей распада МО с испусканием фонона соответствующей ветви имеет вид (см. (24))

$$\frac{1/\tau_{1,T}}{1/\tau_{1,L}} = \left(\frac{\Lambda_T}{\Lambda_L} \right)^2 \left(\frac{s_L}{s_T} \right)^5 \equiv \beta \gg 1. \quad (101)$$

Следовательно, мы получаем $\tau_{L \rightarrow T} \approx \tau_e^L$, тогда как $\tau_{T \rightarrow L} = \tau_e^T \beta$. Решение уравнений (98), (99) зависит от отношения $l_e^L/l_d^{T \rightarrow L} \approx (s_T/s_L)^{1/2} (\Lambda_L/\Lambda_T)$, где $l_d^{T \rightarrow L} = \sqrt{D_e^T \tau_{T \rightarrow L}}$ — диффузионная длина пробега поперечных фононов относительно перехода в продольные.

Если указанное отношение мало, перенос энергии в системе осуществляется в основном за счет поперечных фононов. В обратном случае мы получаем следующие оценки для чисел заполнения фононов, прошедших через пленку толщины L :

$$f_{\text{out}}^L \approx \frac{l_e^L}{L} f_i^L + \frac{l_e^T}{l_d^{T \rightarrow L}} \frac{l_e^L}{L} \frac{\nu_T}{\nu_L} f_i^T \approx \frac{l_e^L}{L} \left[f_i^L + \frac{\Lambda_L}{\Lambda_T} \left(\frac{s_L}{s_T} \right)^{1/2} f_i^T \right], \quad (102)$$

$$f_{\text{out}}^T \approx \frac{l_e^T}{L} f_i^T + \frac{l_d^{T \rightarrow L}}{L} \frac{\nu_L}{\nu_T} f_i^L \approx \frac{l_e^T}{L} \left[f_i^T + \frac{\Lambda_T}{\Lambda_L} \left(\frac{s_T}{s_L} \right)^{1/2} f_i^L \right], \quad (103)$$

где $f_i^{L(T)}$ — числа заполнения фононов соответствующих ветвей в исходном фононном потоке. Видно, что для продольных фононов эффективный коэффициент прохождения через пленку лишь слегка изменяется за счет процессов конверсии мод. В то же время соответствующий коэффициент для поперечных фононов увеличивается по сравнению с простой диффузией. Заметим, что коэффициент увеличения $[\approx (\Lambda_T/\Lambda_L)(s_T/s_L)^{1/2} \gg 1]$ не зависит от частоты.

Физическая картина, очевидно, усложняется при наличии процессов неупругого рассеяния фононов. Мы не будем обсуждать ее в подробностях, а отметим лишь следующее. Если диффузионная длина пробега поперечных фононов по отношению к неупругим процессам l_d^T меньше диффузионной длины по отношению к процессам конверсии мод $l_d^{T \rightarrow L}$, т.е. если

$$\frac{l_d^T}{l_d^{T \rightarrow L}} = \sqrt{\frac{\tau_{\text{in}}^T}{\tau_e^T}} \beta^{-1/2} < 1, \quad (104)$$

процессы конверсии мод, испытываемые продольными фононами в каждом акте рассеяния ($\tau_{L \rightarrow T} \approx \tau_e^L$), приводят к появлению нового «непрямого» канала для неупругих процессов, причем эффективность «неупругого» рассеяния фононов в этом случае равна эффективности упругого [25]. Данное обстоятельство позволяет объяснить полностью неупругий характер рассеяния продольных фононов в аморфных пленках, которое наблюдалось в [27].

2.8. Сравнение с экспериментом

В настоящем разделе мы попытаемся сравнить предсказания обсуждавшихся выше теоретических представлений с имеющимися экспериментальными данными.

Во-первых, поведение $D \propto \omega^{-4}$, впервые предсказанное в рамках модели МАП в работе Бухенау и др. [19], оказывается весьма близким к наблюдаемому на эксперименте [5, 19, 27].

