# КВАНТОВАЯ АНАЛОГИЯ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

© *Ю.В.Петров*

Научно-исследовательский институт математики и механики
им. В.И.Смирнова при Санкт-Петербургском государственном университете,
198904 Петродворец, Россия
(Поступила в Редакцию 27 мая 1996 г.)

Обсуждается связь между основными положениями структурной макромеханики разрушения и идеями классической квантовой механики. Анализируются дискретные особенности динамики разрушения твердых тел.

Бесспорно, что процесс разрушения является многостадийным и многоуровневым, а его адекватное моделирование связано с необходимостью привлечения самых современных средств экспериментальной и вычислительной техники. Публикуемые в последние десятилетия работы по этой проблематике используют самый обширный арсенал средств современной науки. В то же время становится все более актуальной задача формулирования приемлемых для инженерной практики принципов, так как используемые во многих известных, в основном численных, моделях методы и приемы анализа, к сожалению, оказываются реально доступными только их авторам. Для практических целей очень важно располагать ясными аналитическими инструментами, позволяющими сводить качественный анализ разрушения к простым «индустриальным» процедурам. Одним из наиболее ярких примеров такого практического подхода является структурная макромеханика разрушения [1–3]. В то время, как это часто и случается с хорошо работающими на практике теориями, данная теория хрупкого разрушения отражает и глубокие структурно-масштабные закономерности процесса разрыва твердых тел. Базовые принципы, на которых она основывается, по существу восходят к системе представлений новой физики начала нашего столетия. В данной работе обсуждается связь между основными положениями структурной макромеханики разрушения и идеями классической квантовой механики. Реальные квантовые свойства кинетики разрушения твердых тел излучались в [4,5]. Здесь рассматривается макроскопическая трактовка «квантовых» особенностей разрыва материалов, основанная на формальной аналогии с классическими квантово-механическими принципами.

## 1. О критерии Нейбера–Новожилова

В разное время и на основе различного уровня рассмотрений Нейбером [1] и Новожиловым [2,3] был предложен критерий разрушения

$$\frac{1}{d}\int_0^d \sigma dr \leqslant \sigma_c. \tag{1}$$

Здесь $\sigma$ — главное растягивающее напряжение в окрестности вершины трещины ($r = 0$), $\sigma_c$ — предел прочности бездефектного материала.

Главной особенностью критерия (1) является явное введение некоторого структурного размера $d$. Заметим, что структурная характеристика размерности длины неявно уже присутствует в классической механике разрушения, проявляясь в виде размерных комбинаций параметров классических критериев прочности

$$d \sim \frac{\Gamma E}{\sigma_c^2}, \quad d \sim \frac{K_{Ic}^2}{\sigma_c^2}, \tag{2}$$

где $E$ — модуль Юнга, $\Gamma$ — удельная поверхностная энергия, $K_{Ic}$ — статическая вязкость разрушения материала. Относительно физической природы параметра $d$ существуют разные предположения различных ученых (межатомное расстояние для среды с регулярной атомной структурой, размер зерна для поликристаллической среды, параметр масштабного соответствия прочностных характеристик и т.д.). В дальнейшем мы предлагаем рассматривать параметр $d$ как линейный размер, характеризующий элементарную ячейку разрушения на данном масштабном уровне. Не проводя дальнейшей детализации этого понятия, будем выбирать $d$ из условия

$$d = \frac{2K_{Ic}^2}{\pi\sigma_c^2}, \tag{3}$$

обеспечивающего совпадение критерия (1) с критерием Гриффитса–Ирвина в «простых» случаях.

Критерий (1) совместно с условием (3) позволяет эффективно предсказывать разрушение во многих нестандартных ситуациях, включая известные своей недоступностью для теории Гриффитса–Ирвина случаи разрушения пластин с угловыми и луночными вырезами [6,7].

Первоначально соотношение (1) было рассмотрено в качестве необходимого и достаточного условия устойчивости регулярной атомной решеточной структуры [2,3] и не получило достаточного признания как условие разрушения твердых тел. Отчасти это было связано с однозначной трактовкой параметра $d$ как межатомного расстояния, что, конечно, не давало возможности правильно оценивать предельные нагрузки для реальных сред и конструкционных материалов. Очевидно, однако, что данное ограничение не является принципиальным. Более поздние исследования показали [6], что критерий (1) при правильном выборе параметра $d$ является ничуть не менее, а в ряде случаев и более эффективным средством прогнозирования разрушения, чем другие известные критерии, предложенные различными авторами примерно в то же время.

