КИНЕМАТИКА ДИСЛОКАЦИЙ В КРИСТАЛЛАХ

© *Г.А.Малыгин*

Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе Российской академии наук,
194021 Санкт-Петербург, Россия
(Поступила в Редакцию 12 февраля 1996 г.
В окончательной редакции 11 марта 1996 г.)

Выведены уравнения кинематики дислокаций, описывающие изменение со временем ориентации и направления движения локальных участков дислокационных линий при трехмерном консервативном перемещении дислокаций в произвольном поле напряжений. Уравнения сформулированы применительно к проблеме статистического усреднения дислокационного ансамбля в деформируемом кристалле.

Переход от микроскопического, дискретно-дислокационного описания пластичности и прочности кристалличесих тел к макроскопическому описанию их пластических и прочностных свойств предполагает в качестве необходимого и закономерного шага статистическое усреднение дислокационного ансамбля в деформируемом материале.

Особенность дислокационного ансамбля как объекта усреднения состоит в том, что составляющие его «частицы» являются не точечными, а линейными образованиями произвольной формы и длины, поэтому при описании и усреднении ансамбля наряду с координатами $\boldsymbol{r}$ и скоростями $\boldsymbol{v}$ дислокаций необходимо указывать также ориентацию $\boldsymbol{\nu}$ дислокационных линий и ее изменение под действием тех или иных силовых факторов, таких, например, как внешнее приложенное к кристаллу напряжение, внутренние напряжения от других дислокаций ансамбля, влияние на ориентацию дислокаций процесса их взаимодействия с различными препятствиями в кристалле. Для этого требуется сформулировать соответствующие уравнения, описывающие эти изменения.

Другая особенность дислокационного ансамбля — это малая величина массы дислокации, в результате которой динамические эффекты, связанные с движением дислокаций, не играют существенной роли за исключением, может быть, случаев импульсного, ударного нагружения материала. При обычных условиях нагружения движение дислокаций имеет квазистатический характер, при котором приложенные к дислокации напряжения уравновешиваются зависящей от скорости дислокации силой трения. В результате при описании движения дислокаций на первый план выходит не динамический, а кинематический аспект этого движения, определяющий направление перемещения дислокации, ее ориентацию и положение в пространстве в каждый момент времени и изменение длины дислокации со временем.

Целью настоящей работы является вывод соответствующих уравнений, описывающих этот кинематический аспект движения дислокаций. Уравнения формулируются применительно к проблеме статистического усреднения дислокационного ансамбля, т. е. для произвольно малых сегментов дислокационных линий с локальными значениями их скоростей $\boldsymbol{v}$ (направлений движения $\boldsymbol{\xi}$) и ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ при произвольном трехмерном перемещении линии дислокации. В первом разделе работы дано описание функции распределения дислокаций по этим параметрам и сформулированы уравнения эволюции для нее, во втором выведены уравнения кинематики дислокационных линий и продемонстрировано их применение для некоторых простых движений дислокаций. В имеющихся сейчас работах, посвященных статистическому усреднению дислокационного ансамбля в виде ламинарно текущей двумерной «дислокационной жидкости» [1] или «кулоновского газа» дислокационных частиц [2], учитывался лишь динамический аспект движения дислокаций и их распределение по скоростям. Это не позволяет рассмотреть на микроскопическом уровне, например, процессы размножения и диффузии дислокаций в результате взаимодействия дислокаций с различными препятствиями в кристалле. Эти процессы играют важную роль в эволюции ансамбля в реальных условиях пластической деформации [3].

1. Функция распределения дислокаций

С учетом топологической особенности дислокаций как линейных образований функция распределения дислокаций с данным вектором Бюргерса $\boldsymbol{b}$ должна содержать в качестве дополнительной переменной ориентацию $\boldsymbol{\nu}$ дислокационной линии $f_b = f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nu}, t)$. При действии на дислокационный ансамбль внешних и внутренних сил, в том числе и стохастического характера, функция распределения будет эволюционировать со временем t в соответствии с уравнением типа уравнения Лиувилля [4]

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{v} f_b) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{v}}(\dot{\boldsymbol{v}} f_b) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\nu}}(\dot{\boldsymbol{\nu}} f_b) = [\dot{f}_b]_s. \tag{1a}$$

Производные по времени от $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\nu}$ описывают результат действия на дислокационный ансамбль внешних и внутренних напряжений. Наряду с действием дислокационных источников и процессом размножения дислокаций $[\dot{f}_b]_s$ они вызывают перераспределение дислокаций в конфигурационном пространстве скоростей $\boldsymbol{v}$ (направлений движения $\boldsymbol{\xi}$), ориентаций $\boldsymbol{\nu}$ и положений $\boldsymbol{r}$ в пространстве.

