

ВАРИАЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ С ВИХРЯМИ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

© Д.В.Дмитриев, В.Я.Кривнов, В.Н.Лизачев, А.А.Овчинников

Институт химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук,
117977 Москва, Россия
(Поступила в Редакцию 13 февраля 1995 г.
В окончательной редакции 9 мая 1995 г.)

С помощью вариационного метода Монте-Карло исследовано основное состояние антиферромагнитной модели Гейзенберга с $s = 1/2$ на квадратной решетке. В качестве вариационной использована функция, являющаяся Гутцвиллеровским проектором, действующим на волновую функцию системы невзаимодействующих электронов в магнитном поле. Рассмотрены функции, соответствующие как однородному магнитному полю, так и полю, создающему равные по величине, но противоположные по знаку вихри (магнитные потоки) через соседние элементарные ячейки решетки. Рассмотрена также модификация указанной волновой функции, соответствующая введению корреляционного фактора Маршалла-Кастелейна. Вычисленная энергия основного состояния и подрешеточная намагниченность сравниваются с результатами, полученными другими приближенными методами.

Исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга является одной из центральных задач в теории квантовых спиновых систем. Особый интерес в последние годы вызывает двумерная модель Гейзенберга (2D HAF), поскольку она описывает магнитные свойства высокотемпературных сверхпроводников в отсутствие допирования. Однако точное решение этой модели известно лишь в одномерном случае. Для двумерной модели даже природа основного состояния до сих пор полностью не ясна. В частности, не решен окончательно вопрос о существовании дальнего порядка.

Для исследования квантовых спиновых систем использовались различные приближенные методы, такие как теория возмущений [1-3], спин-волновое приближение [4,5], экстраполяция результатов точной диагонализации конечных кластеров [6,7], ренормгрупповое приближение [8,9], квантовый метод Монте-Карло [10-13] и другие. Эти различные методы дают, как правило, близкие значения для энергии основного состояния. В то же время поведение спиновых корреляционных функций, определяющих дальний порядок, различается довольно сильно в различных приближениях.

Одним из наиболее мощных методов исследования свойств основного состояния квантовых спиновых систем являются вариационные вол-

новые функции. К настоящему времени для изучения 2D HAF предложено много типов различных вариационных волновых функций [14-22]. Некоторые из них дают дальний порядок, тогда как другие приводят к его отсутствию. В последние годы широко используются вариационные волновые функции типа RVB, предложенные Андерсоном [14]. RVB-волновая функция в общей формулировке является суперпозицией всех возможных конфигураций синглетных пар. Частным случаем RVB-функций является вариационная волновая функция Гутцвиллера, имеющая вид

$$\Psi = P\Psi_0, \quad (1)$$

где P — проектор на состояние с одним электроном на центр, и Ψ_0 — волновая функция системы невзаимодействующих электронов. В 1D-случае [22,23] такая вариационная волновая функция дает энергию основного состояния, отличающуюся всего на 0.2% от точной, и, кроме того, она воспроизводит правильное поведение корреляционных функций на больших расстояниях. Однако в 2D-случае вариационная волновая функция (1) дает энергию основного состояния на 16% выше наилучших точных оценок и не имеет дальнего порядка [21,22].

В данной работе мы рассматриваем модифицированную гутцвиллеровскую функцию с Ψ_0 , соответствующей основному состоянию системы невзаимодействующих электронов в магнитном поле с отличным от нуля магнитным потоком через элементарную ячейку (flux-phase state). Оказывается, что такая вариационная волновая функция значительно понижает энергию основного состояния системы, но по-прежнему не имеет дальнего порядка. Далее мы обобщим указанную волновую функцию, вводя фактор, учитывающий локальные корреляции спинов. Модифицированная таким образом волновая функция уже дает дальний порядок, и эффективный спин подрешетки оказывается равным $S_{\text{eff}} = 0.355(5)$.

Следует отметить, что аналитическое вычисление средних значений энергии и других физических величин с волновой функцией (1) невозможно. Более того, невозможен также и численный расчет указанных средних для достаточно больших систем. Поэтому соответствующие вычисления проводились с использованием стандартного вариационного метода Монте-Карло (VMC-метод). Были рассчитаны системы, содержащие до 400 центров (решетки размером 20×20), и произведена экстраполяция результатов вычислений при $N \rightarrow \infty$. Полученная оценка энергии основного состояния $e = -0.652J$ находится в очень хорошем соответствии с результатами, полученными другими методами.

