Консервативно-диссипативные силы взаимодействия и нагрев, обусловленные флуктуационным электромагнитным полем: две пластины при нерелятивистском относительном движении

© Г.В. Дедков, А.А. Кясов

Кабардино-Балкарский государственный университет,
Нальчик, Россия

E-mail: gv_dedkov@mail.ru

(Поступила в Редакцию 5 мая 2009 г.)

В рамках релятивистской флуктуационной электродинамики впервые вычисляются скорость теплового нагрева и консервативно-диссипативные силы в системе двух параллельных пластин, движущихся относительно друг друга с нерелятивистской скоростью. Показано, что недавно предложенная релятивистская теория флуктуационно-электромагнитных взаимодействий в данной конфигурации имеет принципиальные недостатки.

1. Введение

Притяжение, трение и теплообмен нейтральных немагнитных тел, разделенных вакуумным промежутком и движущихся относительно друг друга со скоростью V, являются хорошо известными эффектами, обусловленными электромагнитными флуктуациями. Тем не менее теоретическое описание флуктуационно-электромагнитных взаимодействий (ФЭВ) сталкивается с рядом трудностей при решении конкретных задач с заданной геометрией взаимодействующих тел и (или) с наличием тепловой или динамической неравновесности. Значительное возрастание интереса к ФЭВ отражено в ряде обзорных статей последнего времени [1–9]. К числу острых дискуссионных проблем этого рода относятся вопрос о диссипативных силах ФЭВ [2,3,6], термодинамический парадокс теории Лифшица [1,5,8], вопрос о неравновесных силах Казимира и Казимира-Полдера [10] (см. также ссылки) и т. д. Поскольку область применений теории ФЭВ простирается от атомной физики и физики элементарных частиц до астрофизики и космологии [1], ее высокая практическая значимость очевидна.

В наших недавних работах [7,9] была детально рассмотрена одна из точно решенных задач ФЭВ динамического характера в рамках геометрической конфигурации малая сферическая частица–пластина (в дальнейшем конфигурация 1, рис. 1). Именно для этого случая нам удалось найти замкнутые релятивистские выражения для консервативно-диссипативных сил ФЭВ и скорости теплообмена при различных температурах частицы и полубесконечной магнитодиэлектрической среды с плоской границей. Предполагалось также, что окружающий вакуумный фон заполнен излучением, находящимся в тепловом равновесии со средой. Исторически, однако, конфигурации 1 уделялось значительно меньше внимания, чем конфигурации двух полубесконечных сред (толстых пластин), разделенных вакуумным промежутком — классической конфигурации Казимира и Лифшица (в дальнейшем конфигурация 2, рис. 2). Отчасти это было связано с тем, что, — по крайней мере, в статическом случае, — был установлен рецепт перехода от конфигурации 2 к конфигурации 1, применявшийся при вычислении сил Казимира–Полдера [11] — приближение разреженной среды для вещества одной из пластин [12–14]. Аналогично применение предела разреженной среды и для вещества второй пластины позволяет вычислить также межатомные силы взаимодействия, обусловленные ФЭВ [12,14]. Однако дальнейшее распространение этого метода и теории Лифшица [12], на неравновесные ситуации сталкивается с трудностями (см. [15–18]), тем более что автономное релятивистское решение в конфигурации 2 (несмотря на ряд попыток [6,19–22]) еще пока не удалось получить.

Именно это побуждает нас рассматривать конфигурацию 1 как более детально изученную, а результаты, относящиеся к ней, как „эталонные“. Как следствие

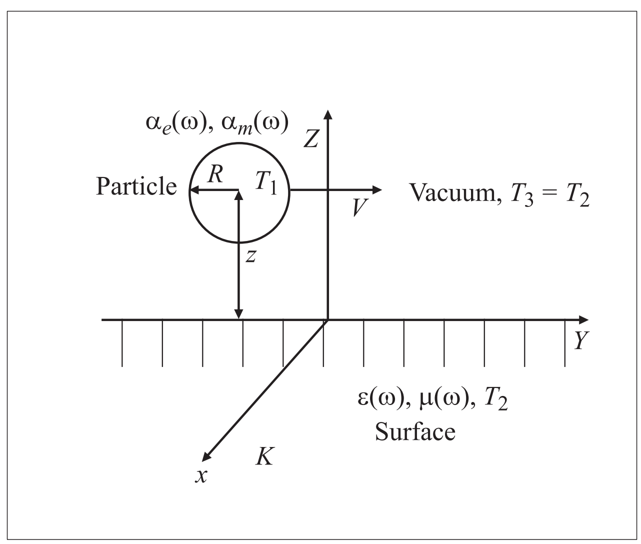

Рис. 1. Конфигурация 1. Геометрия движения сферической частицы и декартова система координат, связанная с поверхностью полубесконечной среды (система K). Декартовы оси (X', Y', Z') собственной системы покоя частицы K' не показаны.