Поскольку при перемещении дислокаций динамические эффекты малы, то, как уже было сказано выше, при движении дислокаций в поле произвольных сил представляет интерес не столько распределение дислокаций по абсолютным значениям скоростей v, сколько их распределение по направлениям движения. Поскольку $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi} v$, то имеем $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{\xi} w + \dot{\boldsymbol{\xi}} v \approx \dot{\boldsymbol{\xi}} v$, где w — ускорение. Подставляя $\dot{\boldsymbol{v}}$ в (1a), получаем для функции распределения дислокаций $f_b(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}, t)$ уравнение

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \operatorname{div}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{v} f_b) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\xi}}(\dot{\boldsymbol{\xi}} v f_b) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\nu}}(\dot{\boldsymbol{\nu}} f_b) = [\dot{f}_b]_s. \tag{1b}$$

В случае плоского (двумерного) движения в своих плоскостях скольжения ориентации дислокаций и направления их перемещения оказываются кинематически жестко связаны и статистически зависимы, поэтому вклад ξ в эволюцию функции распределения отсутствует. В общем случае трехмерного перемещения дислокаций с выходом из своих плоскостей скольжения, например в результате поперечного скольжения винтовых участков дислокаций, ориентация и направление движения дислокаций хотя и остаются кинематически связаны, но выступают в качестве статистически независимых переменных. Их распределение в дислокационном ансамбле описывается уравнением (1b).

Для его решения необходимо знать, как под действием тех или иных сил изменяются со временем ориентации и направления движения локальных участков движущихся дислокационных линий. При пренебрежении динамической составляющей этих сил уравнение баланса напряжений, действующих на дислокацию при ее консервативном перемещении, имеет известный вид

$$\left(\hat{\sigma}^e + \hat{\sigma}^d + \hat{\sigma}^i\right) \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\xi} \left(\tau^* + \tau_0\right) b, \tag{2}$$

где $\hat{\sigma}^e$ — приложенное к кристаллу напряжение, $\hat{\sigma}^d$ — поле дальнодействующих напряжений от других дислокаций ансамбля, $\hat{\sigma}^i$ — локальные дальнодействующие напряжения, связанные со взаимодействием дислокаций с различными препятствиями в кристалле, $b = |\boldsymbol{b}|$, $\tau^* = \tau^*(v, T)$ — зависящее от температуры T и скорости дислокаций v напряжение трения при квазистатическом термоактивированном движении дислокаций, τ_0 — атермическая компонента напряжений трения при взаимодействии дислокаций с препятствиями с коротким радиусом действия.

Уравнение баланса напряжений (2) определяет направление движения дислокации $\boldsymbol{\xi}$ и абсолютную величину скорости дислокации v. Но оно не определяет, как изменяются со временем ориентация и направление движения дислокации. Именно эти изменения обусловливают эволюцию функции распределения и кинетические свойства дислокационного ансамбля. Чтобы найти $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ и $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, необходимо иметь для них кинематические соотношения при произвольном трехмерном перемещении дислокации.

2. Кинематика дислокационных линий

Перемещение дислокации в пространстве состоит в общем случае из ее смещения $r_0(t)$ относительно самой себя и изменения формы дислокационной линии (см. рисунок)

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \boldsymbol{r}[l(t)]. \tag{3}$$

Радиус-вектор $\boldsymbol{r}(l)$ описывает изменение формы дислокации при перемещении точки O_2 вдоль дислокации на расстояние $l(t)$.

Для описания эволюции формы линии, а значит, и ее локальной ориентации удобно ввести связанный с ней подвижной репер, состоящий из орта касательной к линии дислокации $\boldsymbol{\nu}$, орта $\boldsymbol{\xi}$ в направлении

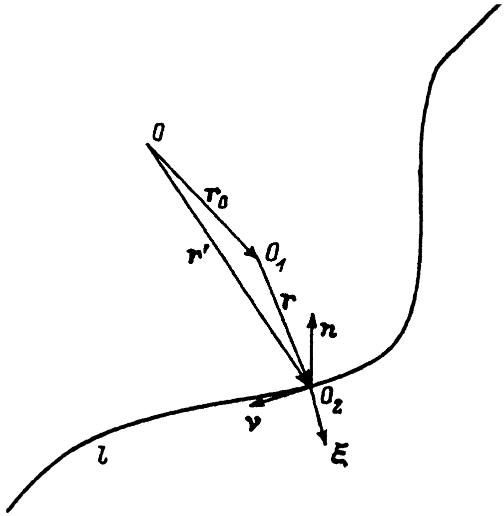

Схема трехмерного движения дислокации l в произвольном поле напряжений.