## 2. Структурная макромеханика разрушения

Рассмотрим базовые принципы подхода Новожилова. Они могут быть сведены к следующим положениям: 1) все твердые тела состоят из пространственных структурных элементов конечного размера; 2) элементарный акт разрушения есть разрушение одного структурного элемента; 3) параметры критерия, в том числе и размер структурного элемента, должны выбираться так, чтобы в предельных «хороших» случаях получались результаты классической теории разрушения.

Применим эти принципы для формулировки соответствующего условия разрушения. Рассмотрим статическое двумерное поле напряжений, например, в условиях плоской деформации и предположим, что разрушение происходит вдоль некоторого направления $Ox$, являющегося линией симметрии. В соответствии с первым из вышеперечисленных принципов будем считать, что на пространственной шкале задана структура (рис. 1, *a*), а линейный размер одной структурной составляющей равен $d$. В соответствии со вторым принципом [2] будем предполагать, что макроразрушение произошло, если вышел из строя хотя бы один структурный элемент. Запишем естественное условие разрыва в виде условия достижения силой, действующей на структурный элемент, некоторого критического значения

$$F \leqslant F_c. \tag{4}$$

В терминах континуального поля напряжений, с которым мы в действительности и имеем дело в механике сплошной среды, это соотношение может быть переписано в виде

$$\int\limits_{x-d}^{x} \sigma dr \leqslant \sigma_c d. \tag{5}$$

Последнее условие и представляет собой силовой критерий Новожилова. Напряжение $\sigma_c$ можно рассматривать как обозначение для некоторого критического напряжения, вводимого взамен критической силы $F_c$.

Для определения $\sigma_c$ и введенного линейного размера применим третий базовый принцип. Применим (5) к задаче о разрушении однородного бездефектного образца. Полагая, что разрушение в этом случае определяется классическим критерием прочности $\sigma \leqslant \sigma_B$, получаем

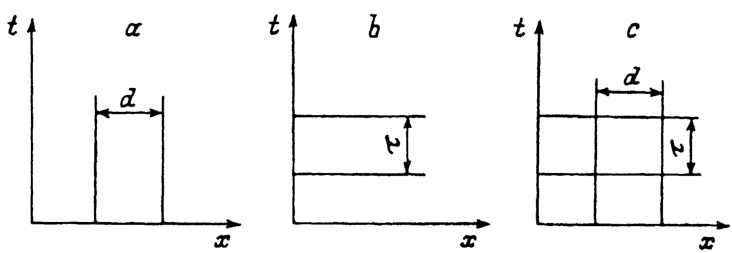


**Рис. 1.** Пространственно-временная структура разрушения.

*a* — линейный размер, *b* — инкубационное время, *c* — пространственно-временная ячейка разрушения.

$\sigma_c = \sigma_B$. Рассмотрим теперь классическую задачу о гриффитсовской трещине и критерий разрушения Ирвина. Подставим соответствующее растягивающее напряжение на продолжение трещины

$$\sigma = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} + O(1), \quad r \to 0, \tag{6}$$

в критерий (5). Интегрируя по $r (r = x - d)$ от 0 до $d$ и учитывая $K_I \leqslant K_{Ic}$, получаем для линейного размера формулу (3).

Физический смысл параметра $\sigma_c$ сомнений не вызывает; это хрупкая прочность бездефектного образца. Относительно $d$ существуют различные мнения. Не следует связывать $d$ с какими-либо характеристиками внутренней структуры материала (межатомными расстояниями, физико-геометрическими параметрами движения дислокаций, зернами, блоками зерен и т.п.). Подобно тому как реальная прочность поликристалла (например, сплава) $\sigma_c$ напрямую не связана с прочностью атомной решетки отдельного монокристаллического блока, составляющего данный поликристалл, линейный размер $d$ также не должен, вообще говоря, однозначно определяться реальной геометрической структурой материала. Параметры $\sigma_c$ и $d$ являются равноправными и самостоятельными характеристиками процесса разрушения. Поэтому наиболее естественной нам представляется данная в [8] трактовка $d$ как параметра масштабного соответствия, определяющего корреляцию прочности свойств материала на заданном масштабном уровне. Гораздо важнее, чтобы в соответствии с основополагающими принципами физики вводимые в теорию подобные определяющие параметры были измеряемыми, т.е. могли быть прямо или косвенно определены из опытов. Относительно $\sigma_c$ и $d$ данное требование удовлетворяется.