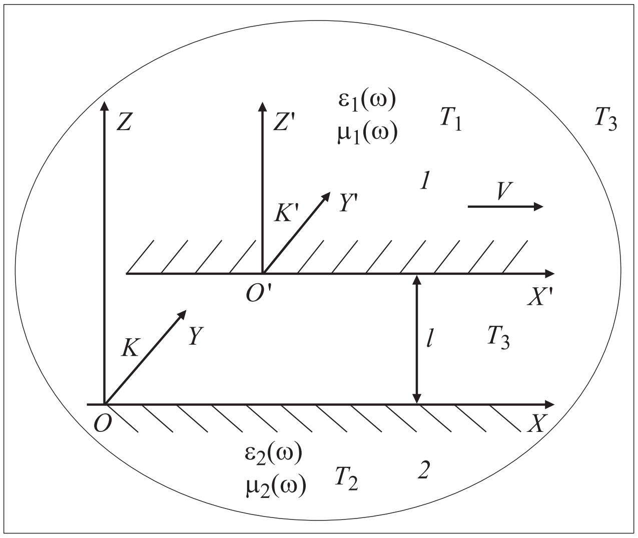

Рис. 2. Конфигурация 2, соответствующая протяженным толстым пластинам *1* и *2* с температурами T_1 и T_2 (в системе покоя каждой) соответственно. K и K' — соответствующие декартовы системы координат. Окружающий вакуумный фон в общем случае может иметь температуру T_3, отличающуюся от температур пластин.

этого, в настоящей работе мы ставим цель модификации предельного перехода к разреженной среде таким образом, чтобы от результатов, полученных в конфигурации 2, можно было перейти к точным релятивистским результатам в конфигурации 1, и наоборот. Опираясь на полученное „правило соответствия", мы впервые получили выражения для консервативно-диссипативных сил и скорости теплообмена в конфигурации 2 при относительном движении пластин с нерелятивистской скоростью (см. также [17,18,23]). В заключительной части работы проводится сравнение этих результатов с имеющимися результатами других авторов. В частности, мы обосновываем несостоятельность релятивистской теории ФЭВ, предложенной в недавних публикациях [24].

2. Конфигурация 1: общие теоретические результаты

Кратко сформулируем постановку задачи и основные результаты для конфигурации 1 (подробнее см. [7,9]). Рассматривается сферическая частица радиуса R, находящаяся на расстоянии $z \gg R$ от пластины и движущаяся со скоростью V параллельно ее поверхности (рис. 1). Предполагается, что частица имеет температуру T_1 (в собственной системе покоя), а пластина и окружающий вакуумный фон — температуру T_2. Частица характеризуется зависящими от частоты дипольными электрической $\alpha_e(\omega)$ и магнитной $\alpha_m(\omega)$ поляризуемостями, а пластина — диэлектрической $\varepsilon(\omega)$ и магнитной $\mu(\omega)$ проницаемостями. Вещественная и мнимая компонеты поляризуемостей отмечаются в формулах одним и двумя штрихами. В целом рассматриваемая система термически неравновесна, но стационарна. Основными характеристиками ФЭВ являются компоненты флуктуационно-электромагнитной силы F_x, F_z, действующей на частицу, и скорость ее теплового нагрева dQ/dt. Все указанные величины определяются в системе отсчета, связанной с покоящейся пластиной. Общее решение данной задачи в рамках релятивистской флуктуационной электродинамики приводит к следующим выражениям для F_x, F_z и dQ/dt [7,9,17]:

$$F_x = -\frac{\hbar\gamma}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_yk_x$$
$$\times\left[\alpha_e''(\gamma\omega^+)\mathrm{Im}\left(\frac{\exp(-2q_0z)}{q_0}R_e(\omega,\mathbf{k})\right)+(e\leftrightarrow m)\right]$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)-\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right]-\frac{\hbar\gamma}{\pi c^4}$$
$$\times\int\limits_0^\infty d\omega\omega^4\int\limits_{-1}^{1}dxx(1+\beta x)^2[\alpha_e''(\gamma\omega_1)+\alpha_m''(\gamma\omega_1)]$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)-\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega_1}{2k_BT_1}\right)\right],\qquad(1)$$

$$F_z = -\frac{\hbar\gamma}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y$$
$$\times\left\{\alpha_e''(\gamma\omega^+)\mathrm{Re}\left[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})\right]\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right.$$
$$+\alpha_e'(\gamma\omega^+)\mathrm{Im}\left[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})\right]$$
$$\left.\times\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)+(e\leftrightarrow m)\right\},\qquad(2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\hbar\gamma}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\omega^+$$
$$\times\left[\alpha_e''(\gamma\omega^+)\mathrm{Im}\left(\frac{\exp(-2q_0z)}{q_0}R_e(\omega,\mathbf{k})\right)+(e\leftrightarrow m)\right]$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)-\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right]+\frac{\hbar\gamma}{\pi c^3}$$
$$\times\int\limits_0^\infty d\omega\omega^4\int\limits_{-1}^{1}dx(1+\beta x)^3[\alpha_e''(\gamma\omega_1)+\alpha_m''(\gamma\omega_1)]$$
$$\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)-\coth\left(\frac{\gamma\hbar\omega_1}{2k_BT_1}\right)\right],\qquad(3)$$

$$\Delta_e(\omega) = \frac{q_0\varepsilon(\omega) - q}{q_0\varepsilon(\omega) + q}, \quad \Delta_m(\omega) = \frac{q_0\mu(\omega) - q}{q_0\mu(\omega) + q},$$

$$q = \left(k^2 - (\omega^2/c^2)\varepsilon(\omega)\mu(\omega)\right)^{1/2}, \quad q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2},$$

$$k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \beta = V/c, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2},$$

$$\omega^+ = \omega + k_x V, \quad \omega_1 = \omega(1+\beta x), \tag{4}$$

$$R_e(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_e(\omega)\Big[2(k^2 - k_x^2\beta^2)(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big] + \Delta_m(\omega)\Big[2k_y^2\beta^2(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big], \tag{5}$$

$$R_m(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_m(\omega)\Big[2(k^2 - k_x^2\beta^2)(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big] + \Delta_e(\omega)\Big[2k_y^2\beta^2(1-\omega^2/k^2c^2) + (\omega^+)^2/c^2\Big]; \tag{6}$$

слагаемые $(e \leftrightarrow m)$ определяются идентичным образом с заменой e на m.