Далее, обсуждаемая модель [25] дает по меньшей мере качественное объяснение сильному неупругому рассеянию фононов в стекле, наблюдавшемуся, например, в работах [30–32]. Особо нам хотелось бы отметить важную роль процессов слияния фононов, учет которых, в

частности, позволяет объяснить неожиданный кроссовер к более слабой зависимости от частоты коэффициента прохождения фононов при высоких частотах, обнаруженный в [27]. К сожалению, большинство экспериментов не дает никаких количественных оценок эффективности процессов неупругого рассеяния фононов. Исключением является работа Шерга и др., где была сделана попытка выделить значения неупругих длин пробега. Однако относительно узкий диапазон исследованных частот, неучет процессов конверсии фононных мод между ветвями спектра (что кажется важным для данного эксперимента), а также неопределенность в реальных граничных условиях задачи препятствуют детальному сравнению теории [25] с полученными Шергом и др. результатами. Наконец, мы считаем, что именно процессы конверсии мод ответственны за полностью неупругий характер рассеяния продольных фононов в аморфных пленках, которое наблюдалось [27].

Приведенный выше теоретический анализ [25] дает простое объяснение поведению типа T^5 для эффективного коэффициента диффузии, обнаруженному в экспериментах со слабыми тепловыми импульсами [28].

Сильное неупругое рассеяние фононов на поверхности кристаллических образцов [34–38], которое мы связываем с аморфизацией приповерхностного слоя, остается не до конца решенной проблемой. Однако мы показали [25], что величину наблюдаемого эффекта можно объяснить, предполагая отсутствие птички в плотности локализованных колебательных состояний (контролирующей величину этой плотности в объемном материале) в приповерхностном слое образца.

Таким образом, полученные результаты оказываются, как минимум, в качественном согласии с существующими экспериментальными данными.

3. Кинетика неравновесных фононов в легированных компенсированных полупроводниках (ЛКП)

3.1. Магнетотеплопроводность и возможности фононной спектроскопии в ЛКП

Как мы уже указывали (см. подраздел 1.4), низкотемпературные свойства легированных полупроводников в значительной мере обусловлены наличием в них ЭДУС, образованных близкорасположенными свободными и занятыми примесными центрами. В частности, как было экспериментально и теоретически продемонстрировано (см. [55,56]), такие системы вносят существенный вклад в поглощение звука. Интересной особенностью этого вклада является специфическая зависимость от магнитного поля, обусловленная соответствующим влиянием его на волновые функции локализованных на этих центрах электронов [56]. Наличие такой зависимости позволяет экспериментально выделить указанный вклад как на фоне вклада зонных электронов, так и на фоне неэлектронных механизмов поглощения звука. В работе [57] было продемонстрировано, что существование ЭДУС должно сказываться и на распространении неравновесных фононов. Было показано, что при этом весьма существенна пространственная дисперсия фононов, поскольку, с одной стороны, для низкочастотных фо-

нонов с длиной волны, много большей характерного плеча пары, поглощение аналогично резонансному поглощению звука увеличивается с ростом частоты, тогда как для фононов с длиной волны, много меньшей размера волновых функций электронов на центрах, матричный элемент взаимодействия резко уменьшается с уменьшением длины волны. Благодаря этому обстоятельству резонансное поглощение фононов оказывается частотно-селективным [57]. С другой стороны, как и для поглощения звука, данный механизм поглощения фононов должен обнаруживать зависимость от приложенного магнитного поля. Такая зависимость должна, в частности, приводить к зависимости фононой теплопроводности соответствующих образцов от магнитного поля (фононная магнетотеплопроводность). Она может приводить также к влиянию магнитного поля на прохождение фононных импульсов через образец. Можно ожидать, что последнее обстоятельство позволит выделить указанный вклад на фоне обычных механизмов фононного рассеяния (рэлеевское рассеяние на дефектах) даже в случае сравнительно малых концентраций ЭДУС. Заметим [57], что в силу спектральной чувствительности обсуждаемого механизма поглощения (точнее, рассеяния, так как после акта резонансного поглощения следует переизлучение) соответствующие эксперименты позволили бы выделить вклад фононов определенных частот.

Еще одно важное обстоятельство состоит в том [57], что резонансное поглощение как фононов, так и фотонов чувствительно к числам заполнения ЭДУС (см., например, [58]). С другой стороны, наличие неравновесных фононов данной частоты должно приводить к изменению чисел заполнения резонансно взаимодействующих с ними ЭДУС, которые определяются фононной функцией распределения. Такое изменение может быть зафиксировано по изменению поглощения электромагнитного излучения соответствующей частоты. Последний фактор дает возможность «детектирования» спектра неравновесных фононов с помощью электромагнитных методов. В свою очередь возможна и обратная постановка эксперимента, когда внешнее электромагнитное поле вызывает изменение чисел заполнения ЭДУС, что приводит к изменению прозрачности образца для фононов с той же, что и поле, частотой; это также дает возможность создать спектрально чувствительный фононный детектор на базе обычных болометров.