1. Вариационная волновая функция

Гамильтониан гейзенберговского антиферромагнетика с $s = 1/2$ имеет вид

$$H = J \sum_{\langle n,m \rangle} (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_m), \quad (2)$$

где \mathbf{S}_m — оператор спина $1/2$ на центре m ; сумма берется по всем ближайшим соседям. В фермиевском представлении гамильтониан (2)

имеет вид

$$H = P \left[\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (c_{i\uparrow}^{\dagger} c_{i\downarrow} c_{j\downarrow}^{\dagger} c_{j\uparrow} + \text{h.c.}) + \frac{J}{4} \sum_{\langle i,j \rangle} (n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow})(n_{j\uparrow} - n_{j\downarrow}) \right] P, \quad (3)$$

где $c_{i\sigma}^{\dagger}$ — Ферми-оператор, $n_{i\sigma} = c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma}$ — оператор числа частиц со спином σ , $\sum_{i,\sigma} c_{i\sigma}^{\dagger} c_{i\sigma} = N$ (N — число центров), оператор

$$P = \prod_i (1 - n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}) \quad (4)$$

является проектором на состояния с одним электроном на центр.

Вариационная волновая функция Гутцвиллера для гамильтониана (3) имеет вид

$$\Psi = P \Psi_0 (n_1, \dots, n_{N/2}; m_1, \dots, m_{N/2}) c_{n_1\uparrow}^{\dagger} \dots c_{n_{N/2}\uparrow}^{\dagger} \cdot c_{m_1\downarrow}^{\dagger} \dots c_{m_{N/2}\downarrow}^{\dagger}, \quad (5)$$

где Ψ_0 — волновая функция основного состояния N невзаимодействующих электронов на плоской решетке ($N/2$ спинов вверх и $N/2$ спинов вниз).

Как упоминалось выше, такая вариационная волновая функция является плохим приближением для 2D-модели Гейзенберга. Однако возможны и другие варианты выбора Ψ_0 . Например, в качестве Ψ_0 в [17] выбиралась волновая функция основного состояния, соответствующая волне спиновой плотности. Такая вариационная волновая функция дает более низкую энергию основного состояния и приводит к наличию дальнего порядка.

Мы рассмотрим другой вариант выбора Ψ_0 , а именно выберем ее как волновую функцию основного состояния невзаимодействующих электронов на плоской решетке в магнитном поле. Другими словами, Ψ_0 является волновой функцией основного состояния гамильтониана

$$\tilde{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle, \sigma} t_{ij} a_{i\sigma}^{\dagger} a_{j\sigma}, \quad (6)$$

где i и j — ближайшие соседи, а прыжковый интеграл

$$t_{nm} = \exp(i\varphi_{nm}), \quad \varphi_{nm} = \int \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (7)$$

\mathbf{A} — соответствующий вектор-потенциал.

Энергия основного состояния гамильтониана (3) при таком выборе вариационной волновой функции будет зависеть от величин магнитных потоков Φ через элементарные ячейки решетки (квадратов)

$$\exp(i\Phi) = \prod_{\text{plaquette}} \exp(i\varphi_{mn}). \quad (8)$$

Мы рассмотрим два возможных выбора этих потоков: однородный, когда потоки через все элементарные ячейки одинаковы, и чередующийся, когда потоки через соседние ячейки одинаковы по величине, но противоположны по знаку.

2. Однородный случай

Рассмотрим сначала однородный случай, когда потоки через все элементарные ячейки решетки одинаковы [24] (Ψ_0 в этом случае является волновой функцией основного состояния невзаимодействующих электронов в однородном магнитном поле). Зависимость энергии основного состояния на спин гейзенберговского антиферромагнетика (3) для решеток 4×4 и 5×4 от величины Φ показана на рис. 1. Из рис. 1 видно, что энергия имеет минимум при $\Phi = \pi$. Вычисления, проведенные на решетках другого размера, подтверждают этот результат. Интересно заметить, что энергия основного состояния гамильтониана (6) (с одним электроном на центр) минимизируется тем же выбором потока $\Phi = \pi$ [25, 26].