В формулах (1) и (3) вторые интегральные слагаемые, не зависящие от расстояния z, связаны с взаимодействием с вакуумным фоном, $\hbar$, k_B и c — постоянные Планка, Больцмана и скорость света в вакууме. Нормальная к пластине сила F_z, действующая на частицу, в явном виде не содержит теплового вклада вакуумного фона, но неявным образом структура формулы (2) определяется наличием в системе термодинамического равновесия между пластиной (средой) и вакуумным фоном. При нарушении этого равновесия структура электромагнитного поля вблизи пластины изменяется, и это приводит к изменению F_z [10,16,25].

Зависящие от расстояния z интегральные слагаемые в (1)–(3) записаны таким образом, что они описывают как вклад ближних электромагнитных мод поверхности $(k > \omega/c)$, так и вклад радиационных мод $(k < \omega/c)$. Это обеспечивается преобразованием развернутых формул [7,9] с помощью соотношений [17]

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d^2k = \int\limits_{k>\omega/c} d^2k + \int\limits_{k<\omega/c} d^2k, \quad q_0 \to -i\tilde{q}_0,$$

$$q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \quad \tilde{q}_0 = (\omega^2/c^2 - k^2)^{1/2}. \tag{7}$$

Важным преимуществом постановки релятивистской задачи в рамках конфигурации 1 по сравнению с конфигурацией 2 является простота учета состояния вакуумного фона. При этом имеется только одно протяженное тело (пластина), неподвижное относительно вакуумного фона. Малая частица, движущаяся вблизи пластины, движется также и по отношению к вакуумному фону. В общем случае пластина может находиться, а может и не находиться в тепловом равновесии с фоном. В зависимости от этого структура электромагнитного поля вблизи нее определяется различным, но совершенно однозначным образом.

Для конфигурации 2, напротив, постановка релятивистской задачи должна быть более рафинированной даже при наличии в системе полного теплового равновесия ($T_1 = T_2 = T_3$, рис. 2), поскольку только одна из пластин может покоиться относительно вакуумного фона, а вторая в таком случае должна испытывать с его стороны действие тормозящей силы. Очевидно, что специфика вакуумного фона, имеющаяся в конфигурации 2, усложняет ультрарелятивистскую задачу.

3. Система параллельных пластин, движущихся относительно друг друга с нерелятивистской скоростью: незапаздывающее взаимодействие

Для простоты в этом разделе будем предполагать, что тела не обладают магнитными свойствами. Переход $2 \to 1$ от конфигурации 2 к конфигурации 1 до сих пор применялся главным образом для расчета силы Казимира–Полдера между покоящимся атомом и пластиной [13,14,26,27]. Авторы [6,24] применили аналогичную процедуру для расчета силы диссипативного трения и теплообмена малой частицы с пластиной. Обычный рецепт сводится к использованию предела разреженной среды $\varepsilon_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1\alpha_1(\omega) \to 0$ для вещества одной из пластин (первой, для определенности), где n_1 и $\varepsilon_1(\omega)$ — плотность атомов и диэлектрическая проницаемость вещества пластины, $\alpha_1(\omega)$ — соответствующая атомная поляризуемость. Обозначая конфигурации индексами $1, 2$, имеем правило вычисления силы $F_z^{(1)}(z)$, действующей на частицу (атом), находящийся на расстоянии z от пластины [10,13]

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{1}{n_1 S}\frac{dF_z^{(2)}(l)}{dl}\Big|l = z, \tag{8}$$

где $F_z^{(2)}(l)/S$ — сила Казимира–Полдера в конфигурации 2, отнесенная к площади S вакуумного контакта между пластинами, разделенными щелью с шириной l. Аналогично (8) соотношения между тангенциальными силами $F_x^{(1,2)}$ и скоростями нагрева $dQ^{(1,2)}/dt$ в конфигурациях 1 и 2 имеют вид

$$F_x^{(1)}(z) = -\frac{1}{n_1 S}\frac{dF_x^{(2)}(l)}{dl}\Big|l = z,$$

$$dQ^{(1)}(z)/dt = -\frac{1}{n_1 S}\frac{d\dot{Q}^{(2)}(l)}{dl}\Big|l = z. \tag{9}$$

Можно показать, что результаты, получаемые с помощью перехода $2 \to 1$ и наоборот, должны быть взаимно связаны при наличии некоторых дополнительных условий [17,18]. При этих условиях существует рецепт обратного перехода $1 \to 2$, позволяющий трансформировать решение (1)–(3) для случая неравновесных конфигураций 2. Применение данного „принципа соответствия“ является стержневой идеей настоящей работы.

Сначала рассмотрим более простой случай нерелятивистского движения первой пластины ($\beta = V/c \to 0$), пренебрегая эффектом запаздывания ($\omega z/c \to 0$). В этом случае формулы (1)–(3) принимают более простой вид

$$F_x^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k k_x \exp(-2kz)$$

$$\times \Delta''(\omega)\alpha_e''(\omega^+)\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right], \quad (10)$$

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz)$$

$$\times \left\{\Delta''(\omega)\alpha_e'(\omega^+)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)\right.$$

$$\left. + \Delta'(\omega)\alpha_e''(\omega^+)\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right\}, \quad (11)$$

$$\frac{dQ^{(1)}(z)}{dt} = \frac{\hbar}{\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k$$

$$\times \exp(-2kz)\Delta''(\omega)\alpha_e''(\omega^+)\omega^+$$

$$\times \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right)\right], \quad (12)$$

$$\Delta(\omega) = \Delta_e(\omega) = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1},$$

$$\Delta_m(\omega) = 0, \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}. \quad (13)$$

Формулы (10)–(12) впервые были получены в наших работах [2,3,28] при решении нерелятивистской задачи ФЭВ в конфигурации 1, а затем в [29,30] из релятивистского решения в пределе $c \to \infty$. Они определяют вклад во взаимодействие электромагнитных мод ближнего поля ($k > \omega/c$) при температуре частицы T_1 и температуре поверхности T_2. Вклад радиационных мод ($k < \omega/c$) в пределе $c \to \infty$ исчезает.

