

Высокочастотная восприимчивость многослойной ферромагнитной системы с двумерными неоднородностями

© Ю.И. Маньков^{*,**}, Д.С. Цикалов^{*}

^{*} Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН,
Красноярск, Россия

^{**} Сибирский федеральный университет,
Красноярск, Россия

E-mail: mankov@iph.krasn.ru

(Поступила в Редакцию 9 июня 2009 г.)

Исследована высокочастотная восприимчивость ферромагнитной слоистой структуры, в которой помимо периодического изменения параметра магнитной анизотропии от слоя к слою происходит его изменение вдоль слоев по случайному закону (сверхрешетка с двумерными неоднородностями фазы). На границах нечетных зон Бриллюэна такой сверхрешетки изучена эволюция частотной зависимости мнимой части усредненной функции Грина в области щели (запрещенной зоны) в спектре волн, распространяющихся вдоль оси сверхрешетки, обусловленная изменением относительных среднеквадратичных флуктуаций фазы γ_2 . Оказались универсальными для всех нечетных зон Бриллюэна неизменность пика мнимой части функции Грина, соответствующего краю щели с меньшей частотой, и сглаживание пика, отвечающего краю щели с большей частотой, с ростом γ_2 . Эти эффекты, первоначально обнаруженные на границе первой зоны Бриллюэна синусоидальной сверхрешетки, объясняются, как и ранее, своеобразием законов сохранения энергии падающей и рассеянной волн в сверхрешетке с двумерными неоднородностями. Показано, что с увеличением номера зоны Бриллюэна уменьшается значение γ_2 , при котором происходит исчезновение пика на краю щели с большей частотой.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта № 3818.2008.3 Президента РФ по программе „Государственная поддержка научных исследований, проводимых ведущими научными школами Российской Федерации“, гранта Программы № 27.1 Президиума РАН и Государственного контракта № 2.740.11.0220 по ФЦП.

1. Введение

В настоящее время широко исследуются многослойные пленочные структуры (одномерные сверхрешетки), которые представляют собой периодически чередующиеся слои двух материалов с различающимися физическими свойствами. В частности, к таким структурам относятся фотонные и магнитные кристаллы, изучению которых уделяется много внимания. Известно, что спектр волн любой природы в периодических системах имеет зонную структуру, которая характеризуется вектором обратной решетки \mathbf{q} ($|\mathbf{q}| \equiv q = 2\pi/l$, где l — период одномерной сверхрешетки). На краю зон Бриллюэна сверхрешетки при значении волнового вектора волны $k = nq/2$ происходит снятие вырождения и появление в спектре волн щелей (запрещенных зон). Ширина щели $\Delta\omega_n$ определяется параметром сверхрешетки λ (относительной величиной изменения физических параметров соседних слоев) и номером зоны n . Для описания слоистой структуры широко используются одномерные модели, допускающие точное решение волнового уравнения, такие как синусоидальная сверхрешетка и сверхрешетка с прямоугольным профилем [1–13]. В синусоидальной сверхрешетке волновое уравнение приводится к уравнению Матье, при этом ширина щели в спектре волн определяется собственными значениями этого уравнения (см., например, [9,14]). В частности, в ферромагнитной синусоидальной сверхрешетке с неоднородным

параметром анизотропии при $\lambda \ll 1$ (предел узких запрещенных зон) на границах зон Бриллюэна $\Delta\omega_n \sim \lambda^n$. Степенная зависимость от λ при малой величине этого параметра дает возможность при исследовании спектра волн в синусоидальной сверхрешетке в окрестности границы первой зоны Бриллюэна пренебречь запрещенными зонами на границах всех остальных зон Бриллюэна. Модель сверхрешетки с прямоугольным профилем соответствует слоистой структуре с чередованием двух слоев, различающихся величиной какого-либо физического параметра, причем в каждом слое этот параметр постоянен, а переход от слоя к слою происходит на размере порядка атомного. В континуальной модели такая сверхрешетка описывается кусочно постоянной функцией и имеет нулевую ширину переходной области. В ферромагнитной сверхрешетке с прямоугольным профилем, сформированной слоями с разными значениями параметра анизотропии, при $\lambda \ll 1$ на границах нечетных зон Бриллюэна $\Delta\omega_n \sim \lambda/n$, а на границах четных зон $\Delta\omega_n \sim (\lambda/n)^2$ [9–12]. Поэтому в слоистой структуре даже при $\lambda \ll 1$ становится важным исследованием спектра волн с учетом его многозонности.

В природных материалах и в составных системах, несмотря на впечатляющие достижения в изготовлении последних, периодичность в расположении слоев поддерживается лишь приближенно. Всегда имеются случайные отступления от периодичности, обусловленные природными или технологическими факторами. Это обстоятельство стимулировало появление теоретических

работ, в которых изучается переход от идеально периодических сверхрешеток к частично стохастизованным.

Для описания спектральных свойств сверхрешеток со случайными неоднородностями будем использовать метод усредненных функций Грина (см., например, [15]), согласно которому случайная среда описывается корреляционной функцией $K(\mathbf{r})$, зависящей от расстояния \mathbf{r} между двумя точками среды: $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$. Для нахождения корреляционной функции сверхрешетки $K(\mathbf{r})$ воспользуемся методом случайной пространственной модуляции (RSM), развитым в работах [10,16,17], который является обобщением хорошо известного метода определения временной корреляционной функции для случайной частотной (фазовой) модуляции радиосигнала [18,19] на случай пространственной (в общем случае — трехмерной) модуляции периода сверхрешетки. С помощью этих методов были исследованы [10,16,17,20–22] спектр волн и их затухание в сверхрешетке, содержащей одномерные (1D) фазовые неоднородности, моделирующие случайные смещения границ между слоями сверхрешетки от их первоначального периодического расположения, и трехмерные (3D) изотропные фазовые неоднородности, моделирующие случайные деформации этих границ. В частности, было установлено, что по мере уменьшения щели в спектре волн под действием 1D- и 3D-неоднородностей два пика мнимой части усредненной функции Грина, соответствующих краям щели, расширяются, сближаются и сливаются в один пик. В работах [16,23] методом усредненных функций Грина в сочетании с методом RSM были исследованы спектр и высокочастотная восприимчивость первоначально синусоидальной сверхрешетки, содержащей двумерные (2D) фазовые неоднородности, моделирующие деформации границ между слоями, одинаковые для всех слоев. Для волн, распространяющихся в направлении оси сверхрешетки, на границе первой зоны Бриллюэна было обнаружено своеобразное поведение мнимой части усредненной функции Грина: пик, соответствующий краю запрещенной зоны с меньшей частотой, остается практически неизменным при росте среднеквадратичных флуктуаций 2D-неоднородностей γ_2 , в то время как пик, отвечающий краю запрещенной зоны с большей частотой, с ростом γ_2 расширяется и резко уменьшается по высоте до полного его исчезновения. Представляет интерес исследование таких эффектов в слоистой системе, которая более адекватна реальным структурам. С этой целью в настоящей работе с учетом многозонности спектра волн исследуется высокочастотная восприимчивость (функция Грина) сверхрешетки с изначально прямоугольным профилем при наличии в ней 2D-неоднородностей.