движения дислокации и орта $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi}$ нормали к плоскости скольжения дислокации (см. рисунок). В естественных координатах, связанных с линией дислокации, между этими ортами, как и для любой пространственной кривой, существуют дифференциальные соотношения Френе–Серре [5]

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial l}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l} = \frac{\boldsymbol{\xi}}{R_1},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial l} = -\frac{\boldsymbol{\nu}}{R_1} + \frac{\boldsymbol{n}}{R_2}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l} = -\frac{\boldsymbol{\xi}}{R_2}, \tag{4a}$$

где $\partial/\partial l$ — производные от векторов вдоль линии дислокации, R_1 и R_2 — соответственно радиусы кривизны и кручения дислокационной линии,

$$R_1^{-1} = \boldsymbol{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l}\right]^{1/2}, \quad R_2^{-1} = -\boldsymbol{\xi}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l}\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l}\right]^{1/2}. \tag{4b}$$

При плоском движении дислокационной линии без выхода из первоначальной плоскости скольжения имеем $\partial \boldsymbol{n}/\partial l = 0$, $R_2 = \infty$.

С учетом (4a) радиус-вектор (3) может быть записан в виде интеграла вдоль линии дислокации

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{r}_0(t) + \int \boldsymbol{\nu} dl. \tag{5}$$

Дифференцируя (5) по времени, находим скорость перемещения локального участка дислокации

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \int \dot{\boldsymbol{\nu}} dl, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \partial \boldsymbol{v}/\partial l = (\boldsymbol{\nu}\nabla)\boldsymbol{v}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{v}_0$ — скорость поступательного движения линии дислокации, $\dot{\boldsymbol{\nu}}(l)$ — скорость изменения ориентации линии дислокации из-за существования вдоль нее градиента скорости дислокации $\partial \boldsymbol{v}/\partial l$. Поскольку $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\xi} v$, то

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = v\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial l} + \boldsymbol{\xi}\frac{\partial v}{\partial l}. \tag{7a}$$

В результате с учетом соотношений (4a) имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\frac{v}{R_1}\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial v}{\partial l}\boldsymbol{\xi} + \frac{v}{R_2}\boldsymbol{n}. \tag{7b}$$

Из уравнения (7b) видно, что вектор $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ имеет три составляющие. Первая из них связана с кривизной линии дислокации, вторая — с градиентом абсолютной величины скорости дислокации вдоль линии дислокации, третья — с кручением линии дислокации при ее выходе из исходной плоскости скольжения.

Аналогично может быть найдено уравнение для $\dot{\boldsymbol{\xi}}$. Для этого продифференцируем по времени вытекающее из соотношений (4a) тождество $\boldsymbol{\xi} = R_1 \partial\boldsymbol{\nu}/\partial l$. Тогда с учетом соотношений (4a) и (7b) получаем

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -\left[\frac{\partial v}{\partial l} + R_1\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v}{R_1}\right)\right]\boldsymbol{\nu} +$$

$$+\left[\frac{\dot{R}_1}{R_1} + R_1\frac{\partial^2 v}{\partial l^2} - \frac{v}{R_1} - \frac{R_1}{R_2^2}v\right]\boldsymbol{\xi} + \left[\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial l} + R_1\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v}{R_2}\right)\right]\boldsymbol{n}. \tag{8a}$$

С другой стороны, дифференцируя тождество

$$R_1^{-2} = \frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l}\frac{\partial \boldsymbol{\nu}}{\partial l},$$

находим, принимая во внимание (4a) и (7b),

$$\dot{R}_1 = -R_1^2\boldsymbol{\xi}\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\nu}}}{\partial l} = \left(1 + \frac{R_1^2}{R_2^2}\right)v - R_1^2\frac{\partial^2 v}{\partial l^2}. \tag{8b}$$