Важно отметить, что формулы (10)–(12) остаются справедливы вне зависимости от выполнения условия теплового равновесия между покоящейся пластиной и вакуумным фоном: $T_2 = T_3$ или $T_2 \neq T_3$, где T_3 — температура вакуумного фона или удаленных тел, окружающих систему. Это утверждение применимо также и к вкладам ближних мод в релятивистских формулах (1)–(3). Причина этого связана с тем, что структура ближних мод нагретой поверхности не зависит от состояния вакуумного фона [7,9,10,15,25].

Используя (11), запишем выражение для силы притяжения частицы к пластине при $V = 0$, $T_1 = T_2 = T$

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz)$$

$$\times \left\{\Delta''(\omega)\alpha_e'(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right.$$

$$\left. + \Delta'(\omega)\alpha_e''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right\}. \quad (14)$$

Сопоставляя (14) с (11), можно видеть, что переход к неравновесным динамическим и тепловым ситуациям для конфигурации 1 осуществляется с помощью преобразований

$$\Delta''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) \to \Delta''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right),$$

$$\alpha_e''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) \to \alpha_e''(\omega^+)\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right), \quad (15)$$

$$\alpha_e'(\omega), \alpha_e''(\omega) \to \alpha_e'(\omega^+), \alpha_e''(\omega^+).$$

С другой стороны, сравнение (10) и (11) показывает, что тангенциальная сила F_x получается из (14) с помощью преобразований

$$d^2kk \to d^2kk_x, \quad \Delta''(\omega) \to \Delta''(\omega), \quad \Delta'(\omega) \to \Delta''(\omega),$$

$$\alpha_e'(\omega^+) \to \alpha_e''(\omega^+), \quad \alpha_e''(\omega^+) \to -\alpha_e''(\omega^+). \quad (16)$$

Наконец, из (10) и (12) следует, что dQ/dt получается из F_x преобразованием

$$d^2kk_x \to -d^2k\omega^+. \quad (17)$$

Так как в согласии с „принципом соответствия“ формулы (10)–(12) должны следовать из аналогичных формул в конфигурации 2 при преобразовании $\varepsilon_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1\alpha_1(\omega) \to 0$, то переход от $F_z^{(2)}(l)$ к $F_x^{(2)}(l)$ и $\dot{Q}^{(2)}(l)$ должен осуществляться с помощью преобразований (15)–(17), в которых нужно сделать замену $\alpha_e(\omega) \to \Delta_1(\omega)$.

Теперь запишем известное выражение для незапаздывающей силы Ван-дер-Ваальса между параллельными пластинами при $V = 0$, $T_1 = T_2 = T$, которое целесообразно представить в виде

$$F_z^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k$$

$$\times \frac{\exp(-2kl)}{|1 - \exp(-2kl)\Delta_1(\omega)\Delta_2(\omega)|^2}$$

$$\times \Big[\Delta_1''(\omega)\Delta_2'(\omega)\coth(\hbar\omega/2k_BT)$$

$$+ \Delta_1'(\omega)\Delta_2''(\omega)\coth(\hbar\omega/2k_BT)\Big], \quad (18)$$

где $\Delta_1(\omega) = \frac{\varepsilon_1(\omega)-1}{\varepsilon_1(\omega)+1}$ и $\Delta_2(\omega) = \frac{\varepsilon_2(\omega)-1}{\varepsilon_2(\omega)+1}$, $\varepsilon_{1,2}(\omega)$ обозначают диэлектрические проницаемости пластин *1* и *2* соответственно. Выполняя в (18) преобразования

$$\Delta_2''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\to\Delta_2''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right),$$

$$\Delta_1''(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\to\Delta_1''(\omega^+)\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right),\quad(19)$$

$$\Delta_1'(\omega),\Delta_1''(\omega)\to\Delta_1'(\omega^+),\Delta_1''(\omega^+),$$

немедленно приходим к выражению для силы притяжения пластин в неравновесной конфигурации 2

$$F_z^{(2)}(l)=-\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_yk$$
$$\times\frac{\exp(-2kl)}{|1-\exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2}$$
$$\times\Big[\Delta_1''(\omega^+)\Delta_2'(\omega)\coth(\hbar\omega^+/2k_BT_1)$$
$$+\Delta_1'(\omega^+)\Delta_2''(\omega)\coth(\hbar\omega/2k_BT_2)\Big].\quad(20)$$

Аналогично (10), (11) для того, чтобы вычислить $F_x^{(2)}$, в формуле (20) нужно выполнить преобразования

$$d^2kk\to d^2kk_x,\quad\Delta_2''(\omega)\to\Delta_2''(\omega),\quad\Delta_2'(\omega)\to\Delta_2''(\omega),$$

$$\Delta_1'(\omega^+)\to\Delta_1''(\omega^+),\quad\Delta_1''(\omega^+)\to-\Delta_1''(\omega^+),$$