2. Модель и корреляционная функция

Сверхрешетка характеризуется зависимостью какого-либо материального параметра A от пространственных координат $\mathbf{x} = \{x, y, z\}$. Физическая природа параметра $A(\mathbf{x})$ может быть различной. Этот параметр может являться плотностью материала или силовой константой

для упругой среды, магнитной анизотропией, намагниченностью или обменом для магнитной системы и так далее. Мы представим $A(\mathbf{x})$ в форме

$$A(\mathbf{x}) = A + \Delta A \rho(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где A — средняя величина параметра, ΔA — его среднеквадратичное отклонение; $\lambda = \Delta A/A$. Функция $\rho(\mathbf{x})$ центрирована ($\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = 0$) и нормирована ($\langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle = 1$), описывает как периодическую зависимость параметра $A(\mathbf{x})$ вдоль оси сверхрешетки z , так и случайную пространственную модуляцию этого параметра. Угловые скобки соответствуют усреднению по ансамблю случайных реализаций функции $\rho(\mathbf{x})$.

Рассмотрим сверхрешетку, имеющую прямоугольный профиль, материальный параметр которой в исходном состоянии, когда случайные неоднородности отсутствуют, зависит только от координаты z . На основе предложенного в работе [10] описания сверхрешетки с 1D- и 3D-неоднородностями запишем функцию $\rho(\mathbf{x})$ в виде бесконечного ряда

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \cos\left\{(2m+1)[q(z - u_2(\mathbf{x}_{\perp})) + \psi]\right\}, \quad (2)$$

который при $u_2(\mathbf{x}_{\perp}) = 0$ и $\psi = 0$ (идеальная сверхрешетка) представляет собой разложение в ряд Фурье кусочно-постоянной функции. Положительные и отрицательные области функции $\rho(\mathbf{x})$ вдоль оси сверхрешетки z соответствуют чередующимся слоям многослойной структуры, а нулевые точки функции $\rho(\mathbf{x})$ соответствуют границам слоев сверхрешетки. В рамках такой интерпретации функция $u_2(\mathbf{x}_{\perp})$ моделирует случайные деформации поверхностей этих границ. Не зависящая от координат фаза ψ характеризуется однородным распределением на интервале $(-\pi, \pi)$; $\mathbf{x}_{\perp} = \{x, y\}$.

Корреляционная функция $K(\mathbf{r})$ зависит только от разности координат $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ и определяется выражением

$$K(\mathbf{r}) = \langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_{\psi\chi}. \quad (3)$$

Здесь усреднение проведено как по однородной случайной фазе ψ , так и по случайной функции χ , где

$$\chi(\mathbf{x}_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp}) = q[u_2(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{r}_{\perp}) - u_2(\mathbf{x}_{\perp})]. \quad (4)$$

Вычислим корреляционную функцию $K(\mathbf{r})$. Произведение функций $\rho(\mathbf{x})$ и $\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+m'}}{(2m+1)(2m'+1)} \\ &\times \left\{ \cos q[(2m+1)(r_z + u_2(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{r}_{\perp})) \right. \\ &- (2m'+1)u_2(\mathbf{x}_{\perp}) + 2m(m-m')(z + \psi/q)] \\ &+ \cos q[(2m+1)(r_z - u_2(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{r}_{\perp})) \\ &\left. - (2m'+1)u_2(\mathbf{x}_{\perp}) + 2(m+m'+1)(z + \psi/q)] \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

где $\mathbf{r}_{\perp} = \{r_x, r_y\}$. Второе слагаемое в фигурных скобках после усреднения по фазе ψ обращается в нуль.

Выражения с $m' \neq m$ в первом слагаемом в результате усреднения по ψ также зануляются. В итоге после этого усреднения мы имеем

$$\langle \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle_\psi = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \times \cos[(2m+1)(qr_z + \chi(\mathbf{x}_\perp, \mathbf{r}_\perp))]. \quad (6)$$

Далее, усредняя (6) по χ в предположении гауссовского распределения величин χ , получаем выражение для $K(\mathbf{r})$ в виде

$$K(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos[(2m+1)qr_z] K_m(\mathbf{r}_\perp), \quad (7)$$

где $K_m(\mathbf{r}_\perp)$ определяется формулой

$$K_m(\mathbf{r}_\perp) = \frac{8}{\pi^2(2m+1)^2} \exp\left[-\frac{(2m+1)^2}{2} Q_2(\mathbf{r}_\perp)\right]. \quad (8)$$

Здесь $Q_2(\mathbf{r}_\perp) = q^2 \langle [u_2(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{r}_\perp) - u_2(\mathbf{x}_\perp)]^2 \rangle$ — безразмерная структурная функция сверхрешетки.

Структурная функция в случае двумерных неоднородностей была получена в работе [23]

$$Q_2(\mathbf{r}_\perp) = 4\gamma_2^2 \{ E_1(k_2 r_\perp) + \ln(k_2 r_\perp C) + \exp(-k_2 r_\perp) - 1 \}. \quad (9)$$

Здесь $C \simeq 1.78$ — постоянная Эйлера,

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

— интегральная показательная функция, параметр $\gamma_2 = q\sigma_2/\sqrt{2}k_2$ определяет среднеквадратичные флуктуации случайной функции $u_2(\mathbf{x}_\perp)$, где σ_2 и k_2 — соответственно среднеквадратичная флуктуация и корреляционное волновое число градиента $u_2(\mathbf{x}_\perp)$.