3.2. Взаимодействие акустических фононов произвольной частоты с электронными двухуровневыми системами

Рассмотрим резонансное поглощение фононов ЭДУС в легированных полупроводниках с учетом пространственной дисперсии фононов. Мы будем в основном следовать оригинальной работе [57]. Для гамильтониана ЭДУС, взаимодействующей с фононами, очевидно, можно записать выражение (ср. [59])

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (105)$$

где

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} \phi_1 & -I \\ -I & \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (106)$$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D_{nm} \int \psi^* u_{nm} \psi d^3 r (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}), \quad (107)$$

где ϕ_1, ϕ_2 — одноузельные энергии, $I(\mathbf{R})$ — энергетический интеграл перекрытия (в отсутствие магнитного поля $I(\mathbf{R}) = I_0 \exp(-R/a)$, a — боровский радиус), D_{nm}, u_{nm} — соответствующие компоненты тензоров деформационного потенциала и деформации (далее тензорные значки опускаются), ψ — волновая функция электрона на центре (центры считаются одинаковыми), q — волновой вектор фонона, \mathbf{R} — плечо пары. Здесь мы рассматриваем деформационный механизм взаимодействия фононов с ЭДУС; обобщение на случай пьезовзаимодействия не представляет труда.

После стандартной процедуры диагонализации гамильтониана \mathcal{H}_0 получаем для недиагонального вклада в \mathcal{H}_{int} , ответственного за резонансные переходы, следующее выражение:

$$\mathcal{H}'_{\text{int}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{D} \mathcal{A} (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}}) \frac{\Lambda}{E},$$

$$E = [(\phi_1 - \phi_2)^2 + \Lambda^2]^{1/2}, \quad \Lambda = 2I(\mathbf{R}),$$

$$\mathcal{D} = D \left(\frac{\hbar}{2\rho V} \right)^{1/2} \frac{q}{\omega_q^{1/2}}, \quad \mathcal{A} = \int \psi^* e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}} \psi d^3 r. \quad (108)$$

Действуя аналогично работе [60], пользуясь «золотым правилом» Ферми, получаем следующее выражение для коэффициента поглощения фононов:

$$\Gamma = \sum_i \frac{2\pi}{\hbar} \left| \mathcal{H}'_{\text{int}}(i) \right|^2 V \delta(\hbar\omega - E_i) Z_i^{-1} \exp\left(\frac{-E_{1i}^- - \mu}{T}\right) \text{th}\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right), \quad (109)$$

где

$$Z_i = 1 + \exp\left(-\frac{E_{1i}^- - \mu}{T}\right) + \exp\left(-\frac{E_{1i}^+ - \mu}{T}\right) + \exp\left(-\frac{E_{2i} - \mu}{T}\right).$$

Суммирование ведется по всем парам, V — нормировочный объем. Заметим, что множитель $\text{th}(\hbar\omega/T)$ описывает разность заселенностей уровней в резонансных парах в предположении равновесного распределения чисел заполнения. В предположении $\hbar\omega \gg T$ из (109) можно получить выражение

$$\Gamma = \frac{32\pi^2 \mathcal{D}^2 V}{\hbar} \mathcal{A}^2 J, \quad (110)$$

где

$$J = \int dR \int d\phi \int \frac{dn}{4\pi} R (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}})^2 \frac{I^2(\mathbf{R})}{(\hbar\omega)^2} F(\phi, R) \delta(\hbar\omega - E),$$

а $F(\phi, R)$ — парная функция распределения ЭДУС.

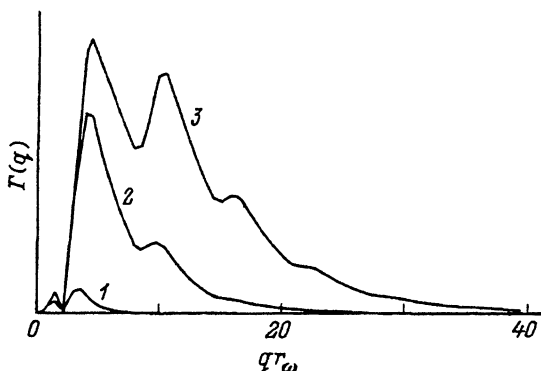


Рис. 5. Зависимость коэффициента поглощения фононов от волнового вектора. Параметр r_ω/a : 1 — 2, 2 — 6, 3 — 10.