Как уже было указано выше, прямое вычисление средних величин операторов с помощью вариационной волновой функции (5) для больших систем с числом центров $N > 20$ невозможно при данном выборе потоков, и для их вычисления использовался вариационный метод Монте-Карло [17, 22, 23]. Исследовались системы до 224 центров (решетки размером 14×16). Монте-карловский (МК) расчет включал $2 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^6$ испытаний на спин. Для вычисления энергии необходимо вычислить среднее значение только диагонального члена гамильтониана (3), так как вариационная волновая функция (5) обладает полной вращательной симметрией. Все вычисления, приводимые в этом разделе, производились для $\Phi = \pi$.

Энергия основного состояния на центр, полученная в результате этих вычислений, равна $e = -0.625J$, в то время как энергия, вычисленная при $\Phi = 0$ с помощью вариационной волновой функции (5), совпадающей с (1), равна $e = -0.550J$ [22]. Наилучшие вариационные оценки, полученные в различных приближениях, находятся в пределах от $-0.640J$ до $-0.660J$ (см. таблицу).

Для 2D-модели Гейзенберга наиболее интересен вопрос о существовании дальнего порядка в основном состоянии. Дальний порядок существует, если эффективный спин подрешеток S_{eff}

$$S_{\text{eff}} = \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_i \varepsilon_i S_i^z \right)^2 \right\rangle^{1/2}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ соответствует подрешеткам A и B , отличен от нуля. Как следует из рис. 2, $S_{\text{eff}} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, и, следовательно, волновая

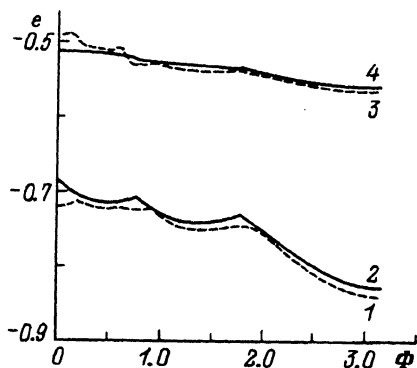


Рис. 1. Зависимость энергии основного состояния гамильтониана (6) (1, 2) и 2D-модели Гейзенберга (3, 4) от величины потока Φ (однородный случай). 1, 3 — для решетки 5×4 , 2, 4 — для решетки 4×4 .

Результаты различных аппроксимационных методов для антиферромагнитной модели Гейзенберга ($s = 1/2$) на двумерных решетках

Метод	$-E/NJ$	S_{eff}
Теория возмущений	[1]	0.668(2)
	[2]	0.6675
	[3]	0.6693(1)
Спин-волновое приближение	[4]	0.66
	[5]	0.645
Точная диагонализация	[6]	0.650(5)
	[18]	0.651(1)
	[7]	0.672(1)
Квантовый метод Монте-Карло	[10]	0.670(2)
	[11]	0.6692(1)
	[12]	0.6696(8)
	[13]	0.6690(2)
Вариационный метод	[27]	0.6442
	[16]	0.645
	[17]	0.642(2)
	[18]	0.644(2)
	[19]	0.66374(2)
	[20]	0.6691(3)
Наст. раб.	(1)*	0.635(1)
Наст. раб.	(2)**	0.652(1)

* Однородный выбор потоков.

** Чередующиеся потоки.

функция (5) гутцвиллеровского типа при $\Phi = \pi$ не дает дальнего порядка.

Следуя работам Кастелейна и Маршалла [15,28], модифицируем вариационную волновую функцию (5), вводя корреляционный множитель, уменьшающий вес конфигураций с энергетически невыгодной параллельной ориентацией соседних спинов,

$$\Psi' = \exp\left(\alpha \sum_{\langle m,n \rangle} S_m^z S_n^z\right) \Psi, \quad (10)$$

где Ψ определяется уравнением (5). Конечно, введение такого корреляционного фактора нарушает вращательную симметрию вариационной

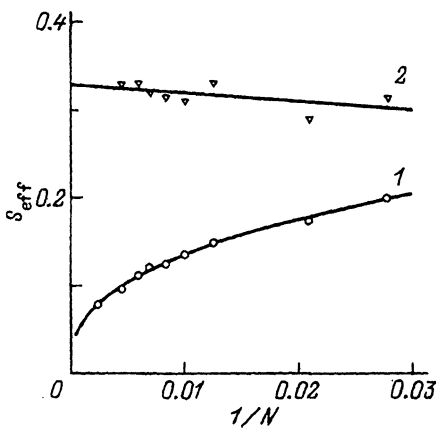


Рис. 2. Зависимость S_{eff} от N для однородных потоков.
 α : 1 — 0, 2 — α_{min} .