В случае идеальной сверхрешетки ($\gamma_2 = 0$) корреляционная функция представляется выражением

$$K(\mathbf{r}) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)qr_z}{(2m+1)^2}. \quad (10)$$

Суммируя этот ряд, получаем периодическую функцию, которая в пределах одного периода l имеет вид

$$K(\mathbf{r}) = 2 \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{qr_z}{\pi}, & 0 \leq qr_z \leq \pi; \\ \frac{qr_z}{\pi} - \frac{3}{2}, & \pi \leq qr_z \leq 2\pi. \end{cases} \quad (11)$$

Эта функция представлена на рис. 1. Отметим, что в неидеальной сверхрешетке ($\gamma_2 \neq 0$) при $r_\perp = 0$ корреляционная функция будет иметь такой же вид. При $r_\perp \neq 0$ в сверхрешетке с 2D-неоднородностями зависимость корреляционной функции от r_z становится более плавной, оставаясь периодической вдоль оси z с периодом

сверхрешетки. На рис. 1 такая зависимость показана при $\gamma_2^2 = 0.3$ и отношении $q/k_2 = 20$. В направлениях, перпендикулярных оси z , функция $K(\mathbf{r})$ монотонно спадает. На рис. 2 кривая 1 отображает зависимость $K(\mathbf{r})$,

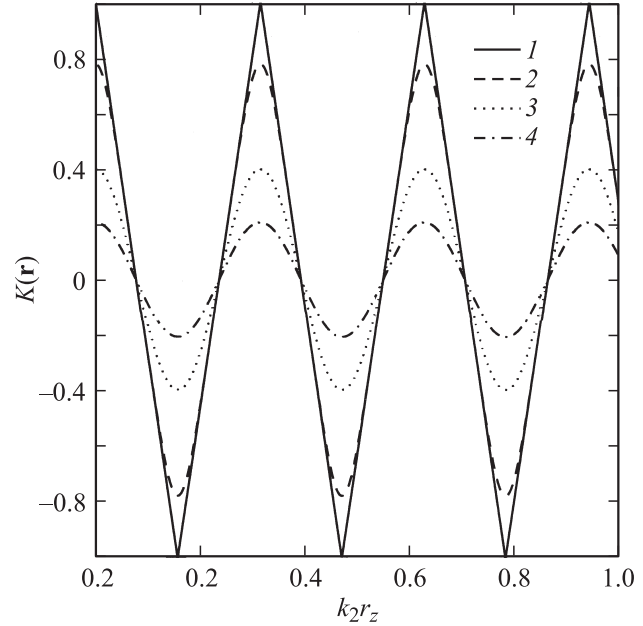


Рис. 1. Корреляционная функция сверхрешетки. Для идеальной сверхрешетки ($\gamma_2 = 0$) $K(\mathbf{r})$ определяется формулой (11) кривая (1). Для сверхрешетки с 2D-неоднородностями $K(\mathbf{r})$, описываемая формулами (7)–(9), при $\gamma_2^2 = 0.3$, $k_2/q = 0.05$, показана для различных значений $k_2 r_\perp$: 0 — кривая (1), 1 — (2), 5 — (3) и 15 — (4).

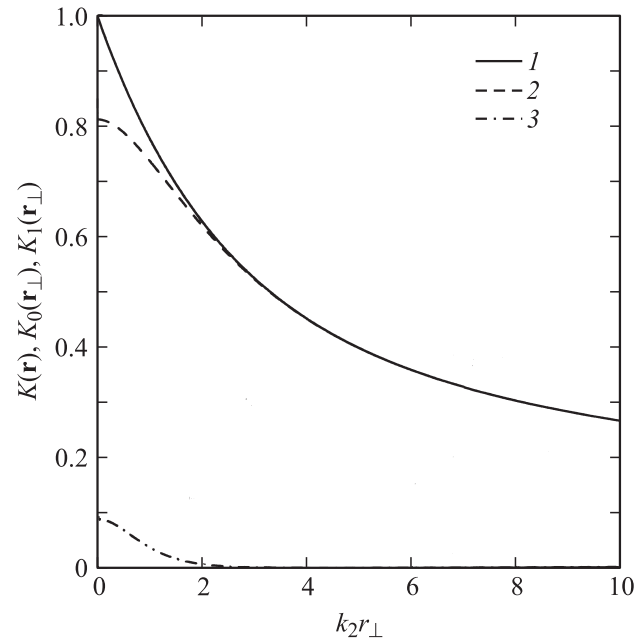


Рис. 2. Корреляционная функция сверхрешетки при $r_z = 0$. 1 — функция $K(\mathbf{r})$ (см. (7)–(9)), 2, 3 — функции $K_0(\mathbf{r}_\perp)$ и $K_1(\mathbf{r}_\perp)$ (см. (8), (9)) при $m = 0$ и 1 соответственно. $\gamma_2^2 = 0.3$, $k_2/q = 0.05$.

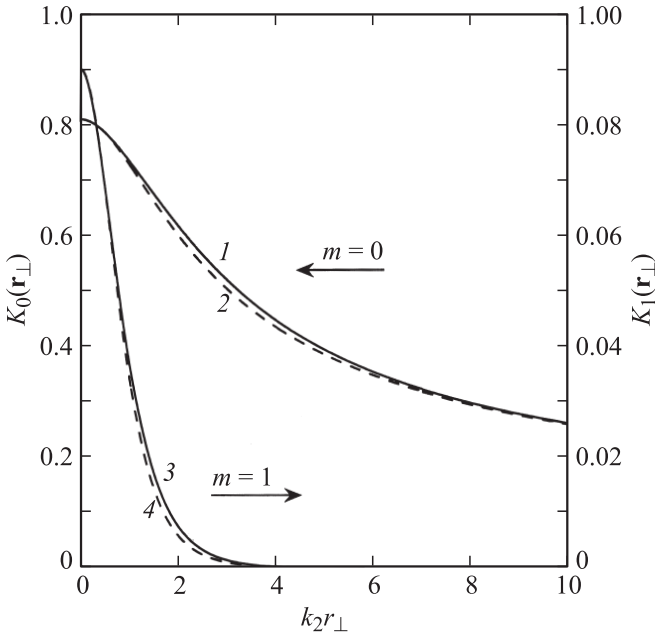


Рис. 3. Функции $K_m(\mathbf{r}_\perp)$ для $m = 0$ (1, 2) и 1 (3, 4). 1, 3 — по формулам (8), (9), 2, 4 — по аппроксимирующей функции (12). $\gamma_2^2 = 0.3$, $k_2/q = 0.05$.

которая следует из (7), (8), (9), при $r_z = 0$. Кривые 2, 3 на этом же рисунке показывают соответственно функции $K_0(\mathbf{r}_\perp)$ и $K_1(\mathbf{r}_\perp)$ с $Q_2(\mathbf{r}_\perp)$ в форме (9). Видно, что их сумма составляет примерно 0.9 от величины $K(\mathbf{r})$ при $r_\perp = 0$ и практически совпадает с $K(\mathbf{r})$ при $k_2 r_\perp > 1$.