Видно, что при $q \rightarrow 0$, разлагая $\mathcal{H}'_{\text{int}}$ по степеням q и удерживая низшие члены, можно получить известное выражение для коэффициента поглощения звука, при этом он ведет себя с ростом частоты как $q^3 \text{th}(\hbar\omega/T)$. Появление такой сравнительно высокой степени q связано с тем обстоятельством, что мы рассматриваем кристаллический полупроводник, для которого деформационные потенциалы центров, образующих пару, считаются равными; взаимодействие возникает только за счет разности фаз звуковой волны на центрах.

В случае произвольных q , переходя в выражении (109) от суммирования по парам к интегрированию по одноузельным энергиям ϕ_1, ϕ_2 и плечу пары \mathbf{R} и далее интегрируя по направлениям \mathbf{R} , можно получить следующее выражение

$$\Gamma = \frac{\pi^2 D^2 \varepsilon a}{v \rho e^2} A^2 q r_\omega \left| 1 - 2 \frac{\sin(qr_\omega)}{qr_\omega} + \frac{\sin(2qr_\omega)}{2qr_\omega} \right| N_D^{4/3} K f(K), \quad (111)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, N_D — концентрация доноров, K — степень компенсации; $f(K)$ — функция, характеризующая плотность электронных состояний (см. [61]), которая при $K \ll 1$ ведет себя как $0.26K^{1/4}$, а при $(1-K) \ll 1$ как $(1-K)^{1/3}$; r_ω определяется условием $2I(r_\omega) = \hbar\omega$,

$$A = \int \phi^* e^{iq\mathbf{R}} \phi d^3r = \frac{1}{[1 + (qa/2)^2]^2}.$$

Видно, что в области высоких частот Γ быстро убывает как $1/q^7 \text{th}(\hbar\omega/T)$. Зависимость коэффициента поглощения от частоты, полученная в результате численного расчета, представлена на рис. 5.

Таким образом, поглощение фононов носит частотно-селективный характер, т.е. наиболее эффективно поглощаются фононы с q , лежащими в интервале от $1/r_\omega$ до $1/a$, тогда как в низко- и высокочастотных областях происходит быстрый спад поглощения [57].

3.3. Поглощение фононов двухуровневыми системами при наличии магнитного поля

Обсудим, как модифицируется выражение для коэффициента поглощения фононов в присутствии магнитного поля [57]. В такой ситуации волновые функции электронов, как известно, имеют вид

а) слабые поля ($H \ll H_0$ при $a \ll \rho \ll \lambda^2/a$):

$$\psi_H(r, \rho) = K_1 \exp\left(-\frac{r}{a} - \frac{\rho^2 r a}{24\lambda^4}\right), \quad (112)$$

б) сильные поля ($H \gg H_0$):

$$\psi_H(r, \rho) = K_2 \exp\left(-\frac{\rho^2}{4\lambda^2} - \frac{|z|}{a_H}\right). \quad (113)$$

Здесь $\lambda \equiv (c\hbar/eH)^{1/2}$ — магнитная длина, H_0 определяется из условия $\lambda(H_0) = a$, K_1 и K_2 — нормировочные множители, $a_H \equiv \hbar/(2mE_H)^{1/2}$, E_H — энергия связи электрона на доноре в магнитном поле ($E_H \propto H^{1/3}$).

Влияние магнитного поля на поглощение может быть связано с двумя факторами [57]. Первый из них — изменение интеграла перекрытия. Соответствующий эффект был рассмотрен Гальпериным и др. [56] применительно к задаче о поглощении звука. Другой фактор, существенный при больших q , — изменение деформационного взаимодействия фонона с центром (описываемое параметром A) за счет изменения в магнитном поле пространственных масштабов волновых функций электронов на центрах. Обсудим это влияние по отдельности для случаев слабых и сильных магнитных полей.

а) Слабые поля ($H \ll H_0$). Учитывая как поправки к параметру одноцентрового взаимодействия A , так и к величине J [57], получаем

$$\frac{\Gamma(H) - \Gamma(0)}{\Gamma(0)} \sim C \left(\frac{q}{\lambda}\right)^4.$$

Здесь константа $C \sim 1$ и зависит как от соотношения между q и $1/\tau_\omega$, так и от ориентации вектора \mathbf{q} относительно вектора \mathbf{H} . Отметим, что в случае $q\tau_\omega \gg 1$ основной вклад вносит поправка, связанная с изменением интеграла перекрытия.

