ПОВЕРХНОСТНЫЕ СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ XXZ-МОДЕЛИ

© *И.Ю.Данилов*

Петербургский институт ядерной физики им. Б.П.Константинова
Российской академии наук,
188350 Гатчина, Ленинградская обл., Россия
(Поступила в Редакцию 18 января 1995 г.
В окончательной редакции 25 января 1996 г.)

При изучении (объемных) свойств многочастичных систем обычно решают задачу в конечной области (в случае одного измерения — на конечном отрезке) с выбранными из соображений удобства периодическими граничными условиями. Затем устремляют объем области (и пропорционально число частиц) к бесконечности. При таком способе решения задачи мы полностью теряем информацию о процессах, протекающих на границе изучаемой физической системы, так как периодические граничные условия, фактически, исключают поверхность из рассмотрения. В связи с тем что реально существующие физические объекты всегда имеют конечные размеры и, следовательно, имеют поверхность, представляет интерес изучение влияния поверхности на спектр широко исследуемых в математической физике интегрируемых квантовых систем.

Предметом предлагаемой статьи является XXZ-модель, широко изученная в случае периодических граничных условий [1–4].

1. Уравнения для квазиимпульсов и волновая функция XXZ-модели на конечной цепочке

Запишем гамильтониан ферромагнитной цепочки в виде

$$H = -J\sum_{l=1}^{N-1}\left[\frac{1}{g}(S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y) + S_l^z S_{l+1}^z\right] - J\frac{(\gamma-1)}{2}S_1^z, \qquad (1)$$

где $J > 0$, $S = \frac{1}{2}$ и $g > 1$. Первый узел системы занимает выделенное положение в ряду других узлов системы, чем и обусловливается введение в гамильтониан последнего слагаемого. Параметр γ произволен и описывает взаимодействие системы с поверхностью. Случай $\gamma = 1$ (последнее слагаемое в гамильтониане обращается в нуль) изучался в работе [5], где был предложен некий класс комплексов из перевернутых спинов, локализованных вблизи поверхности, и было высказано предположение, что других поверхностных компексов не существует. Изложенное далее последовательное решение задачи полностью подтверждает это предположение для $\gamma = 1$, но для $\gamma \neq 1$ множество поверхностных состояний гораздо богаче, чем при $\gamma = 1$.

Вектор состояния с n перевернутыми спинами представим в виде

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m_1 m_2 \dots m_n} B_{m_1 m_2 \dots m_n} S^-_{m_1} S^-_{m_2} \dots S^-_{m_n} |0\rangle$$

с $S^-_m = S^x - iS^y_m$ и $m_1 < m_2 < \dots < m_n$. Для амплитуд $B_{m_1 m_2 \dots m_n}$ из уравнения Шредингера можно получить систему уравнений, которую запишет в виде

$$(E - n + p + \frac{\gamma}{2}\delta_{m_1,l} + \frac{1}{2}\delta_{m_n,N}) B_{m_1 m_2 \dots m_n} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n}{}' (B_{m_1 \dots m_j+1 \dots m_n} + B_{m_1 \dots m_j-1 \dots m_n}) = 0 \qquad (2)$$

Здесь и дальше энергию измеряем в единицах J и отсчитываем от уровня $-(N-1)/4$, p — число пар m_j, m_{j+1} среди индексов амплитуды $B_{m_1 m_2 \dots m_n}$, таких, что $m_j = m_{j+1} - 1$. В сумме по j опущены все амплитуды, у которых есть пара совпадающих индексов или $m_1 = 0$, $m_n = N$. Уравнения (2) отличаются от уравнений в бесконечной цепочке наличием членов с символами Кронекера.

Используя гипотезу Бете [1,6], получим следующие выражения для амплитуд и квазиимпульсов k:

$$B_{m_1 m_2 \dots m_n} = \sum_{\{\varepsilon\}} \sum_{P} \sum_{\alpha<\beta} \exp\left(\frac{i}{2}\phi(\varepsilon_{P\alpha} k_{P\alpha} \varepsilon_{P\beta} k_{P\beta}) + \frac{i}{2}\phi(-\varepsilon_\alpha k_\alpha \varepsilon_\beta k_\beta)\right) \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \varepsilon_l \left(\gamma \exp(-\varepsilon_l k_l) - \frac{1}{g}\right) \exp(\varepsilon_{P1} k_{P1} m_1 + \dots + \varepsilon_{Pn} k_{Pn} m_n), \qquad (3)$$

$$\exp(2ik_i) = \frac{(\gamma e^{ik_i} - g^{-1})(e^{ik_i} - g^{-1})}{(\gamma e^{ik_i} - g^{-1})(e^{ik_i} - g^{-1})} \times$$

$$\times \prod_{j(\neq i)}^{n} \frac{(e^{ik_j - ik_i} - 2g e^{ik_j} + 1)(e^{ik_j + ik_i} - 2g e^{ik_i} + 1)}{(e^{ik_j - ik_i} - 2g e^{-ik_i} + 1)(e^{ik_j + ik_i} - 2g e^{ik_j} + 1)}, \qquad (4)$$

$$E_n = n - \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} \cos k_i, \qquad (5)$$

где

$$\exp(i\phi(k,z)) = -\frac{(\exp(ik + iz) - 2g \exp(ik) + 1)}{(\exp(ik + iz) - 2g \exp(iz) + 1)},$$

$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n)$, каждое ε принимает значения $+1$, -1; P — перестановка n чисел.