Вышеприведенный подход допускает естественное обобщение на случай динамики. Пусть при прежних условиях напряженное состояние среды однородно в пространстве и изменяется лишь во временно́й шкале (рис. 1, $b$). Пусть на временной шкале также задана структура. Соответствующий «размер» назовем структурным (инкубационным) временем разрушения и обозначим $\tau$. Предположим, что разрушение происходит, если силовой импульс, действующий в течение времени $\tau$, достигает критического значения

$$J(t) \leqslant J_c. \tag{7}$$

В терминах континуальной мехники имеем

$$\int\limits_{t-\tau}^{t} \sigma dt' \leqslant \sigma_c \tau. \tag{8}$$

Здесь $\tau$ трактуется как минимальное время, необходимое для разрушения элемента при действии напряжения, равного $\sigma_c$.

В общем случае пространственно-временно́й неоднородности динамического поля напряжений имеем комбинацию двух предыдущих вариантов и соответствующую пространственно-временну́ю ячейку разрушения (рис. 1, $c$). Ей отвечает структурно-временной критерий

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} dt'\frac{1}{d}\int\limits_{0}^{d}\sigma(t',r)dr \leqslant \sigma_c. \tag{9}$$

Таким образом, параметры $\sigma_c$, $d$ и $\tau$ образуют систему определяющих параметров данной теории разрушения. Дальнейшая проблема состоит в адекватном выборе параметра $\tau$, который отвечает за динамические особенности хрупкого разрушения материала. Динамический критерий разрушения в форме (9) впервые был предложен в [9]. Покажем, что данный подход является эффективным средством анализа высокоскоростного разрушения твердых тел.

### 3. Временна́я зависимость прочности хрупких материалов

Рассмотрим откольное разрушение в классической одномерной постановке. Исторически первые попытки анализа откола были связаны с применением критерия критического выражения $\sigma \leqslant \sigma_c$, который, как показали опыты, не описывает многих существенных черт откольного разрушения, выражаемых временно́й зависимостью прочности и пространственным распределением разрушения. Заметим также, что в случае разрушения, вызываемого кратковременными импульсами большой амплитуды, критерий критического напряжения противоречит закону изменения количества движения. Так, принимая, что разрушение инициируется волнами прямоугольного профиля с продолжительностью $t_0$, получим для порогового значения импульса силы величину $U_* = \sigma_c t_0$, которая за счет уменьшения $t_0$ может быть сделана сколь угодно малой. Отсюда будет следовать, что даже бесконечно малые силовые импульсы, которые не в состоянии сколько-нибудь существенно изменить количество движения материальных частичек, способны вызвать разрушение.

Рассмотрим структурно-временно́й критерий (8), учитывающий импульсные характеристики поля напряжений и структурные особенности процесса разрушения.

В случае однородного бездефектного материала естественным определением структурного времени является $\tau = d/c$, где $c$ — максимальная скорость волн в упругой среде. Инкубационное время, таким образом, рассматривается как характерное (среднее) время передачи взаимодействия между двумя соседними элементами структуры разрушения.

Рассмотрим отражение треугольного импульса сжимающей нагрузки от свободного конца полубесконечного стержня. Ось $Ox$ направлена вдоль стержня, который располагается справа от нуля ($x > 0$). Падающий импульс записывается в виде

$$\sigma_- = -P\left(1-\frac{ct+x}{ct_0}\right)\Big[H(ct+x)-H(ct+x-ct_0)\Big].$$

Здесь $P$ — амплитуда импульса, $t_0$ — его продолжительность, $H(t)$ — функция Хевисайда. Участок нарастания отсутствует. Отраженный