б) Сильные поля ($H \gg H_0$). Напишем выражения для коэффициента поглощения фононов в сильном магнитном поле, используя работу [57].

1. Случай $q\tau_\omega \ll 1$. При $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ имеем

$$\frac{\Gamma(H)}{\Gamma(0)} = 3 \left(\frac{a_H}{a}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 \frac{1}{\mathcal{L}}, \quad \mathcal{L} \sim \frac{\tau_\omega}{a}, \quad (114)$$

при $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$ имеем

$$\frac{\Gamma(H)}{\Gamma(0)} = 6 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^4 \frac{1}{\mathcal{L}^2} \ln\left(\frac{a_H}{\lambda} \mathcal{L}\right). \quad (115)$$

2. Случай $qr_\omega \gg 1$. При $\mathbf{q} \perp \mathbf{H}$ можно выделить две подобласти: $q\lambda \ll 1$ и $q\lambda \gg 1$. Пусть $q\lambda \ll 1$. Тогда

$$\frac{\Gamma(H)}{\Gamma(0)} = \left[1 + \left(\frac{qa}{2} \right)^2 \right]^4 C \left(\frac{a_H}{r_\omega} \right) \left(\frac{a_H}{a} \right). \quad (116)$$

Пусть $q\lambda \gg 1$. Тогда

$$\frac{\Gamma(H)}{\Gamma(0)} = \frac{[1 + (qa/2)^2]^4}{\exp[(q\lambda)^2]} C \left(\frac{a_H}{r_\omega} \right) \left(\frac{a_H}{a} \right). \quad (117)$$

При $\mathbf{q} \parallel \mathbf{H}$ имеем

$$\frac{\Gamma(H)}{\Gamma(0)} = \frac{[1 + (qa/2)^2]^4}{[1 + (qa_H/2)^2]^2} C \left(\frac{a_H}{r_\omega} \right) \left(\frac{a_H}{a} \right). \quad (118)$$

3.4. Взаимное влияние неравновесности чисел заполнения фононов и электронных двухуровневых систем

Ранее мы предполагали числа заполнения ЭДУС равновесными. Обсудим теперь ситуацию [57], когда указанные числа заполнения не являются равновесными за счет взаимодействия с рассматриваемыми импульсами неравновесных фононов либо с каким-нибудь другим внешним воздействием (например, СВЧ-сигналом).

В предположении, что ЭДУС взаимодействуют в основном с фононами, запишем кинетическое уравнение для функции распределения чисел заполнения (f^s) ЭДУС

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3q |\mathcal{H}'_{\text{int}}|^2 [(1 - f^s)n_q - f^s(n_q + 1)] \delta(E^s - \hbar\omega),$$

где n_q — фононная функция распределения, или

$$\frac{\partial f^s}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [n_\omega - f^s(1 + 2n_\omega)], \quad (119)$$

где n_ω — усредненная по углам функция распределения неравновесных фононов,

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{1}{\hbar^2 v} \left(\frac{E^s}{\hbar v} \right)^2 |\mathcal{H}'_{\text{int}}|^2 V$$

— обратное время релаксации.

В низшем приближении по взаимодействию с ЭДУС (т.е. фактически в пренебрежении перепоглощением фононов ЭДУС) функцию распределения неравновесных фононов можно считать заданной. В таком случае, как видно из (119), при достаточно большой длительности фононного импульса $t_0 \gg \tau$ числа заполнения ЭДУС контролируются фононной функцией распределения

$$f^s = \frac{n_\omega}{1 + 2n_\omega}. \quad (120)$$

Если ввести парциальную температуру T_ω фононов с частотой ω так, что $n_\omega = N_0(\hbar\omega, T_\omega)$ (N_0 — планковская функция распределения), то, как легко видеть, равенство (120) означает «подстройку» эффективной температуры ЭДУС с $E^s = \hbar\omega$ к соответствующей парциальной температуре фононов.