Подстановка выражения для $Q_2(\mathbf{r}_\perp)$ в виде (9) в формулу (8) приводит к сложному выражению для корреляционной функции $K(\mathbf{r})$, которое будет затруднительно использовать в дальнейших расчетах. Поэтому мы аппроксимируем убывающую часть корреляционной функции $K_m(\mathbf{r}_\perp)$ простой формулой

$$K_m(\mathbf{r}_\perp) = \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 r_\perp^2\right)^{-(2m+1)^2 \gamma_2^2}, \quad (12)$$

которая обобщает на случай многослойной системы моделирующее выражение для корреляционной функции изначально синусоидальной сверхрешетки [23], полученное, исходя из предельных выражений для $Q_2(\mathbf{r}_\perp)$,

$$Q_2(\mathbf{r}_\perp) = \gamma_2^2 \begin{cases} k_2^2 r_\perp^2, & k_2 r_\perp \ll 1, \\ 4 \ln(k_2 r_\perp C/e), & k_2 r_\perp \gg 1, \end{cases} \quad (13)$$

где e — основание натурального логарифма. На рис. 3 показаны убывающие части $K_0(r_\perp)$ и $K_1(r_\perp)$ корреляционной функции, которые определяются выражением (8) с $Q_2(\mathbf{r}_\perp)$ в форме (9) (кривые 1, 3), и аппроксимирующие функции $K_0(r_\perp)$ и $K_1(r_\perp)$ в форме (12) (кривые 2, 4) для $\gamma_2^2 = 0.3$. Видно, что модельная корреляционная функция хорошо описывает точную корреляционную функцию во всем интервале изменения r_\perp и имеет асимптотику, совпадающую с асимптотикой точной функции как при $k_2 r_\perp \ll 1$, так и при $k_2 r_\perp \gg 1$.

3. Высокочастотная восприимчивость

Проводя преобразование Фурье по времени в волновом уравнении, описывающем спиновые волны в ферромагнитной сверхрешетке с неоднородным параметром магнитной анизотропии $\beta(\mathbf{x})$, имеем

$$\nabla^2 m^+ + \left[v - \frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \rho(\mathbf{x}) \right] m^+ = 0, \quad (14)$$

где функция $m^+ = m^+(\mathbf{x}, \omega)$; в формуле (1) $A = \beta$, $\Delta A = \Delta \beta$. Уравнение (14) соответствует ситуации, когда направление внешнего магнитного поля \mathbf{H} , постоянной составляющей намагниченности \mathbf{M}_0 и оси магнитной анизотропии совпадают с направлением оси сверхрешетки z . В этом случае $m^+ = M_x + iM_y$, где M_x и M_y — проекции вектора намагниченности на соответствующие оси координат,

$$v = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha g M_0}, \quad \Lambda = \frac{\sqrt{2} \Delta \beta}{\alpha},$$

ω — частота спиновой волны, $\omega_0 = g[H + (\beta - 4\pi)M_0]$ — частота однородного ферромагнитного резонанса, g — гиромагнитное отношение, $M_0 = |\mathbf{M}_0|$, α — постоянная обмена.

Образ Фурье усредненной функции Грина для уравнения (14) имеет вид

$$G(v, \mathbf{k}) = \frac{1}{v - k^2 - M(v, \mathbf{k})}, \quad (15)$$

где $M(v, \mathbf{k})$ — классический аналог массового оператора, который в приближении Бурре [24] может быть представлен в виде [22]

$$M(v, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda^2}{8\pi} \int \frac{K(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \sqrt{v}|\mathbf{r}|)] d\mathbf{r}. \quad (16)$$

В тонкой пленке магнитная восприимчивость $\hat{\chi} \sim G$ [20], поэтому в дальнейшем при исследовании спиновых волн в сверхрешетке с неоднородным параметром анизотропии мы будем обсуждать поведение функции Грина $G(v, \mathbf{k})$.

Подставляя в выражение (16) $K(\mathbf{r})$ в форме (7) с K_m в виде (12) и переходя к сферической системе координат с полярной осью вдоль \mathbf{k} ($\mathbf{k} \parallel Oz$), имеем

$$M(v, \mathbf{k}) = -\frac{\Lambda^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \int_0^{\infty} dr r \exp(-i\sqrt{v}r) \times \int_0^1 dc \frac{\sum_{j,h=0}^1 \exp\{i(-1)^j r [(2m+1)q + (-1)^h k] c\}}{\left[1 + \frac{C^2}{e^2} k_2^2 r^2 (1 - c^2)\right]^{(2m+1)^2 \gamma_2^2}}, \quad (17)$$

где $c = \cos \vartheta$, ϑ — полярный угол. Мы исследуем здесь высокочастотную восприимчивость на границах нечетных зон Бриллюэна ($k = k_{rp} \equiv pq/2$). После выполнения интегрирования по r в (17), подставляя полученное

выражение в функцию Грина (15) и вводя безразмерные величины, получаем

$$\Delta G(v) = \left\{ X_p + \frac{4}{\pi^2} \frac{v_{rp}}{\Lambda \eta_{2p}^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \left(\frac{e}{C} \right)^a \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{dc}{(1-c^2)^a} \sum_{j,h=0}^1 J_{jhm}(c, X_p) \right\}^{-1}, \quad (18)$$

где

$$X_p = \frac{v - v_{rp}}{\Lambda}, \quad \eta_{2p} = \frac{2k_2 k_{rp}}{\Lambda},$$

$v_{rp} = k_{rp}^2$, $a = (2m+1)^2 \gamma_2^2$, $p = 1, 3, 5, \dots$ — номер нечетной зоны,

$$J_{jhm}(c, X_p) = -2^{-1/2-a} \sqrt{\pi} \Gamma(1-a) \left(\frac{e^2}{C^2(1-c^2)} \right)^{1-a} \\ \times \left[\frac{2^{-1/2+a}}{\sqrt{\pi} \Gamma(2-a)} - \frac{\mathbf{H}_{3/2-a}(i w_{jhm}^{(p)})}{(i w_{jhm}^{(p)})^{1/2-a}} + \frac{Y_{3/2-a}(i w_{jhm}^{(p)})}{(i w_{jhm}^{(p)})^{1/2-a}} \right]. \quad (19)$$

Здесь

$$w_{jhm}^{(p)} = \frac{e}{\eta_{2p} C \sqrt{1-c^2}} \left[X_p + \frac{2v_{rp}}{\Lambda} \right. \\ \left. \times \left(1 + (-1)^j c \frac{4m+2+(-1)^h p}{p} \right) \right], \quad (20)$$

$\mathbf{H}_v(z)$, $Y_v(z)$ и $\Gamma(z)$ — соответственно функции Струве, Неймана и гамма-функция. Однако выражение (19) справедливо при $(2m+1)^2 \gamma_2^2 \neq N$, где N — целое число. При $(2m+1)^2 \gamma_2^2 = N$ вместо функции $J_{jhm}(c, X_p)$ в (18) стоят более простые выражения. Так, при $(2m+1)^2 \gamma_2^2 = 1$ под интегралом в формуле (18) следует записать функцию

$$F_{jhm}(c, X_p) = \frac{1}{2} \left[\exp(-w_{jhm}^{(p)}) E_1(-w_{jhm}^{(p)}) \right. \\ \left. + \exp(w_{jhm}^{(p)}) E_1(w_{jhm}^{(p)}) \right], \quad (21)$$