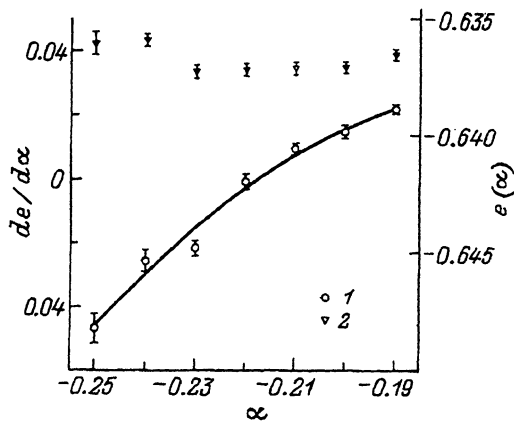


Рис. 3. Зависимость $de/d\alpha$ (1) и энергии e (2) от α для решетки 10×8 при $\Phi = \pi$.

волновой функции, что несколько усложняет вычисления (теперь необходимо вычислять средние значения обоих членов гамильтониана (3)).

Прямая минимизация энергии по вариационному параметру α с использованием МК-вычислений затруднительна из-за больших статистических флуктуаций. Поэтому мы вычислили производную $de/d\alpha$

$$\frac{de}{d\alpha} = \frac{1}{N} \langle H^z H + H H^z \rangle - 2e \langle H^z \rangle, \quad (11)$$

где H и H^z — гамильтониан (3) и его диагональный (второй) член соответственно.

Пример зависимости $de/d\alpha$ от α для $N = 80$ (10×8) в окрестности $de/d\alpha = 0$ показан на рис. 3. Естественно, что величина α_{min} , соответствующая минимуму энергии e ($de/d\alpha = 0$), зависит от N . Вычисленные значения α_{min} хорошо описываются зависимостью $\alpha_{\text{min}}(N) = \alpha_{\text{min}}(\infty) + b/N$ с $\alpha_{\text{min}}(\infty) = -0.253$. Экстраполированная в соответствии с зависимостью $\sim N^{-3/2}$ энергия основного состояния, получаемая при $\alpha = \alpha_{\text{min}}$, равна $e = -0.635J$, т. е. приблизительно на 1% ниже, чем при $\alpha = 0$. Хотя введение корреляционного фактора понизило энергию незначительно, поведение спиновых корреляционных функций принципиально изменилось. Как видно из рис. 2, при $N \rightarrow \infty$ и $\alpha = \alpha_{\text{min}}$ величина S_{eff} конечна и равна $S_{\text{eff}} = 0.328$. Таблица дает сравнение величин S_{eff} для различных приближений.

Интересно сравнить вариационную волновую функцию (10) с вариационной волновой функцией Кастелейна–Маршалла [15, 27, 28] и ее модификацией, сделанной Хоршем и Ван дер Линденом [18]. Такая вариационная волновая функция соответствует $\Psi_0 = \text{const}$ в (10). Наша функция Ψ_0 , напротив, зависит от спиновой конфигурации, и для некоторых из них обращается в нуль. На первый взгляд количество подобных конфигураций влияет на качество пробной волновой функции, так как в соответствии с известной теоремой [15] в точной волновой

функции амплитуды всех конфигураций отличны от нуля. Однако оказывается, что волновая функция Ψ_0 при $\Phi = \pi$ и $N = 16$ (4×4) равна нулю для 4104 конфигураций из 12870, в то время как Ψ_0 при $\Phi = 0$ равна нулю только в 20 случаях. В то же время энергия, полученная при $\Phi = \pi$, ниже, чем при $\Phi = 0$. К настоящему времени мы не нашли объяснения этому факту.