после чего получаем

$$F_x^{(2)}(l)=-\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_yk_x$$
$$\times\frac{\exp(-2kl)}{|1-\exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2}\Delta_1''(\omega^+)\Delta_2''(\omega)$$
$$\times\Big[\coth(\hbar\omega/2k_BT_2)-\coth(\hbar\omega^+/2k_BT_1)\Big].\quad(21)$$

Наконец, выполняя преобразование $d^2kk_x\to-d^2k\omega^+$ в (21), находим $\dot{Q}^{(2)}$

$$\dot{Q}^{(2)}(l)=\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\omega^+$$
$$\times\frac{\exp(-2kl)}{|1-\exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2}\Delta_1''(\omega^+)\Delta_2''(\omega)$$
$$\times\Big[\coth(\hbar\omega/2k_BT_2)-\coth(\hbar\omega^+/2k_BT_1)\Big].\quad(22)$$

Отметим, что скорости нагрева $\dot{Q}^{(1,2)}$ (формулы (12) и (22)) не только обусловлены различием температур пластин, но также являются результатом превращения работы латеральных сил $F_x^{(1,2)}$ в тепло. Нетрудно показать, что формулы (10)−(12) непосредственно вытекают из (20)−(22) с учетом (8), (9) в пределе разреженной среды.

При учете магнитных свойств в правых частях (20)−(22) появляются аналогичные слагаемые, имеющие такую же структуру с заменой $\Delta_{1,2}(\omega)=\frac{\varepsilon_{1,2}(\omega)-1}{\varepsilon_{1,2}(\omega)+1}$ на $\Delta_{1,2}(\omega)=\frac{\mu_{1,2}(\omega)-1}{\mu_{1,2}(\omega)+1}$.

4. Система параллельных пластин, движущихся относительно друг друга с нерелятивистской скоростью: запаздывающее взаимодействие

В этом разделе получим более общие выражения для $F_x^{(2)}(l), F_z^{(2)}(l), Q^{(2)}(l)$ с учетом эффекта запаздывания. Будем также считать, что пластины обладают произвольными магнитодиэлектрическими свойствами, однако в силу указанного в разделе 2 ограничим рассмотрение случаем теплового равновесия при температуре T (рис. 2). Тогда, выполняя в (1)–(3) подстановки $T_1=T_2=T_3=T$, $\beta=V/c\to0$, $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}\to1$, получим

$$F_x^{(1)}(z)=-\frac{\hbar}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_yk_x$$
$$\times\left\{\alpha_e''(\omega^+)\mathrm{Im}\left[\frac{\exp(-2q_0z)}{q_0}R_e(\omega,\mathbf{k})\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)-\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right]+(e\leftrightarrow m)\right\},\quad(23)$$

$$F_z^{(1)}(z)=-\frac{\hbar}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\Big\{\alpha_e''(\omega^+)$$
$$\times\mathrm{Re}\left[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})\right]\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)+\alpha_e'(\omega^+)$$
$$\left.\times\mathrm{Im}\left[\exp(-2q_0z)R_e(\omega,\mathbf{k})\right]\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right]+(e\leftrightarrow m)\Big\},\quad(24)$$

$$\frac{dQ^{(1)}(z)}{dt}=\frac{\hbar}{2\pi^2}\int\limits_0^\infty d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_x\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_y\omega^+$$
$$\times\left\{\alpha_e''(\omega)\mathrm{Im}\left[\frac{\exp(-2q_0z)}{q_0}R_e(\omega,\mathbf{k})\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)-\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right]+(e\leftrightarrow m)\right\},\quad(25)$$

$$R_e(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_{2e}(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \Delta_{2m}(\omega)\omega^2/c^2, \quad (26)$$

$$R_m(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_{2m}(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \Delta_{2e}(\omega)\omega^2/c^2; \quad (27)$$

индекс 2 в (26), (27) относится к свойствам материала второй пластины. Следует также отметить, что присутствие в (23)–(25) членов, связанных с магнитной поляризацией пластин, в дальнейшем имеет принципиальное значение.

Для учета вкладов магнитных свойств тел предел разреженной среды $\varepsilon_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1 \alpha_e(\omega) \to 0$ должен дополняться аналогичным пределом $\mu_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1 \alpha_m(\omega) \to 0$. Однако из анализа структуры подынтегральных выражений в формулах (23)–(25) вытекает, что преобразования $\Delta_e(\omega) \to 2\pi n_1 \alpha_e(\omega)$, $\Delta_m(\omega) \to 2\pi n_1 \alpha_m(\omega)$, применяющиеся в отсутствие эффекта запаздывания [17], нужно модифицировать следующим образом [16,23]:

$$\Delta_{1e}(\omega) \to \frac{\pi n_1}{q_0^2}\Big[\alpha_e(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \alpha_m(\omega)\omega^2/c^2\Big], \quad (28)$$

$$\Delta_{1m}(\omega) \to \frac{\pi n_1}{q_0^2}\Big[\alpha_m(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \alpha_e(\omega)\omega^2/c^2\Big]. \quad (29)$$