а при $(2m+1)^2 \gamma_2^2 = 2$ функция имеет вид

$$P_{jhm}(c, X_p) = \frac{C^2(1-c^2)}{2e^2} \left\{ 1 - \frac{w_{jhm}^{(p)}}{2} \right. \\ \left. \times \left[\exp(w_{jhm}^{(p)}) E_1(w_{jhm}^{(p)}) - \exp(-w_{jhm}^{(p)}) E_1(-w_{jhm}^{(p)}) \right] \right\}. \quad (22)$$

Если в выражении (20) при $m=0$ и $p=1$ выбрать $j=h=1$, то оно перейдет в выражение для w в работе [23].

Интеграл по c в (18) находился численно. При больших значениях аргументов функций Струве и Неймана

использовалась асимптотика их разности [14]

$$\mathbf{H}_v(\xi) - Y_v(\xi) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(v+1/2)(\xi/2)^{1-v}} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(v-1/2)(\xi/2)^{3-v}} \right\}, \quad (23)$$

где $|\xi| \gg 1$, $|\arg \xi| < \pi$. Отметим, что в выражении (18) вследствие принятого нами приближения узких запрещенных зон справедливо неравенство $\Lambda/v_{r1} \ll 1$. Кроме того, при выводе (18) использовалось условие малости затухания, обусловленного 2D-неоднородностями: $k_2 \gamma_2^2 \ll k_{r1}$.

При отсутствии неоднородностей в сверхрешетке и в пренебрежении собственным затуханием волн ширина щели в спектре при $k = k_{rp}$ (соответствующая расстоянию между уровнями расщепленного спектра $v_+(k_{rp})$ и $v_-(k_{rp})$) $\Delta v_g = \Lambda_1/p$, где $\Lambda_1 = 2\sqrt{2}\Lambda/\pi$. При этом на зависимости $G''(v) = \text{Im } G(v)$ будут наблюдаться два δ -образных пика на расстоянии $\Delta v_p = \Delta v_g$ друг от друга. При наличии в сверхрешетке случайных неоднородностей происходит модификация этих пиков. По мере роста среднеквадратичных флуктуаций пики расширяются, уменьшаются по высоте и сближаются, пока не сольются в один пик (1D-неоднородности) [10], или расширяется и резко уменьшается по высоте до полного его исчезновения только один пик при неизменности второго (2D-неоднородности) [23]. При этом $\Delta v_p \neq \Delta v_g$, однако Δv_p может быть использовано для оценки поведения ширины щели Δv_g .

Как видно из (18), использованная нами многозонная схема расчета позволяет исследовать частотную зависимость магнитной восприимчивости (функции Грина) на границах всех нечетных зон Бриллюэна. Рассмотрим границу первой зоны Бриллюэна ($p=1$). Поскольку $K(\mathbf{r})$, как это следует из выражений (7)–(9) и рис. 2, с большой точностью описывается первыми двумя слагаемыми, при численных расчетах в (18) мы ограничимся учетом членов суммы по m с $m=0$ и $m=1$, т.е. рассмотрим спектр волн на границе первой зоны Бриллюэна с учетом влияния третьей зоны. Результаты расчетов для мнимой части функции Грина (18) на границе первой зоны Бриллюэна с большой точностью повторяют графики на рис. 2 работы [23] при замене в последнем нормировки с Λ на Λ_1 . Такое соответствие обусловлено тем, что в разложении в ряд Фурье функции, описывающей идеальную сверхрешетку с прямоугольным профилем, первая гармоника ($m=0$) с периодом l имеет наибольшую амплитуду, в результате чего основной вклад в $G(v)$ на границе первой зоны Бриллюэна дает слагаемое в (18) с $j=h=1$, близкое к функции Грина для синусоидальной сверхрешетки [23].

Рассмотрим теперь границу третьей зоны Бриллюэна сверхрешетки ($p=3$). По-прежнему ограничимся в (18) учетом первых двух слагаемых по m . На рис. 4 представлены результаты расчетов для мнимой части функции Грина (18) на границе третьей зоны Бриллюэна. Видно,

что пик на краю запрещенной зоны в спектре волн с меньшей частотой остается практически неизменным при росте γ_2 , а пик на краю запрещенной зоны с большей частотой с ростом γ_2 расширяется и уменьшается по высоте. Таким образом, качественное поведение пиков магнитной восприимчивости на границах первой и третьей зон Бриллюэна совпадает. Однако на границе третьей зоны правый пик исчезает при значительно меньшей величине γ_2 . Конечная высота левого пика на рис. 4 и ненулевая его ширина обусловлены введением при численных расчетах „затравочного“ затухания $\Gamma_0/\Lambda = 0.03$ для устранения расходимостей.

На рис. 5 изображено расстояние между пиками мнимой части функции Грина (18) в зависимости от квадрата среднеквадратичной флуктуации 2D-неоднородностей γ_2^2 на границах первой и третьей зоны. Отметим, что на этом рисунке и на следующих имеются точки, дополнительно обведенные звездой. В этих точках выполняется соотношение $(2m+1)^2\gamma_2^2 = 1$, при котором в функции Грина (18) вместо $J_{jhm}(c, X_p)$ использовалось выражение (21). Как видно из рис. 5, эти точки хорошо вписываются в последовательность, соответствующую другим значениям γ_2^2 . Из рис. 5 следует, что на зависимости магнитной восприимчивости от частоты остается один пик на границе третьей зоны при значении γ_2^2 , примерно на порядок меньшем, чем на границе первой зоны Бриллюэна. Тем не менее ширина щели в спектре волн на границе третьей зоны Бриллюэна под действием 2D-неоднородностей уменьшается в значительно меньшей степени, чем в присутствии 1D-неоднородностей. Согласно [10], ширина щели в спектре волн в сверхрешетке с 1D-неоднородностями определяется