Подставляя (8b) в (8a), получаем, что выражение, стоящее в квадратной скобке перед ортом $\boldsymbol{\xi}$, в этом уравнении тождественно равно нулю. Используя далее второе из соотношений (4b) и то, что орт нормали к плоскости скольжения есть $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi}$, можно аналогично $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ и $\dot{R}_1$ найти величины $\dot{\boldsymbol{n}}$ и $\dot{R}_2$

$$\dot{\boldsymbol{n}} = -\frac{v}{R_2}\boldsymbol{\nu} - \left[\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial l} + R_1\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v}{R_2}\right)\right]\boldsymbol{\xi} - \frac{v}{R_1}\boldsymbol{n}, \tag{8c}$$

$$\dot{R}_2 = -R_2^2\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{R_1}{R_2}\frac{\partial v}{\partial l} + R_1\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v}{R_2}\right)\right]. \tag{8d}$$

Уравнения (7b) и (8a)–(8d) образуют систему из пяти кинематических уравнений для пяти неизвестных величин $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{n}$ и R_1, R_2. Поскольку $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi}$, то независимыми являются четыре уравнения, и соответственно независимы четыре из пяти переменных. Уравнения определяют изменение со временем ориентаций и направлений консервативного скольжения дислокаций в произвольном поле напряжений. Зная положение дислокации в пространстве, т.е. ее форму, можно найти изменение длины дислокации при ее движении в поле напряжений.

Как видно из уравнений, источником этих изменений является производная от скорости дислокации вдоль линии дислокации. Поэтому для решения уравнений необходимо присоединить к ним уравнение баланса действующих на дислокацию напряжений (2). Умножая его скалярно на $\boldsymbol{\xi}$, получаем

$$b\tau^*(v)- = \boldsymbol{n}\left(\hat{\sigma}^e + \hat{\sigma}^d + \hat{\sigma}^i\right)\boldsymbol{b} - b\tau_0. \tag{9}$$

Поскольку $v = v(\tau^*)$, имеем

$$\frac{\partial v}{\partial l} = v\left[\frac{\partial \mathrm{Ln} v}{\partial \tau^*}\right]\frac{\partial \tau^*}{\partial l}, \quad b\frac{\partial \tau^*}{\partial l} = \boldsymbol{n}\frac{\partial \hat{\sigma}}{\partial l}\boldsymbol{b} + \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l}\hat{\sigma}\boldsymbol{b}. \tag{10a}$$

Здесь $\partial\tau^*/\partial \mathrm{Ln} v$ — коэффициент скоростной чувствительности напряжений течения, $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^e + \hat{\sigma}^d + \hat{\sigma}^i$. Принимая во внимание (4a), находим, что

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial l}\hat{\sigma}\boldsymbol{b} = -\frac{\boldsymbol{\xi}\hat{\sigma}\boldsymbol{b}}{R_2}. \tag{10b}$$

Таким образом, согласно (10), источниками, вызывающими изменение ориентации и направления движения дислокаций, являются градиенты внешних и внутренних напряжений, действующих на дислокацию, и «кручение» (изменение) плоскости скольжения дислокаций (10b). Следует заметить также, что при смещении дислокации параллельно самой себе со скоростью $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{\xi}_0 v_0$ по аналогии с $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ имеем $\dot{\boldsymbol{\xi}}_0 = (\boldsymbol{\xi}_0\nabla)\boldsymbol{v}$, т. е. возможно изменение направления скольжения дислокации без изменения ее ориентации. При консервативном движении дислокаций такая ситуация имеет место, например, при выходе достаточно протяженных винтовых участков дислокаций в плоскость поперечного скольжения.

В заключение продемонстрируем применение кинематических соотношений (7)–(9) для описания эволюции простейшего дислокационного ансамбля в виде одиночной круглой дислокационной петли, расширяющейся или сужающейся в своей плоскости скольжения.

Согласно (7), (8), для произвольного участка петли с учетом того, что $R_2^{-1} = 0$, $\partial v/\partial l = 0$, $R_1 = R$, где R — радиус петли, имеем

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = -\frac{v}{R}\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0, \quad \dot{R} = v. \tag{11}$$

Постоянство радиуса кривизны вдоль петли предполагает, согласно уравнениям движения (9), (10), отсутствие градиентов внешних и внутренних напряжений вдоль нее. В однородном поле внешних напряжений зависимость скорости отдельного участка круглой петли $v(\tau^*)$ от координат определяется в этом случае только радиальной составляющей силы натяжения дислокации (в пренебрежении его анизотропией)

$$\tau^* = \tau - K\frac{\mu b}{R} - \tau_0. \tag{12}$$

Здесь τ — приложенное касательное напряжение, μ — модуль сдвига, K — коэффициент, зависящий в общем случае от ориентации дислокации. Таким образом, имеем $\dot{R} = v(R)$. Интегрируя это уравнение, находим зависимость кривизны (радиуса) петли от времени. Соответственно, согласно (11), может быть найдена зависимость ориентации дислокации $\boldsymbol{\nu}$ от времени.