Тогда с учетом (8), (9) и (23)–(29) величины $F_x^{(2)}(l)$, $F_z^{(2)}(l)$, $Q^{(2)}(l)$ запишутся в виде

$$F_x^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x$$
$$\times \left[\frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1e}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(\exp(-2q_0 l)\Delta_{2e}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2} + \frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1m}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(\exp(-2q_0 l)\Delta_{2m}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1m}(\omega^+)\Delta_{2m}(\omega)|^2}\right]$$
$$\times \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right], \quad (30)$$

$$F_z^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y$$
$$\times \left[\left(\frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1e}(\omega^+)\mathrm{Re}\left(q_0\exp(-2q_0 l)\Delta_{2e}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2}\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right.\right.$$
$$\left. + \frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1m}(\omega^+)\mathrm{Re}\left(q_0\exp(-2q_0 l)\Delta_{2m}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1m}(\omega^+)\Delta_{2m}(\omega)|^2}\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right)$$
$$+ \left(\frac{\mathrm{Re}\,\Delta_{1e}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(q_0\exp(-2q_0 l)\Delta_{2e}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\mathrm{Re}\,\Delta_{1m}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(q_0\exp(-2q_0 l)\Delta_{2m}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1m}(\omega^+)\Delta_{2m}(\omega)|^2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right)\right)\right], \quad (31)$$

$$\dot{Q}^{(2)}(l) = \frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y \omega^+$$
$$\times \left[\frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1e}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(\exp(-2q_0 l)\Delta_{2e}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2} + \frac{\mathrm{Im}\,\Delta_{1m}(\omega^+)\mathrm{Im}\left(\exp(-2q_0 l)\Delta_{2m}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1m}(\omega^+)\Delta_{2m}(\omega)|^2}\right]$$
$$\times \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right], \quad (32)$$

$$\Delta_{ie}(\omega) = \frac{q_0\varepsilon_i(\omega) - q_i}{q_0\varepsilon(\omega) + q_i}, \ \Delta_{im}(\omega) = \frac{q_0\mu_i(\omega) - q_i}{q_0\mu_i(\omega) + q_i}, \ i = 1, 2; \quad (33)$$

$$q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2,$$
$$q_i\left(k^2 - (\omega/c)^2\varepsilon_i(\omega)\mu_i(\omega)\right)^{1/2}, \quad (34)$$

где индекс $i = 1, 2$ нумерует пластины, $\varepsilon_i(\omega)$ и $\mu_i(\omega)$ — соответствующие им диэлектрические и магнитные проницаемости материалов. В обозначениях других авторов коэффициенты $\Delta_{ie}(\omega)$ и $\Delta_{im}(\omega)$ соответствуют амплитудам отражения электромагнитных волн с P- и S-поляризацией [1,4,6,10,13,24]. При $V = 0$ формула (31) совпадает с выражением для силы Казимира–Лифшица в конфигурации 2 в вещественно-частотном представлении [10,26]. В незапаздывающем же пределе при $V > 0$ формулы (30)−(32) переходят в (20)−(22).

5. Обсуждение и сравнение с результатами других авторов

Представляет интерес сравнение формул (20)−(22) и (30)−(32) с результатами других авторов. Одной из первых успешных попыток расчета незапаздывающей диссипативной силы $F_x^{(2)}$ между идеально гладкими пластинами явилась работа Пендри [31]. Однако в ней был рассмотрен лишь простейший случай $T_1 = T_2 = 0$. Позднее в [32] Пендри получил в аналогичном приближении скорость нагрева $\dot{Q}^{(2)}$ при $V = 0$, выражение для которой оказалось в согласии с более общими расчетами [33]. Формулы (21) и (22) согласуются со всеми этими результатами. Краткий обзор более ранних работ был сделан в [2,3]. В целом можно констатировать, что ни в одной из них, включая [31,32], величины $F_x^{(2)}(l)$, $F_z^{(2)}(l)$, $\dot{Q}^{(2)}(l)$ не были представлены в замкнутой форме, подобно формулам (20)–(22) и (30)–(32).

Первые попытки [19–22] развить релятивистски подход к вычислению диссипативной силы $F_x^{(2)}$ оказались недостаточно успешны, поскольку из них следовало, что $F_x^{(2)} \to 0$ при $c \to \infty$. В дальнейшем наибольшее внимание к этой проблеме и к расчету теплообмена в конфигурации 2 было уделено в [34,6]. В частности, в своих недавних работах [24] авторы предложили релятивистскую теорию ФЭВ с учетом тепловой неравновесности. Затем, опираясь на полученные результаты и предел разреженной среды, они получили выражения для $F_x^{(1)}(z)$, $F_z^{(1)}(z)$, $\dot{Q}^{(1)}(z)$ в конфигурации 1. Наши формулы для $F_x^{(1)}(z)$, $F_z^{(1)}(z)$, $\dot{Q}^{(1)}(z)$ и $F_x^{(2)}(l)$, $F_z^{(2)}(l)$, $\dot{Q}^{(2)}(l)$ существенным образом отличаются от соответствующих результатов работы [24].

Во-первых, сравним (30) с аналогичной ей формулой (22) в [24]. Предварительно заметим, что тепловое состояние вакуумного фона авторами [24] никак не оговаривается. В запаздывающем пределе при $\beta \to 0$, $T_1 = T_2 = T$ с применением наших обозначений указанная формула записывается в виде (для удобства сравнения движущейся считается первая пластина)

$$F_x^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{16\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{k<\omega/c} d^2k \cdot k_x$$
$$\times \left[\frac{\left(1-|\Delta_{1e}(\omega^+)|^2\right)\left(1-|\Delta_{2e}(\omega)|^2\right)}{|1-\exp(2i|q_0|l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2} + (e\leftrightarrow m)\right]$$
$$\times \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right]$$
$$-\frac{\hbar S}{4\pi^3}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{k>\omega/c} d^2k \cdot k_x \exp(-2q_0 l)$$
$$\times \left[\frac{\operatorname{Im}\Delta_{1e}(\omega^+)\operatorname{Im}\left(\Delta_{2e}(\omega)\right)}{|1-\exp(-2q_0 l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)|^2} + (e\leftrightarrow m)\right]$$
$$\times \left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT}\right)\right]. \tag{35}$$