Таким образом, в исходном выражении (109) считать температуру T равной температуре термостата можно, вообще говоря, лишь в ситуации $t_0 \ll \tau$. В противном случае в (109) должна входить температура T_ω , вообще говоря зависящая от частоты. С другой стороны, возможность пренебречь в последующих выражениях фактором $\text{th}(\hbar\omega/T_\omega)$ требует выполнения условия $\hbar\omega/T_\omega \gg 1$, т.е. относительной малости чисел заполнения неравновесных фононов. В противном случае этот фактор необходимо включить в полученное нами выражение для коэффициента поглощения фононов, в результате чего вклад ЭДУС в коэффициент поглощения оказывается зависящим от чисел заполнения неравновесных фононов и убывает как n_ω^{-1} (нелинейное просветление образца).

Обсудим теперь возможное влияние СВЧ-поля на поглощение фононов. Как известно, электромагнитная накачка достаточно большой интенсивности приводит к выравниванию заселенностей уровней ЭДУС. Такое выравнивание существенно [59], если

$$\frac{(e r_\omega \mathcal{E})^2 \tau_1 \tau_2}{\hbar^2} \geq 1, \quad (121)$$

где \mathcal{E} — напряжение электрического поля, а τ_1 и τ_2 — соответственно времена релаксации диагональной и недиагональной компонент матрицы плотности ЭДУС (в нашем случае при $t_0 \gg \tau$ и $n_\omega > 1$ имеем $\tau_1 \approx \tau n_\omega^{-1}$). Из аналогии с электромагнитным и акустическим поглощением легко понять, что при $P \gg P_0$ (P — интенсивность электромагнитного излучения, а P_0 — пороговое значение, соответствующее началу выполнения условия (121)) коэффициент поглощения фононов с частотами, близкими к частоте электромагнитного возбуждения, пропорционален P_0/P . Полоса фононных частот, для которой выполняется такое поведение, определяется оценкой [58]

$$\delta E \sim \frac{\hbar}{\tau_2} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1/2}. \quad (122)$$

3.5. Возможные экспериментальные следствия

Обсудим возможные экспериментальные следствия из полученных выше результатов. Прежде всего отметим, что вклад ЭДУС в поглощение (рассеяние) неравновесных фононов в полупроводнике может быть достаточно велик. Так, для полупроводника с параметрами GaAs ($\epsilon = 12$, $m^* = 0.06m_0$, $E_B = 5.7 \text{ meV}$, $a = 100 \text{ \AA}$, $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$) характерное значение Γ для актуальных фононных частот $\Gamma \sim 10^8 \text{ s}^{-1}$, что соответствует длинам свободного пробега порядка $3 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$. Нетрудно усмотреть, что данный механизм преобладает над рэлеевским рассеянием на легирующих примесях и может даже конкурировать с изотопическим рэлеевским рассеянием.

Как было показано [57], Γ имеет выраженную частотную зависимость с абсолютным максимумом при $qT_\omega \approx 4$; тогда как в области высоких частот наблюдается быстрый спад по закону $\Gamma \propto \omega^{-7}$.

Возможность экспериментального наблюдения рассмотренного механизма поглощения существенно облегчается зависимостью поглощения от магнитного поля. В слабых магнитных полях ($H \ll H_0$) магнитное поле не изменяет частотной зависимости поглощения, однако приводит к появлению квадратичных по полю поправок. Благодаря этому обстоятельству включение магнитного поля может привести к изменению сигнала фоновой детектора, которое может быть зафиксировано, даже если распространение фононов в основном определяется иными механизмами рассеяния.

Заметим, что магнитное поле может таким образом сказываться и на обычной фоновой теплопроводности полупроводников в квазиравновесных условиях (магнетотеплопроводность).

Интересно, что сильные магнитные поля ($H \gg H_0$) могут приводить к изменению частотной зависимости поглощения (в соответствии с (116)–(118)), в частности сдвигая частоту среза поглощения в область более высоких частот.

Что касается оценки H_0 , то для материала с типичными параметрами, приведенными выше, $H_0 \sim 10$ Т (что затрудняет наблюдение режима $H \gg H_0$). Однако для более узкозонных материалов H_0 существенно меньше (например, для InSb $H_0 = 5$ кОе).