3. Чередующиеся потоки

Рассмотренный выше однородный выбор потоков с $\Phi = \pi$ не является, однако, оптимальным. Как будет показано в этом разделе, более низкую энергию основного состояния 2D-антиферромагнитной модели Гейзенберга даёт волновая функция (5) с Ψ_0 , соответствующей чередующемуся порядку потоков в гамильтониане (6) (потоки через соседние элементарные ячейки равны по величине, но противоположны по знаку).

Существует много вариантов выбора φ_{ij} в гамильтониане (6), обеспечивающих чередующийся порядок потоков через соседние элементарные ячейки, и для небольших систем энергия основного состояния гамильтониана (3) существенно зависит от этого выбора. Однако с увеличением размера рассматриваемой системы эта зависимость исчезает. Поэтому здесь мы приведем вычисления, соответствующие только одному, «шахматному», порядку расположения фаз φ_{ij} (рис. 4).

Мы рассмотрели квадратные решетки, содержащие до 400 центров (20×20). Число МК-шагов на спин выбиралось равным $10^5 - 10^6$.

Минимизация энергии основного состояния гамильтониана (3) по величине Φ приводит при экстраполяции $N \rightarrow \infty$ к энергии на спин

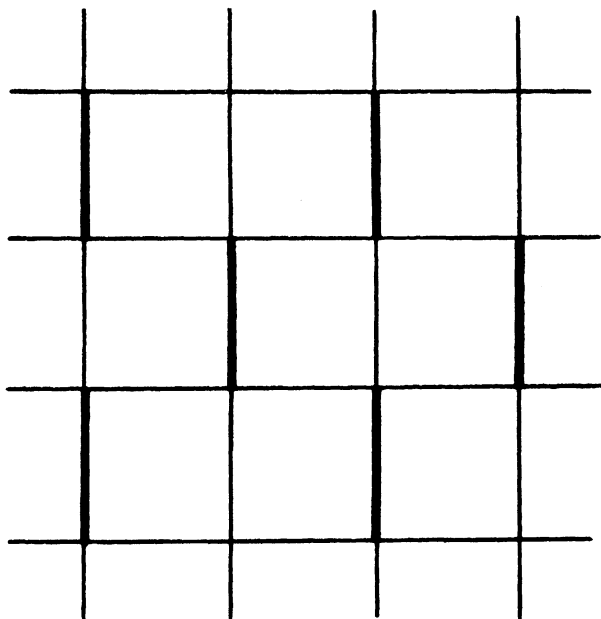


Рис. 4. Пример «шахматного» расположения фаз φ_{ij} на решетке. Жирным линиям соответствует фаза $\varphi_{ij} = \Phi$, остальным — $\varphi_{ij} = 0$.

$e = -0.638(1)J$. При этом поток Φ_{\min} , минимизирующий энергию, стремится к величине $\Phi_{\min} = 0.32\pi$. Таким образом, введение чередующихся потоков и минимизация энергии 2D HAF по их величине понижают энергию основного состояния приблизительно на $\sim 2\%$ по сравнению с однородным выбором $\Phi = \pi$ через все ячейки решетки (заметим, что случай $\Phi = \pi$ можно отнести и к однородным, и к чередующимся потокам). Однако эффективная намагниченность подрешеток S_{eff} (9), так же как и в случае с $\Phi = \pi$, исчезает при $N \rightarrow \infty$, что указывает на отсутствие в системе дальнего порядка.

Минимизация энергии по вариационному параметру α осуществлялась с помощью уравнения (11), как и в случае $\Phi = \pi$. Минимизация же энергии по параметру Φ производилась непосредственно с использованием МК-вычислений.

Величины α_{\min} и Φ_{\min} , минимизирующие энергию, зависят от размера системы N . Φ_{\min} уменьшается от 0.4π для 16 центров (4×4) до 0.2π для систем 14×14 (и больших). Величина α_{\min} при этом изменяется от -0.1 (4×4) до -0.16 (14×14). Экстраполированная зависимостью $c + d/N$ энергия основного состояния при $\alpha = \alpha_{\min}$ и $\Phi = \Phi_{\min}$ равна $e = -0.652(1)J$, что на 2.7% ниже, чем при $\alpha = 0$. Введение корреляционного множителя приводит также и к появлению в системе дальнего порядка (рис. 5). Величина эффективной намагниченности подрешеток при $N \rightarrow \infty$ равна $S_{\text{eff}} = 0.355(5)$, что несколько больше, чем для однородного выбора потоков. Как видно из таблицы, полученное значение S_{eff} значительно меньше, чем при использовании функции Ψ_0 , соответствующей волне спиновой плотности [17]. Это указывает на существенную роль квантовых флуктуаций в двумерной системе. Заметим, что полученное значение S_{eff} оказывается достаточно близким к результатам квантового метода Монте-Карло и теории возмущений [2,11].