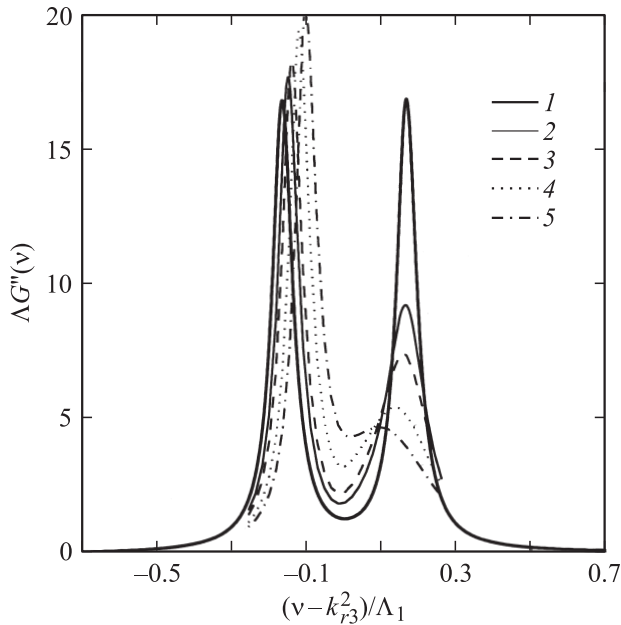


Рис. 4. Мнимая часть функции Грина (18) на границе третьей зоны Бриллюэна сверхрешетки с 2D-неоднородностями при $\eta_{21} = 4$, $\nu_{r1}/\Lambda = 20$ и значениях $\gamma_2^2 = 0$ (1), 0.03 (2), 0.05 (3), 0.1 (4) и 0.16 (5).

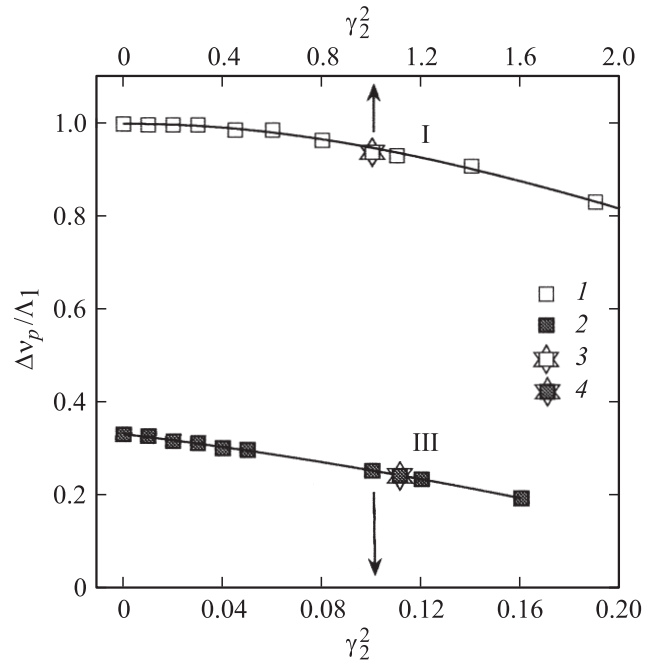


Рис. 5. Расстояние между пиками мнимой части функции Грина $\Delta\nu_p/\Lambda_1$ в зависимости от γ_2^2 . 1 — на границе первой зоны Бриллюэна, 2 — на границе третьей зоны. Точки 3 и 4 отмечают значения $\gamma_2^2 = 1/(2m+1)^2$, при которых в подынтегральном выражении в (18) использована функция (21). Сплошные кривые I и III получены соответственно интерполяцией последовательностей точек 1, 3 и 2, 4.

выражением

$$\Delta\nu_g = \frac{\Lambda_1}{p} \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{8} \gamma_1^4 p^8 \eta_1^2}, \quad (24)$$

где $\eta_1 = qk_1/\Lambda$; γ_1 и k_1 — соответственно относительная среднеквадратичная флуктуация 1D-неоднородностей фазы сверхрешетки и их корреляционное волновое число. Как видно из этой формулы, закрытие щели в спектре волн на границе третьей зоны Бриллюэна происходит при значениях γ_1^2 , на два порядка меньших, чем закрытие щели на границе первой зоны Бриллюэна. Таким образом, действие 2D-неоднородностей на спектр на границах нечетных зон Бриллюэна оказывается значительно менее выраженным, чем действие 1D-неоднородностей. Причем с ростом номера зоны p эта закономерность проявляется в большей степени.

На рис. 6 изображены полуширины пиков, определенные на половине высоты соответствующих пиков функции $G''(\nu)$, на границах первой и третьей зоны. При построении зависимости полуширин левого и правого пиков от γ_2^2 для 2D-неоднородностей на границе первой и на границе третьей зоны из рассчитанных полуширин пиков вычиталась величина затравочного затухания $\Gamma_0/\Lambda = 0.03$. Поэтому полуширины на этом рисунке не соответствуют значениям на рис. 4; в частности, полуширина левого пика после такой операции приближенно обращается в нуль. Видна резкая асимметрия в полу-

ширинах левого и правого пиков, которая у последнего практически линейно возрастает с ростом γ_2^2 . Полуширина правого пика на границе третьей зоны больше, чем на границе первой зоны при тех же значениях γ_2^2 . Наклон прямой $\Gamma_3(\gamma_2^2)$ также больше наклона прямой $\Gamma_1(\gamma_2^2)$, хотя на рис. 6 визуально соотношение наклонов противоположное, что обусловлено различием масштаба на верхней и нижней горизонтальной шкале. Эти результаты согласуются с полученными в [10] для затухания v_g'' волн в сверхрешетке с 1D-неоднородностями. При открытой щели в спектре волн

$$v_g'' = \gamma_1^2 k_1 q p^3. \quad (25)$$

Из этой формулы следует линейная зависимость затухания от γ_1^2 на границе любой нечетной зоны Бриллюэна, а также рост угла наклона прямой с увеличением номера p зоны. Отметим, что согласно (25) коэффициент при γ_1^2 для v_g'' при $p = 3$ по сравнению с коэффициентом для v_g'' при $p = 1$ увеличивается в ≈ 30 раз, в то время как для сверхрешетки с 2D-неоднородностями этот коэффициент увеличивается всего в 3 раза.