Использование электромагнитного воздействия на образец, как нам представляется, раскрывает новые возможности фоновой спектроскопии. Как мы показали, спектр чисел заполнения ЭДУС воспроизводит при определенных условиях спектр чисел заполнения неравновесных фононов. С другой стороны, вклад ЭДУС в поглощение γ слабого ($P \ll P_0$) СВЧ-излучения будет определяться соответствующими числами заполнения ($\gamma \sim \text{th}(\hbar\omega/T_\omega)$, где T_ω — введенная выше парциальная температура) ЭДУС. Поэтому изучение изменения спектра поглощения СВЧ при воздействии фоновой импульса позволяет проанализировать спектральный состав этого импульса.

В свою очередь сильная СВЧ-накачка ($P \gg P_0$), выравнивая заселенность ЭДУС в соответствующей спектральной полосе (122), приводит к уменьшению вклада ЭДУС в коэффициент поглощения фононов соответствующих частот, что также позволяет производить спектральный анализ фоновой импульса с использованием обычных болометров.

Подчеркнем, что выполненный анализ предполагает равномерное распределение ЭДУС по энергиям в актуальной для нас области спектра, что практически означает требование малости фоновой энергии с шириной примесной зоны.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку (проект № 95-02-04109-а), а также ISF (грант № R3R300). А.М.Р. благодарен Центру фундаментальной физики в Москве за предоставленную стипендию.

Список литературы

- [1] Zeller R.C., Pohl R.O. Phys. Rev. **В 4**, 2029 (1971).
- [2] Hunklinger S., Arnold W. In: Physical Acoustics / Ed. W.P. Mason and R.N. Thurston. Academic. N.Y. (1-76). V. **12**. P. 155.
- [3] Hunklinger S., Rauchdadhuri A.K. In: Progress in Low Temperature Physics / Ed. D.F. Brewer Elsevier. Amsterdam (1986). V. **9**. P. 267.
- [4] Phillips W.A. Rep. Progr. Phys. **50**, 1657 (1987).
- [5] Dietsche W., Kinder H. Phys. Rev. Lett. **43**, 1413 (1979).
- [6] Galperin Yu.M., Karpov V.G., Kozub V.I. Adv. Phys. **38**, 669 (1989).
- [7] Pollak M., Geballe T.H. Phys. Rev. **122**, 1742 (1961).
- [8] Scholten A.J., Akimov A.V., Dijkhuis J.I. Phys. Rev. **В 47**, 13910 (1993).
- [9] Anderson P.W., Halperin B.I., Varma C.M. Phil. Mag. **25**, 1 (1972).
- [10] Phillips W.A. J. Low Temp. Phys. **7**, 351 (1972).
- [11] Freeman J.J., Anderson A.C. Phys. Rev. **В 34**, 5684 (1986).
- [12] Jones D.P., Phillips W.A. Phys. Rev. **В 27**, 3891 (1983).
- [13] Walton D. Solid State Commun. **14**, 335 (1974).
- [14] Graebner J.E., Golding B., Allen L.C. Phys. Rev. **В 34**, 5696 (1986).
- [15] Orbach R., Science **231**, 814 (1986).
- [16] Карпов В.Г., Клиндер М.И., Игнатъев Ф.Н. ЖЭТФ **84**, 760 (1983).
- [17] Карпов В.Г., Паршин Д.А. ЖЭТФ **88**, 2212 (1985).
- [18] Ильин М.А., Карпов В.Г., Паршин Д.А. ЖЭТФ **92**, 291 (1987).
- [19] Buchenau U., Galperin Yu.M., Gurevich V.L., Parshin D.A., Ramos M.A., Schober H.R. Phys. Rev. **В 46**, 2798 (1992).
- [20] Parshin D.A. Phys. Rev. **В 49**, 9400 (1994).
- [21] Gurevich V.L., Parshin D.A. Solid State Commun. **43**, 271 (1982).
- [22] Galperin Yu.M., Gurevich V.L., Kozub V.I. Europhys. Lett. **10**, 753 (1989).
- [23] Kozub V.I., Rudin A.M. Phys. Rev. **В 47**, 13737 (1993).
- [24] Kozub V.I., Rudin A.M. Europhys. Lett. **25**, 687 (1994).
- [25] Kozub V.I., Rudin A.M., Schober H. Phys. Rev. **В 50**, 6032 (1994).
- [26] Dietsche W., Kinder H. In: Phonon scattering in condensed matter. Plenum (1980). P. 37-40.
- [27] Scherg G.P., Gartner R., Berberich P., Kinder H. Proc. of the 7th Int. Conf. «Phonon Scattering in Cond. Matter». Springer (1993). P. 266-268.
- [28] Иванов С.Н., Козорезов А.Г., Таранов А.Б., Хазанов Е.Н. ЖЭТФ **102**, 600 (1992).
- [29] Wybourne M.N., Wigmore J.K. Rep. Progr. Phys. **51**, 923 (1988).
- [30] Алексеев А.С., Бонч-Осмоловский М.М., Галкина Т.И., Левинсон И.В., Уткин-Эдин Д.Р. Письма в ЖЭТФ **37**, 490 (1983).
- [31] Galkina T.I., Blinov A.Yu., Bonch-Osmolovskii M.M., Koblinger O., Lassmann K., Eisenmenger W. Phys. Stat. Sol. (b) **144**, K87 (1987).
- [32] Mebert J., Maile B., Eisenmenger W. Phonons-89 / Ed. S. Hunklinger, W. Ludwig, G. Weiss. World Scientific, Singapore (1989). V. **1**. P. 495-498.
- [33] Акимов А.В., Каплянский А.А., Москаленко Е.С. ЖЭТФ **100**, 1340 (1991).
- [34] Wigmore J.K. J. Appl. Phys. **41**, 1996 (1970).
- [35] Trumpp H.J., Eisenmenger W.Z. Phys. **В 28**, 159 (1977).
- [36] Ghallis L.G., Ghazi A.A., Wybourne M.N. J. de Physique, **42**, C6-229 (1981).
- [37] Challis L.J., Kenmuir S.V.J., Heraud A.P. In: Phonon Scatt. in Cond. Matter 5. Springer (1986). P. 180-182.
- [38] Basun S.A., Feofilov S.P., Kaplyanskii A.A., Yen W.M. Phys. Rev. Lett. **67**, 3110 (1991).
- [39] See e.g. Proc. of the 7th Int. Conf. «Phonon Scattering in Cond. Matter». Springer (1993).
- [40] Bacco H.C., Dietsche W., Kinder H. J. Low Temp. Phys. **65**, 247 (1986).
- [41] Nonequilibrium Phonons in nonmetallic crystals / Ed. W. Eisenmenger and A.A. Kaplyanskii. North-Holland (1986).
- [42] Kazakovtsev D.V., Levinson I.B. Phys. Stat. Sol (b) **96**, 117 (1979).
- [43] Levinson I.B. Solid State Commun. **36**, 73 (1980).
- [44] Казаковцев Д.В., Левинсон И.Б. ЖЭТФ **88**, 2228 (1985).