Мы также рассмотрели антиферромагнитную модель Гейзенберга с помощью вариационной волновой функции (5) и ее модификации (10) на так называемой «лестничной» системе, представляющей собой две бесконечные одномерные цепочки с взаимодействием между ними. Такая система в последнее время интенсивно изучается [29,30] в связи с ее экспериментальной реализацией в соединениях $(\text{VO})_2\text{P}_2\text{O}_7$ и

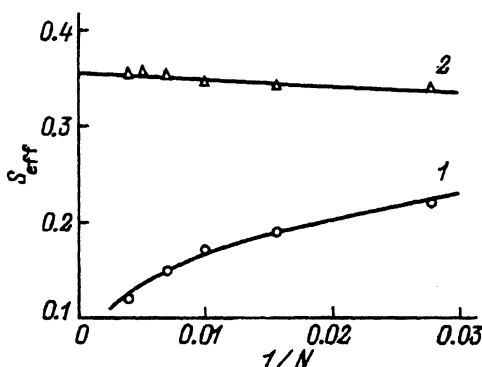


Рис. 5. Зависимость S_{eff} от N чередующихся потоков $\Phi = \Phi_{\min}$.
 α : 1 — 0, 2 — α_{\min} .

$\text{Sr}_{n-1}\text{Cu}_{n+1}\text{O}_{2n}$ [31,32]. Для такой квазиодномерной системы вариационная волновая функция (5) дает энергию основного состояния для изотропного случая $e = -0.575J$ при чередующихся потоках $|\Phi_{\min}| = 0.44\pi$, что всего на 0.5% выше наиболее точных оценок $e = -0.578J$ [29,30]. Введение корреляционного множителя в вариационную волновую функцию (10) с вариационным параметром α не приводит к понижению энергии, так как $\alpha_{\min} \sim 0$ в пределах статистических флуктуаций метода Монте-Карло. Это приводит к нулевой намагниченности подрешеток $S_{\text{eff}} = 0$ и отсутствию дальнего порядка в лестничной модели.

Таким образом, выяснено, что использование в качестве вариационной функции для гамильтониана (3) волновой функции системы невзаимодействующих электронов в магнитном поле дает хорошую оценку энергии основного состояния 2D-антиферромагнитной модели Гейзенберга. Оказывается, что эта энергия значительно ниже полученной с гутцвиллеровской функцией (1), соответствующей нулевому магнитному полю. Этот факт не является неожиданным. Если в (3) произвести преобразование фермиевских операторов согласно уравнению

$$c_{n\sigma}^+ = \tilde{c}_{n\sigma}^+ \exp(i\theta_n) \quad (12)$$

и определить средние значения билинейного оператора

$$\chi_{nm} = \sum_{\sigma} c_{n\sigma}^+ c_{m\sigma} \quad (13)$$

как

$$\langle \chi_{nm} \rangle = |\chi| \exp(i\theta_{nm}), \quad (14)$$

то фазу θ_{nm} можно рассматривать как компоненту калибровочного поля [33]. Сумма фаз, взятых по элементарной ячейке, являющаяся калибровочно инвариантной величиной, соответствует фиктивному магнитному потоку Φ через ячейку. Исследование гамильтониана (3) в приближении самосогласованного поля [34] или разложение по $1/n$ с n «флейворными» компонентами [33] показывают, что энергия фазы с $\Phi = \pi$ ниже, чем фазы с $\Phi = 0$. Таким образом, наши расчеты согласуются с результатами работ [33,34].