2. Поверхностные связанные состояния

Известно, что случай комплексных квазиимпульсов k соответствует связанным состояниям. Устремляя N к бесконечности (предел полубесконечной цепочки), получим из системы трансцендентных уравнений (4) систему легко решаемых уравнений для комплексных k.

Среди ее решений имеем две последовательности квазиимпульсов:

$$1)\ \exp(ik_1^D) = (2g - g\gamma)^{-1} \quad \exp(ik_{j+1}^D) = (2g - \exp(ik_j^D))^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m^D - 1,$$

$$2)\ \exp(ik_1^B) = \left(2g - \frac{1}{g\gamma}\right)^{-1} \quad \exp(ik_{j+1}^B) = (2g - \exp(ik_j^B))^{-1}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m^B - 1, \tag{6}$$

и $\exp(ik_1) = (g\gamma)^{-1}$.

Набор таких импульсов, полностью определяемый числами m^D и m^B, пробегающими значения от 0 до $n-1$ и связанными соотношением $m^D + m^B + 1 = n$, дает n различных поверхностных связанных состояний. Условия нормируемости волновой функции (3) с квазиимпульсами (6) будут определять область существования этих состояний на (g, γ) плоскости. Отметим, что в случае $m^B = n - 1$ волновая функция соответствующего состояния имеет только одно слагаемое и соответствует поверхностному связанному состоянию, полученному в [5]. Из соотношений (6) видно, что в частном случае $\gamma = 1$ (обсуждавшемся в настоящей работе) нет других поверхностных состояний.

3. Поверхностные связанные состояния для двух перевернутых спинов

В случае двух перевернутых спинов будем иметь два поверхностных состояния. Состояние B-типа с волновой функцией

$$B_{m_1 m_2} = (\gamma g)^{-m_1}(2g - (\gamma g)^{-1})^{-m_2}. \tag{7}$$

Условия нормируемости для этой волновой функции следующие: $(2g - (\gamma g)^{-1}) > 1$ (либо меньше -1), $\gamma g(2g - (\gamma g)^{-1}) > 1$ (либо меньше -1).

Состояние D-типа,

$$B_{m_1 m_2} = (\gamma(2g - \gamma g) - g^{-1}) \left(\frac{\gamma g(2g - \gamma g)^{-1} - 2/\gamma^{-1} + 1}{\gamma g(2g - \gamma g)^{-1} - 2(2-\gamma)^{-1} + 1} \times \right.$$
$$\left. \times (\gamma g)^{-m_1}(2g - \gamma g)^{-m_2} + (\gamma g)^{-m_2}(2g - \gamma g)^{m_1} \right) -$$
$$-(\gamma(2g - g\gamma)^{-1} - g^{-1})(2g - \gamma g)^{-m_1}(g\gamma)^{-m_2}. \tag{8}$$

Условия нормируемости этой волновой функции следующие:

$$|\gamma g| > 1, \quad |2g - \gamma g| > 1, \quad |\gamma g/(2g - \gamma g)| > 1.$$

Отметим, что только для состояния B-типа имеется максимум плотности вероятности на первом узле цепочки.

Эти состояния полностью аналогичны поверхностным связанным состояниям, полученным в [7] (двухчастичная модель Хаббарда) и в [8] (Бозе-газ на конечном отрезке).

Автор благодарит В.Л. Булатова, Б.Р. Гатиятуллина и И.В. Комарова за ценные обсуждения.

Список литера́туры

[1] Bethe H.Z. Phys. **71**, 205 (1931).
[2] Годен М. Волновая функция Бете. М. (1987).
[3] Изюмов Ю.А., СкрябинЮ.Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М. (1987).
[4] Гочев И.Г. ЖЭТФ **61**, 1674 (1971).
[5] Гочев И.Г. Письма в ЖЭТФ **26**, *3*, 13 (1977).
[6] Sklyanin E.K. J. Phys. **A21**, *10*, 2375 (1988).
[7] Булатов В.Л., Данилов И.Ю. ФТТ **36**, *3* 679 (1994).
[8] Данилов И.Ю. ФТТ **36**, *4*, 1037 (1994).