Анализ (30) и (35) показывает, что слагаемые, отвечающие за вклад ближних мод электромагнитного поля $(k > \omega/c)$, полностью согласуются друг с другом, однако слагаемые, отвечающие радиационным модам, совершенно различны. Наша формула (30) не содержит коэффициентов поглощения $\left(1-|\Delta_{1e}(\omega^+)|^2\right)$, $\left(1-|\Delta_{2e}(\omega)|^2\right)$, появляющихся при наличии радиационно-ветровых членов, связанных с различием температуры тел [10,16], поскольку конфигурация 2 предполагается термически равновесной: $T_1 = T_2 = T_3 = T$. В этом случае структура радиационных мод вблизи покоящейся (второй) пластины имеет вид осциллирующей стоячей волны [35,36], причем относительное движение принципиально не изменяет этой структуры, наблюдаемой в системе отсчета движущейся пластины. Движение первой пластины приводит к допплеровскому сдвигу частоты соответствующих материальных функций: $\Delta_{1e,1m}(\omega) \to \Delta_{1e,1m}(\omega^+)$. Таким образом, корректная формулировка проблемы в конфигурации 2 при $T_1 = T_2 = T_3 = T$ не может привести к появлению радиационно-ветровых вкладов в силах взаимодействия. Более того, если такие вклады имеются в тангенциальной силе $F_x^{(2)}$, то они должны также присутствовать и в силе Казимира–Лифшица $F_z^{(2)}$. В последнем случае это было показано в работах [10,25] при $V = 0$. Однако в [24] такие ветровые члены отсутствуют, в то время как их вклад в тангенциальной силе $F_x^{(2)}$ имеется даже в равновесных условиях (см. (35) и [34]).

Во-вторых, теория [24] приводит к неправильным температурным зависимостям сил $F_z^{(1,2)}$ при $V = 0$. В последнем случае температурные факторы разных тел входят в формулы в комбинации с материальными факторами, а не суммируются друг с другом, как это имеет место в [24]. Кроме различия температурных факторов поучительно сравнить формулу (24) с формулой (31) в [24], которая при $\beta = 0$ в наших обозначениях принимает вид

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2}\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y$$
$$\times \exp(-2q_0 z)(k^2-\omega^2/c^2)\left[\alpha_e(\omega^+)\Delta_e(\omega)\right.$$
$$\left.+\alpha_m(\omega^+)\Delta_m(\omega)\right]\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_BT_1}\right) + \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT_2}\right)\right]. \tag{36}$$

Рассмотрим для простоты случай $\alpha_m(\omega) = 0$, $V = 0$, $T_1 = T_2 = T$. Тогда (36) и (24) принимают вид

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2}\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y$$
$$\times \exp(-2q_0 z)(k^2-\omega^2/c^2)\alpha_e(\omega)\Delta_e(\omega)\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right), \tag{37}$$

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2}\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dk_y$$
$$\times \exp(-2q_0 z)\alpha_e(\omega)[\Delta_e(\omega)(2k^2-\omega^2/c^2)$$
$$+\Delta_m(\omega)\omega^2/c^2]\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right). \tag{38}$$

Как видно из (37), эта формула не содержит коэффициента отражения $\Delta_m(\omega)$, а множитель $(k^2-\omega^2/c^2)$ отличается от $(2k^2-\omega^2/c^2)$ в (38). Это противоречит теории сил Казимира–Полдера [8,10,12,13,15,26,27], поскольку формула (37) оказывается не зависящей от вклада электромагнитных мод с S-поляризацией.

В-третьих, сравним скорости теплового нагрева. Мы утверждаем, что формулы (34), (36) в работе [24] являются принципиально неверными, поскольку ошибочно содержат частотный множитель ω вместо $\omega^+ = \omega + k_xV$. Этот кажущийся незначительным недостаток имеет серьезные физические последствия. Как показано в [17], в равновесном случае $T_1 = T_2 = T$ в низшем порядке разложения по скорости и в отсутствие запаздывания суммарная скорость нагрева пластин, соответствующая [24], получается отрицательной, что противоречит второму началу термодинамики. Вдобавок к этому, в работах [6,24] факторы, аналогичные нашим $R_{e,m}(\omega, \mathbf{k})$ в (26), (27), также содержат ошибку, постоянно повторяющуюся в других работах этих авторов, начиная с [34]. Между тем именно такой вид $R_{e,m}(\omega, \mathbf{k})$, как в (26), (27), соответствует формулам для $\dot{Q}^{(1)}$ [3,28,37] и $\mathrm{F}_z^{(1)}$ [10,13,14] (при $V = 0$), а также выражению для спектральной плотности энергии флуктуационного электромагнитного поля вблизи нагретой плоской поверхности [35,36].

Наконец, касаясь релятивистских формул (22), (28) и (36) в [24], относящихся к конфигурации 1, отметим, что в них имеется весьма необычная интерференция вкладов электромагнитных волн с S- и P-поляризацией, обусловленная релятивистским эффектом, что в корне противоречит формулам (1)–(3). Такая же интерференция имеет место и в формулах для сил и скорости нагрева в конфигурации 2.