С другой стороны, как показывают наши расчеты, еще более низкую энергию дает вариационная функция (5) с чередующимся порядком потоков и $\Phi = 0.2\pi$. Такая фаза не была исследована в [33,34]. Как показано в нашей работе, волновая функция гутцвиллеровского типа не приводит к дальнему порядку. Однако модификация вариационной волновой функции введением корреляционного множителя приводит к заметному понижению энергии основного состояния и к появлению в системе дальнего порядка с $S_{\text{eff}} = 0.355$. Использование такой вариационной волновой функции для антиферромагнитной модели Гейзенберга на «лестничной» системе дает высокую точность в определении энергии основного состояния и приводит к отсутствию дальнего порядка. Есть основания ожидать, что предложенная вариационная волновая функция будет полезна при изучении 2D-антиферромагнитной модели Гейзенберга на фрустрированных решетках.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Международного научно-технического центра (грант 015), а также Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-03-18639) и Международного научного фонда (грант МЮ 000).

Список литературы

- [1] Huse D.A. Phys. Rev. **B37**, 2380 (1988).
- [2] Parrinello M., Arai T. Phys. Rev. **B10**, 265 (1974).
- [3] Zheng W., Oitmaa J., Hamer C.J. Phys. Rev. **B43**, 8321 (1991).
- [4] Anderson P.W. Phys. Rev. **86**, 694 (1952).
- [5] Kubo R. Phys. Rev. **87**, 568 (1952).
- [6] Oitmaa J., Bets D.D. Can. J. Phys. **56**, 897 (1978).
- [7] Tang S., Hirsch J.E. Phys. Rev. **B39**, 4548 (1993).
- [8] Mattis D.C., Pan C.J. Phys. Rev. Lett. **61**, 463 (1988).
- [9] Hirsch J.E. Phys. Rev. **B22**, 5259 (1980).
- [10] Reger J.D., Young A.P. Phys. Rev. **B37**, 5978 (1988).
- [11] Carlson J. Phys. Rev. **B40**, 846 (1989).
- [12] Liang S. Phys. Rev. **B42**, 6555 (1990).
- [13] Sauerwein R.A., de Oliveira M.J. Phys. Rev. **B49**, 5983 (1994).
- [14] Anderson P.W. Science **235**, 1196 (1987).
- [15] Marshall W. Proc. R. Soc. **A232**, 64 (1955).
- [16] Oguchi T. Phys. Rev. **117**, 117 (1960).
- [17] Yokoyama H., Shiba H. J. Phys. Soc. Jpn. **56**, 1490 (1987).
- [18] Horsch P., von der Linden W. Z. Phys. **B72**, 181 (1988).
- [19] Huse D.A., Elser V. Phys. Rev. Lett. **60**, 2531 (1988).
- [20] Bishop R.F., Hale R.G., Xian Y. Phys. Rev. Lett. **73**, 3157 (1994).
- [21] Horsch P., Kaplan T.A. Bull. Am. Phys. Soc. **30**, 513 (1985).
- [22] Gros C., Joint R., Rice T.M. Z. Phys. **B68**, 425 (1987).
- [23] Kaplan T.A., Horsch P., Fulde P. Phys. Rev. Lett. **49**, 889 (1982).
- [24] Krivnov V.Ya., Likhachev V.N., Ovchinnikov A.A. Phys. Lett. **A192**, 425 (1994).
- [25] Hasegawa Y., Lederer P., Rice T.M., Wiegmann P.B. Phys. Rev. Lett. **63**, 907 (1989).
- [26] Lieb E.H. Helv. Phys. Acta **65**, 247 (1992).
- [27] Von der Linden W., Ziegler M., Horsch P. Phys. Rev. **B40**, 7435 (1989).
- [28] Kasteleijn P.W. Physica **18**, 104 (1952).
- [29] Dagotto E., Riera J., Scalapino D.J. Phys. Rev. **B45**, 5744 (1992).
- [30] Barnes T., Dagotto E., Riera J., Swanson E.S. Phys. Rev. **B47**, 3196 (1993).
- [31] Johnston D.C., Johnson J.W., Goshorn D.P., Jacobson A.J. Phys. Rev. **B35**, 219 (1987).
- [32] Takano M., Hirori Z., Azuma M., Takeda Y. Jpn. J. Appl. Phys. **7**, 3 (1992).
- [33] Affleck I., Marston J.B. Phys. Rev. **B37**, 3774 (1988); Phys. Rev. **B39**, 11538 (1989).
- [34] Baskaran G., Zou Z., Anderson P.W. Solid State Commun. **63**, 973 (1987); Kotliar G. Phys. Rev. **B37**, 3664 (1988).