- [45] Козуб В.И. *ЖЭТФ* **94**, 186 (1988).
- [46] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. М. (1986).
- [47] Parshin D.A., Sahling S. *Phys. Rev.* **B 47**, 5677 (1993).
- [48] Козуб В.И. *ЖЭТФ* **86**, 2239 (1984).
- [49] Kinder H., Berberich P. (частное сообщение).
- [50] Zinov'ev N.N., Kozub V.I., Kovalev D.I., Yaroshetskii I.D. In: *Phonons-89 (Heidelberg, 1989)*. World Scientific (1990). P. 1278–1280.
- [51] Левинсон И.Б. *Письма в ЖЭТФ* **37**, 157 (1983).
- [52] Kinder H. *Physica* **B 107**, 549 (1981).
- [53] Schubert H., Linderer P., Kinder H. *Phys. Rev.* **B 26**, 2317 (1982).
- [54] Guseinov N.M., Levinson I.B. *Solid State Commun.* **45**, 371 (1983).
- [55] Tokumoto H., Mansfield R. *Jap. J. Appl. Phys.* **22**, 196 (1983).
- [56] Гальперин Ю.М., Приев Э.Я. *ФТТ* **28**, 3, 692 (1986).
- [57] Козуб В.И., Рудин А.М. *ЖЭТФ* **101**, 1072 (1992).
- [58] Паршин Д.А., Рзаев Э.А. *Письма в ЖЭТФ* **45**, 344 (1987).
- [59] Гальперин Ю.М., Гуревич В.Л., Паршин Д.А. *ЖЭТФ* **85**, 1757 (1983).
- [60] Нгуен Ван Лиен, Шкловский Б.И., Эфрос А.Л. *ФТП* **13**, 2192 (1979).
- [61] Efros A.L.; Schklovskii B.I. In: *Electron-electron Interactions in Disordered Systems* / Ed. A.L. Efros and M. Pollak. North Holland. Amsterdam (1985). P. 201–281.