На рис. 7 показано положение максимумов левого и правого пиков в зависимости от величины среднеквадратичных флуктуаций на границе первой и третьей зоны Бриллюэна. Наблюдается небольшая асимметрия в

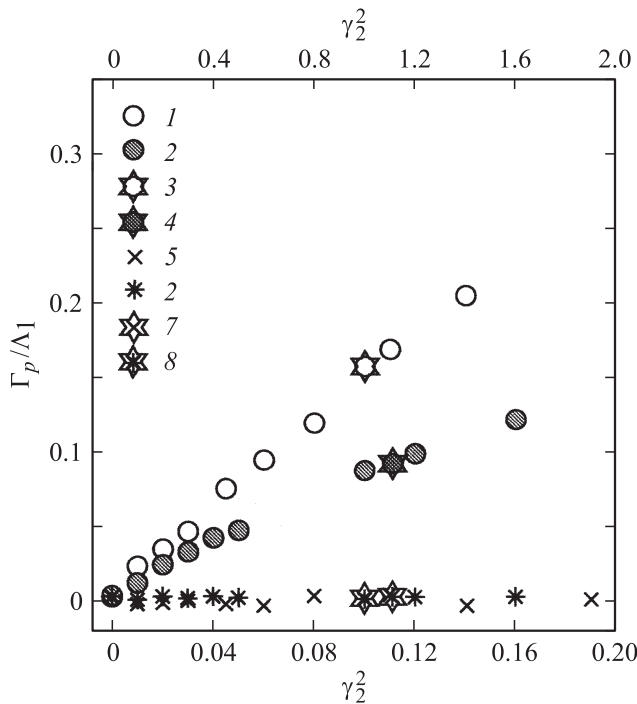


Рис. 6. Полуширина пиков мнимой части функции Грина Γ_p/Λ_1 на половине своей высоты в зависимости от γ_2^2 . 1 и 5 — на границе первой зоны Бриллюэна для правого и левого пиков соответственно (отсчет γ_2^2 по верхней шкале), 2 и 6 — на границе третьей зоны для правого и левого пиков соответственно (отсчет γ_2^2 по нижней шкале). Точки 3, 4, 7, 8 отмечают значения $\gamma_2^2 = 1/(2m + 1)^2$, при которых в подынтегральном выражении в (18) использовано выражение (21).

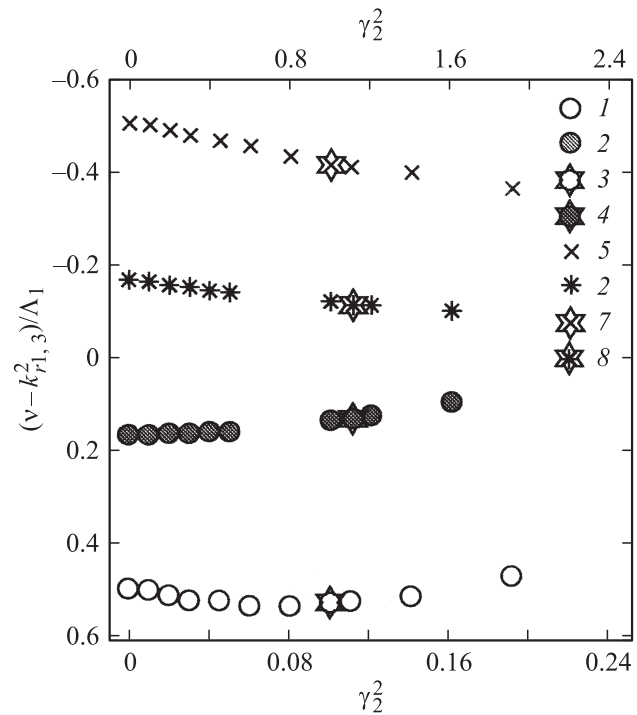


Рис. 7. Положение пиков мнимой части функции Грина в зависимости от γ_2^2 . 1 и 5 — на границе первой зоны Бриллюэна для правого и левого пика соответственно (отсчет γ_2^2 по верхней шкале), 2 и 6 — на границе третьей зоны для правого и левого пика соответственно (отсчет γ_2^2 по нижней шкале). Точки 3, 4, 7, 8 отмечают значения $\gamma_2^2 = 1/(2m + 1)^2$, при которых в подынтегральном выражении в (18) использована формула (21).

положении пиков по отношению к центрам запрещенных зон и смещение центров зон в область более высоких частот. Отметим также, что при исчезновении правого пика левый пик оказывается смещенным от центра запрещенной зоны в идеальной сверхрешетке в область более низких частот.

Обсудим полученный в работе эффект асимметрии ширин и амплитуд пиков функции Грина, обусловленный присутствием в сверхрешетке 2D-неоднородностей. Это удобнее сделать, используя представление массового оператора функции Грина через спектральную плотность $S(\mathbf{k})$ — образ Фурье корреляционной функции. В этом случае в приближении Бурре

$$M(v, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda^2}{2} \int \frac{S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)}{v - k_s^2} d\mathbf{k}_s. \quad (26)$$

Спектральную плотность сверхрешетки с 2D-неоднородностями, соответствующую корреляционной функции (7), можно записать в виде

$$S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S_m(\mathbf{k}_{s\perp})}{(2m + 1)^2} [\delta(k_z - k_{sz} - (2m + 1)q) + \delta(k_z - k_{sz} + (2m + 1)q)], \quad (27)$$

где $\mathbf{k}_{s\perp} = \{k_{sx}, k_{sy}\}$. Подставляя $S(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)$ в такой форме в (26) и интегрируя по k_{sz} , имеем

$$M(\nu, \mathbf{k}) = \frac{\Lambda^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \times \int \frac{d\mathbf{k}_{s\perp} S_m(\mathbf{k}_{s\perp})}{\nu - (k_z - (2m+1)q)^2 - k_{s\perp}^2}. \quad (28)$$

Поскольку мы рассматриваем главную ветвь спектра волн в области $k_z > 0$, в (28) опущены слагаемые, обусловленные вторым слагаемым в квадратных скобках в (27). Как известно, закон сохранения импульса в неоднородной среде отсутствует. Однако на модуль волнового вектора налагаются ограничения, следующие из закона сохранения энергии падающей и рассеянной волн и закона дисперсии рассеянной волны. Закон сохранения энергии при распространении волны в сверхрешетке с 2D-неоднородностями определяется полюсом на действительной оси в подинтегральной функции выражения (28)

$$k_{s\perp}^2 = \nu - (k_z - (2m+1)q)^2. \quad (29)$$

Этот же полюс определяет и затухание падающей волны. Рассмотрим границу первой зоны Бриллюэна: $k_z = k_{r1} = q/2$. При $m = 0$ из (29) следует закон сохранения, полученный в [23]

$$k_{s\perp}^2 = \nu - \nu_{r1}, \quad (30)$$

где $\nu_{r1} = k_{r1}^2$ — частота, соответствующая центру запрещенной зоны в идеальной сверхрешетке на границе первой зоны Бриллюэна. Закон сохранения (30) выполняется только для частот $\nu > \nu_{r1}$. Следовательно, затухание будет возникать в области правого пика невозмущенной функции Грина при $\nu = \nu_{r1} + \Lambda_1/2$ (рис. 6). Для частот $\nu < \nu_{r1}$ рассеяние волн запрещено, в результате чего в области левого пика функции Грина при $\nu = \nu_{r1} - \Lambda_1/2$ затухание волны будет отсутствовать. Для $m > 0$ и значениях ν в окрестности ν_{r1} закон сохранения (29) на границе первой зоны Бриллюэна ($k_z = k_{r1}$) не может быть выполнен. Это означает, что слагаемые в (18) с $m > 0$ не дадут вклада в затухание волн в окрестности границы первой зоны.