Подставляя (11) в (1b), получаем уравнение эволюции для функции распределения сегментов петли по ориентациям $f = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nu}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{v} f) - \mathrm{div}_{\boldsymbol{\nu}}\left(\frac{v}{R}\boldsymbol{\nu} f\right) = [\dot{f}]_s. \tag{13a}$$

После усреднения (13a) по всем ориентациям $\boldsymbol{\nu}$ имеем для функции распределения дислокаций по координатам $f(\boldsymbol{r}, t)$ уравнение сохранения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{v} f) = -\frac{v}{R} f. \tag{13b}$$

При усреднении учтено, что $[\dot{f}]_s = -f/t_s$, $t_s = R/v$ — время релаксации (размножения) дислокации,

$$f(\boldsymbol{r}, t) = \int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\nu}, t)(d\nu),$$

$$\int \mathrm{div}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\nu} f(r, \boldsymbol{\nu}, t))(d\nu) = \int f\boldsymbol{\nu} d\boldsymbol{s}_\nu = 0, \tag{13c}$$

где $(d\nu)$ и $d\boldsymbol{s}_\nu$ — соответственно элементы объема и поверхности в конфигурационном пространстве ориентаций. Уравнение (13b) совпадает с уравнением баланса для скалярной плотности дислокаций [3].

Действительно, из уравнения непрерывности вектора Бюргерса для одиночной дислокации

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} + \mathrm{rot}[\hat{\alpha} \times \boldsymbol{v}] = 0, \quad \mathrm{div}\,\hat{\alpha} = 0 \tag{14a}$$

следует уравнение баланса для ориентированной линии дислокации [3]

$$\frac{\partial \delta(l)}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{v} \otimes \delta(l)) = (\delta(l)\nabla)\boldsymbol{v}. \tag{14b}$$

Здесь $\hat{\alpha} = \boldsymbol{b} \otimes \delta(\boldsymbol{l})$, $\delta(\boldsymbol{l}) = \boldsymbol{\nu}\delta(l)$ и $\delta(l)$ — дельта-функции, определенные соответственно на ориентированной и неориентированной линии дислокации, $\boldsymbol{\nu}$ — как и выше, орт касательной к линии дислокации. Правая часть уравнения (14b) равна $\delta(l)\partial\boldsymbol{v}/\partial l = \dot{\boldsymbol{\nu}}\delta(l)$. Она описывает изменение ориентации и длины дислокации в результате существования вдоль дислокации градиента скорости дислокации. Умножая (14b) скалярно на $\boldsymbol{\nu}$ и учитывая (7b) и то, что $\boldsymbol{\nu}\partial\boldsymbol{\nu}/\partial t = 0$, поскольку $\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{\nu} = 1$, получаем

$$\frac{\partial\delta(l)}{\partial t} + \mathrm{div}(\boldsymbol{v}\delta(l)) = -\frac{v}{R_1}\delta(l) + \frac{v}{R_2}(\boldsymbol{\nu}\boldsymbol{n}')\delta(l). \tag{14c}$$

Правая часть уравнения (14c) описывает изменение длины дислокации в результате существования вдоль нее градиента скорости и изменения плоскости скольжения ($\boldsymbol{n}'$ — орт новой плоскости скольжения). Для круглой плоской петли $R_1 = R$, $R_2^{-1} = 0$. Из сравнения уравнений (7) и (14b) следует, что величина $\dot{\boldsymbol{\nu}}$ в (7) равна $d\boldsymbol{\nu}/dt$ и включает изменение не только ориентации, но и длины дислокации.

В дальнейшем с помощью полученных соотношений предполагается произвести статистическое усреднение дислокационного ансамбля с учетом короткодействующего и дальнодействующего взаимодействий дислокаций друг с другом и с различными препятствиями в кристалле с целью получения уравнений эволюции для средних по ансамблю скалярной и тензорной плотностей дислокаций.

Список литературы

[1] H. Zorski. Int. J. Sol. Struct. **4**, *10*, 959 (1968).
[2] Yu.I. Mescheryakov, E.I. Procuratova. Int. J. Sol. Struct. **32**, *12*, 1711 (1995).
[3] Г.А. Малыгин. ФТТ **37**, *1*, 3 (1995).
[4] А.А. Власов. Нелокальная статистическая механика. Наука. М. (1978). 264 с.
[5] Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике. Наука. М. (1968). 720 с.