6. Заключение

Основываясь на точном решении релятивистской проблемы ФЭВ в конфигурации 1 (малая сферическая частица вблизи плоской поверхности) и используя „принцип соответствия" между конфигурациями 1 и 2 (две параллельные пластины в относительном движении), мы получили согласованные формулы для консервативно-диссипативных сил и скорости теплового нагрева в конфигурации 2 в рамках релятивистской флуктуационной электродинамики при относительном движении пластин с нерелятивистской скоростью. Сформулированы правила перехода от одной конфигурации к другой, позволяющие получать формулы для конфигурации 1 в пределе разреженной среды из формул для конфигурации 2 (и наоборот). Эти результаты, как и релятивистские выражения для конфигурации 1, могут рассматриваться как эталонные при построении общей релятивистской теории в конфигурации 2. Показано, что полученные нами результаты для флуктуационно-диссипативных сил и скоростей нагрева принципиально расходятся с теорией Волокитина и Перссона [6,24,34]. Мы полагаем, что даже сама постановка релятивистской задачи ФЭВ этими авторами является недостаточно корректной. Фактически, начиная с первых своих работ по терии ФЭВ [34], эти авторы исходили из теории Лифшица в конфигурации 2, относящейся к равновесному случаю двух покоящихся пластин, пытаясь модифицировать ее соответствующим образом. Однако, как показывает анализ, специфика задачи в конфигурации 2 в релятивистской ситуации требует более четкого определения теплового состояния вакуумного фона, что совершенно не учитывается авторами [6,24,34]. Таким образом, общая релятивистская задача ФЭВ в конфигурации 2 при $\beta \to 1$, $T_1 \neq T_2 \neq T_3$ еще ожидает своего решения.

Список литературы

[1] M. Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko. Phys. Rep. **353**, 1 (2001).
[2] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. ФТТ **44**, *10*, 1729 (2002).
[3] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. Phys. Low. Dimens. Struct. **1/2**, 1 (2003).
[4] K. Joulian, J.-P. Mulet, F. Marquier, R. Carminati, J.-J. Greffet. Surf. Sci. Rep. **57**, 59 (2005).
[5] G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. Contemp. Phys. **47**, 131 (2006).
[6] А.И. Волокитин, Б.Н.Дж. Перссон. УФН. **177**, *9*, 921 (2007); Red. Mod. Phys. **79**, 1291 (2007).
[7] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. J. Phys.: Cond. Matter **20**, 354 006 (2008).
[8] G.L. Klimchitskaya. arXiv: 0811.4398v1 [quant-ph] (2008).
[9] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. ФТТ **51**, *1*, 3 (2009).
[10] M. Antezza, L.P. Pitaevskii, S. Stringari, V.B. Svetovoy. Phys. Rev. A **77**, 022 901 (2008).
[11] H.B.G. Casimir, D. Polder. Phys. Rev. **73**, 360 (1948).
[12] Е.М. Лифшиц. ЖЭТФ **29**, *1* (7), 94 (1955).
[13] M. Antezza, L.P. Pitaevskii, S. Stringari. Phys. Rev. A **70**, 053 619 (2004).
[14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. Физматлит, М. (2002). Ч. 2. 493 с.
[15] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **34**, *22*, 1 (2008); arXiv: 0902.2461v1 (cond-mat.other] (2009).
[16] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **35**, *6*, 80 (2009); **35**, *13*, 18 (2009).
[17] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. arXiv: 0904.0124v1 (cond-mat.other] (2009).
[18] G.V. Dedkov, A.A. Kyasov. arXiv: 0904.0236v1 (cond-mat.other] (2009).
[19] L.S. Levitov. Eur. Phys. Lett. **8**, 488 (1989).
[20] В.Г. Полевой. ЖЭТФ **98**, *6*, 1990 (1990).
[21] V.E. Mkrtchian. Phys. Lett. A **207**, 299 (1995).
[22] I. Dorofeyev, H. Fuchs, B. Gotsmann, J. Jersch. Phys. Rev. B **64**, 035 403 (2001).
[23] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **35**, *20*, 89 (2009).
[24] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. Phys. Rev. B **78**, 155 437; arXiv: 0807.1004v1 (cond-mat.other] (2008).
[25] M. Antezza, L.P. Pitaevskii, S. Stringari. Phys. Rev. Lett. **95**, 113 202 (2005).
[26] V.B. Bezerra, G. Bimonte, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko, C. Romero. Eur. Phys. J. C **52**, *3*, 701 (2007).
[27] G. Bimonte, G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. arXiv: 0904.0234v1 [quant-ph] (2009).
[28] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **28**, *8*, 346 (2002).
[29] A.A. Kyasov, G.V. Dedkov. Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. B **195**, 247 (2002).
[30] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. ФТТ **45**, *10*, 1729 (2003).
[31] J.B. Pendry. J. Phys.: Cond. Matter **9**, 10 301 (1997).
[32] J.B. Pendry. J. Phys.: Cond. Matter **11**, 6621 (1999).
[33] D. Polder, M. Van Hove. Phys. Rev. B **4**, 3303 (1971).
[34] A.I. Volokitin, B.N.J. Persson. Phys. Low-Dim. Struct. *7/8*, 17 (1998); J. Phys.: Cond. Matter **11**, 345 (1999); Phys. Rev. B **63**, 205 404 (2001); Phys. Rev. B **65**, 115 419 (2001).
[35] K. Joulain, R. Carminati, J.-J. Greffet. Phys. Rev. B **68**, 245 405 (2003).
[36] Г.В. Дедков, А.А. Кясов. Письма в ЖТФ **32**, *3*, 223 (2006).
[37] P.-O. Chapuis, M. Laroche, S. Volz, J.-J. Greffet. Phys. Rev. B **77**, *12*, 125 402 (2008); arXiv: 0802.1900v1 (cond-mat.other] (2008).