На границе третьей зоны Бриллюэна ($k_z = k_{r3} = 3q/2$) при $m = 1$ из (29) следует

$$k_{s\perp}^2 = \nu - \nu_{r3}, \quad (31)$$

где $\nu_{r3} = k_{r3}^2$ — частота, соответствующая центру запрещенной зоны на границе третьей зоны Бриллюэна. Этот закон может быть выполнен для частот $\nu > \nu_{r3}$, а для частот $\nu < \nu_{r3}$ рассеяние волн запрещено. Это означает, что затухание будет возникать в области правого пика функции Грина и отсутствовать в области левого пика (рис. 4, 6). На границе третьей зоны Бриллюэна для $m = 0$ из (29) снова следует (30) с тем, однако, отличием, что теперь ν изменяется в окрестности ν_{r3} . При

таких ν закон сохранения (30) может быть выполнен, что означает существование вклада в затухание волн в окрестности границы третьей зоны Бриллюэна первого слагаемого в (18) с $m = 0$. Тем не менее на границе третьей зоны возникает асимметрия пиков функции Грина (рис. 4), обусловленная законом сохранения (31). При $m > 1$ и значениях ν в окрестности ν_{r3} закон сохранения (29) на границе третьей зоны Бриллюэна не может быть выполнен. Следовательно, слагаемые в (18) с $m > 1$ не дадут вклада в затухание таких волн. Это обстоятельство служит дополнительным обоснованием сделанного ранее выбора первых двух слагаемых в сумме по m в выражении (18) при численном исследовании функции Грина.

Таким образом, из (29) следует, что на границе нечетной зоны Бриллюэна с номером p ($k_z = k_{rp}$) затухание волны в (18) описывают слагаемые с $m \leq (p-1)/2$, в то время как слагаемые с m , не удовлетворяющим этому соотношению, не дают вклада в затухание.

4. Заключение

Исследована высокочастотная восприимчивость ферромагнитной слоистой структуры (сверхрешетка, изначально имеющая прямоугольный профиль) с 2D-неоднородностями. Такие неоднородности можно рассматривать как предельный случай вытянутых вдоль оси сверхрешетки дефектов, когда корреляционный радиус в этом направлении $\tilde{r}_{\parallel} \gg \tilde{r}_{\perp}$ — корреляционного радиуса неоднородностей в плоскости xu . На практике такая ситуация может реализоваться, например, когда неоднородности поверхностей слоев сверхрешетки являются следствием неоднородной деформации поверхности подложки, на которую производится напыление этих слоев. При этом случайные в плоскости xu деформации могут практически синфазно повторяться на поверхности каждого нового напыленного слоя, и сверхрешетка приближенно будет описываться корреляционной функцией, имеющей конечный радиус корреляции в плоскости слоев xu и бесконечный вдоль оси z .

Вычислена корреляционная функция слоистой системы с двумерными фазовыми неоднородностями. С помощью аппроксимации корреляционной функции простым выражением показано, что обнаруженный ранее [23] для первой зоны Бриллюэна синусоидальной сверхрешетки эффект асимметрии амплитуд и ширины пиков функции Грина на краях щели в спектре волн, возникающий под действием 2D-неоднородностей, имеет место в многослойной ферромагнитной системе с неоднородным параметром магнитной анизотропии на границах всех нечетных зон Бриллюэна. Этот эффект, являясь следствием закона сохранения энергии падающей и рассеянной волн [23], по-видимому, может иметь место в сверхрешетках и другого типа при наличии в них 2D-неоднородностей. В частности, его следует ожидать в изначально идеальной одномерной сверхрешетке с произвольной толщиной границ раздела слоев [11].

Эффект асимметрии пиков может быть использован на практике при изучении неоднородностей в сверхрешетке. Экспериментальное наблюдение на высокочастотной восприимчивости этого эффекта свидетельствовало бы о наличии в сверхрешетке 2D-неоднородностей.

Авторы признательны В.А. Игнатченко за интерес к работе и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

- [1] Л. Бриллюэн, М. Пароди. Распространение волн в периодических структурах. ИИЛ, М. (1959). 457 с.
- [2] Л.М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Наука, М. (1973). 342 с.
- [3] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками. Наука, М. (1989). 288 с.
- [4] В.Ф. Шабанов, С.Я. Ветров, А.В. Шабанов. Оптика реальных фотонных кристаллов. Изд-во СО РАН, Новосибирск (2005). 240 с.
- [5] Ш. Элаши. ТИИЭР **64**, 22 (1976).
- [6] А.П. Силин. УФН **147**, 485 (1985).
- [7] В.Н. Игнатович. УФН **150**, 145 (1986).
- [8] Ю.В. Гуляев, В.П. Плесский. УФН **157**, 85 (1989).
- [9] Ю.И. Горобец, А.Е. Зюбанов, А.Н. Кучко, К.Д. Шеджури. ФТТ **34**, 1486 (1992).
- [10] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. J. Phys.: Cond. Matter **11**, 2773 (1999).
- [11] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **62**, 2181 (2000).
- [12] В.А. Игнатченко, О.Н. Лалетин. ФТТ **46**, 2216 (2004).
- [13] V.S. Tkachenko, V.V. Kruglyak, A.M. Kuchko. J. Magn. Mater. **307**, 48 (2006).
- [14] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. Наука, М. (1979). 832 с.
- [15] С.М. Рыгов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Наука, М. (1978). 463 с.
- [16] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov. Phys. Rev. B **56**, 194 (1997).
- [17] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **59**, 42 (1999).
- [18] А.Н. Малахов. ЖЭТФ **30**, 884 (1956).
- [19] С.М. Рыгов. Введение в статистическую радиофизику. Ч. I. Наука, М. (1976). 494 с.
- [20] В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков, А.В. Поздняков. ЖЭТФ **116**, 1335 (1999).
- [21] V.A. Ignatchenko, Yu.I. Mankov, A.A. Maradudin. Phys. Rev. B **65**, 024 207 (2002).
- [22] V.A. Ignatchenko, A.A. Maradudin, A.V. Pozdnyakov. Phys. Met. Metallogr. **91**, S69 (2001).
- [23] В.А. Игнатченко, Ю.И. Маньков, Д.С. Цикалов. ЖЭТФ **134**, 706 (2008).
- [24] R.C. Bourret. Nuovo Cimento **26**, 1 (1962); Canad. J. Phys. **40**, 782 (1962).