КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА И ТРЕХЧАСТИЧНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КРИТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

© *А.И.Соколов*

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет,
197376 Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 27 апреля 1995 г.)

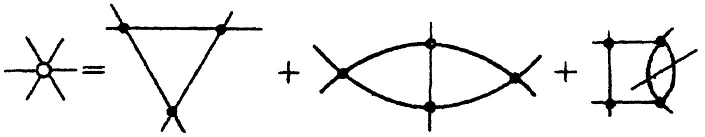
Как известно, критическая термодинамика трехмерной модели Изинга описывается евклидовой скалярной теорией поля с гамильтонианом

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\left(m_0^2 + \nabla^2\right)\phi^2 + \lambda\phi^4\right], \tag{1}$$

где $m_0^2 \sim T - T_c^{(0)}$, а $T_c^{(0)}$ — температура фазового перехода в пренебрежении флуктуациями. Учет флуктуаций приводит к перенормировкам массы $m_0^2 \to m^2$, поля $\phi \to \phi_R$ и константы связи $\lambda \to mg_4$, а также к появлению членов вида $m^{3-n}g_{2n}\phi_R^{2n}$ с $n > 2$ в эффективном действии (свободной энергии). В критической области, где флуктуации сильны настолько, что полностью экранируют исходное взаимодействие, поведение системы становится универсальным, и ренормированные безразмерные вершины g_{2n} выходят на свои критические асимптотики, т.е. принимают постоянные значения, которые также универсальны.

Недавно Цыпин [1], анализируя методом Монте-Карло статистику намагниченности трехмерной модели Изинга во внешнем поле, нашел, что в критической области $g_4 = 0.97 \pm 0.02$ и $g_6 = 2.05 \pm 0.15$. Первое из этих чисел прекрасно согласуется с результатом $g_4 = 0.988 \pm 0.002$, который дает техника теоретико-полевой ренормализационной группы в трех измерениях (суммирование многопетлевых ренормгрупповых разложений с помощью методов, основанных на преобразовании Бореля) [2-4]. Что касается второго, то аналогичная оценка для него отсутствует.

Далее мы найдем асимптотическое значение вершины g_6, характеризующей величину эффективного трехчастичного взаимодействия, в рамках перенормированной теории возмущений для пространства физической размерности. Диаграммное разложение ренормированной шестихвостки имеет вид



$+\ldots,$ (2)

где точкам отвечают ренормированные заряды $\Gamma_R(0,0,0;m) = 24mg_4$, а черта, пересекающая подграф, означает, что при вычислении соответствующей диаграммы в нем нужно сделать вычитание на нулевом передаваемом импульсе. Затравочные шистихвостки и другие высшие константы связи, присутствующие, вообще говоря, в гамильтониане модели Изинга, в (2) отсутствуют, так как порождаемые ими вклады исчезают при $m \to 0$ как m^ω, $\omega > 3$ [5].

Вычисление единственного однопетлевого графика в (2) дает $g_6 = \frac{9}{\pi}g_4^3$. Подставляя сюда $g_4 = 0.988$, получим $g_6 = 2.76$. Эта величина лишь на треть отличается от оценки Цыпина, что следует считать хорошим знаком, имея в виду очевидную грубость принятой аппроксимации.

Учтем далее вклады двухпетлевых диаграмм. Их расчет не представляет труда, и результирующее выражение для g_6 имеет вид

$$g_6 = \frac{9}{\pi}g_4^3 - \frac{27}{\pi^2}g_4^4. \tag{3}$$

Непосредственная подстановка сюда значения g_4, однако, дает обескураживающе малое число (0.156). Это не слишком удивительно, так как фактически такая подстановка лишена смысла. Действительно, теория (1) является теорией без малого параметра, и получить здесь разумные результаты можно, лишь применяя те или иные пересуммировочные процедуры (заметим в этой связи, что если ряд для β-функции модели (1) просто оборвать на двухпетлевом слагаемом, то в теории вообще исчезнет нетривиальная фиксированная точка, тогда как суммирование по Паде–Борелю не только восстанавливает эту точку, но и дает неплохую оценку для ее координаты: $g_4 = 1.11$). Естественно поэтому посмотреть, к чему приведет использование в нашем случае техники Паде–Бореля или, скажем, аппроксиманты Паде, реализующих простейшие процедуры пересуммирования. Итак, обрабатывая ряд (3) по Паде, имеем

$$g_6 \approx \frac{9}{\pi}g_4^3\left(1 + \frac{3}{\pi}g_4\right)^{-1} = 1.42. \tag{4}$$

Метод Паде–Бореля, в рамках которого для суммы ряда (3) получается выражение

$$g_6 \approx 6g_4^3 \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t}t^3}{4\pi + 3tg_4}dt, \tag{5}$$

ведет к результату $g_6 = 1.50$.

Эти оценки примерно на 30% меньше монте-карловской. Таким образом, числа, даваемые низшими приближениями метода ренормгруппы, образуют «вилку», охватывающую значение g_6, полученное в работе [1]. Поскольку обычно с ростом порядка приближения результаты ренормгрупповых расчетов быстро улучшаются в количественном отношении и выход на точные числа носит осциллирующий характер [6], не исключено, что учет трехпетлевых и более сложных графиков в (2) приведет к сближению ренормгрупповой и компьютерной оценок g_6.

Сравним далее найденные числа с теми, которые можно получить, используя ε-разложение. Как показывает анализ уравнения состояния [7], в критической области

$$\frac{g_6}{g_4^2} = 2\varepsilon - \frac{20}{27}\varepsilon^2 + 1.2759\varepsilon^3 - \ldots . \qquad (6)$$

Суммируя данный ряд по Паде–Борелю, находим, что при $\varepsilon = 1$ $g_6 g_4^{-2} = 1.69$. Использование же в этом случае простой аппроксиманты Паде типа [1/1] дает $g_6 g_4^{-2} = 1.73$. Сопоставляя эти величины с их машинным (2.18) и ренормгрупповыми (1.46, 1.54) аналогами, можно заключить, что теоретико-полевые методы склонны давать несколько меньшие значения g_6, чем полученное в [1]. Подобный вывод, однако, нельзя считать окончательным, так как предсказания ε-разложения далеко не всегда правомерны при $\varepsilon = 1$ (см., например, [8]), а в трех измерениях мы располагаем пока очень коротким рядом для g_6. Прояснить ситуацию может вычисление g_6 в следующем, трехпетлевом, приближении. Соответствующие расчеты, однако, весьма громоздки. Мы планируем провести их в ближайшем будущем.

Работа выполнена при поддержке Государственного комитета Российской Федерации по высшему образованию (грант № 94-7.17-351).

Список литературы

[1] Tsypin M.M. Phys. Rev. Lett. **73**, *15*,2015 (1994).
[2] Baker G.A., Nickel B.G., Green M.S., Meiron D.I. Phys. Rev. Lett. **36**, *23*, 1351 (1976).
[3] Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys. Rev. Lett. **39**, *2*, 95 (1977).
[4] Baker G.A., Nickel B.G., Meiron D.I. Phys. Rev. **B 17**, *3*, 1365 (1978).
[5] Соколов А.И. ЖЭТФ **77**, *4(10)*,1598 (1979).
[6] Le Guillou J.C., Zinn-Justin J. Phys. Rev. **B 21**, *9*, 3976 (1980).
[7] Zinn-Justin J. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Clarendon Press. Oxford (1989).
[8] Antonenko S.A., Sokolov A.I. Phys. Rev. **B 49**, *22*, 15901 (1994).