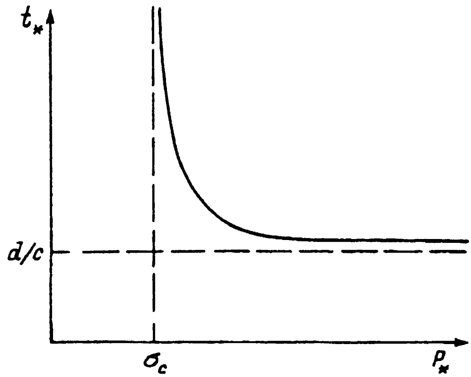


**Рис. 2.** Временна́я зависимость прочности в условиях откола.
$t_*$ — время до разрушения, $P_*$ — пороговая амплитуда начального импульса.

от свободного конца профиль напряжения будет иметь вид

$$\sigma_+ = +P\left(1 - \frac{ct - x}{ct_0}\right)\left[H(ct - x) - H(ct - x - ct_0)\right].$$

Суммарное напряжение будет выражаться как $\sigma = \sigma_- + \sigma_+$. Максимум растягивающего напряжения впервые возникнет в точке $x_0 = ct_0/2$. Вводя безразмерные величины $T = ct/d$, $T_0 = ct_0/d$, получим

$$\sigma\Big|_{x=x_0} = F + G,$$

$$F = \left(\frac{1}{2} - \frac{T}{T_0}\right)\left[H\left(T + \frac{T_0}{2}\right) - H\left(T - \frac{T_0}{2}\right)\right],$$

$$G = \left(\frac{3}{2} - \frac{T}{T_0}\right)\left[H\left(T + \frac{T_0}{2}\right) - H\left(T - \frac{3T_0}{2}\right)\right]. \qquad (10)$$

Минимальную для заданной продолжительности $t_0$ разрушающую амплитуду $P_*$ найдем из условия

$$\max_t I = \sigma_c, \qquad I = \int\limits_{T-1}^{T} \sigma dT. \qquad (11)$$

Из (10) следует, что максимум $I(T)$ будет приходиться на интервал интегрирования $(T_0/2, T_0/2+1)$, причем $\max_t I(t) = PT_0/2$, если $T_0 \leqslant 1$, и $\max_t I(T) = P(T_0 - 1/2)/T_0$, если $T_0 \geqslant 1$. Отсюда с учетом (11) получаем

$$T_* = \begin{cases} 1/[4(1 - \sigma_c/P_*)] + 1, & 1 \leqslant P_*/\sigma_c \leqslant 2, \\ 1 + \sigma_c/P_*, & P_*/\sigma_c \geqslant 2, \end{cases} \qquad (12)$$

где $T_* = ct_*/d$ — нормированное время до разрушения, определяемое как момент достижения интегралом из (8) критического значения. На рис. 2 показана соответствующая кривая.

Полученное соответствие между временем разрушения $t_*$ и пороговой амплитудой $P_*$ называется временно́й зависимостью прочности. Она показывает, что динамическая прочность не является постоянной материала, но зависит от времени до разрушения («времени жизни» образца). Критерий критического напряжения хорошо описывает квазистатическое разрушение на больших временах, вызываемое длительными волновыми импульсами. Но эксперименты также показывают [10], что в случае кратковременных нагружений появляется слабая зависимость времени разрушения от пороговой амплитуды с некоторой асимптотой. Этот эффект получил название явления динамической ветви временной зависимости прочности. Явление динамической ветви не имеет объяснения ни в рамках традиционных теорий прочности, ни в рамках известных временны́х критериев. Как показывают предыдущие рассмотрения, элементарное введение структурного элемента дает возможность построить единую кривую временно́й зависимости прочности (рис. 2). Статическая и динамическая ветви оказываются соединенными плавным переходом. Выясняется и физический смысл горизонтальной асимптоты: в рамках принятого допущения ($\tau = d/c$) она соответствует времени передачи взаимодействия между элементами структуры. Так, для алюминиевого сплава В95 ($\sigma_c = 460\,\mathrm{MPa}$, $K_{Ic} = 37\,\mathrm{MPa}\cdot\mathrm{m}^{1/2}$, $c = 6500\,\mathrm{m/s}$) $d/c = 2K_{Ic}^2/(\pi c \sigma_c^2) \approx 0.6\,\mu\mathrm{s}$; из полученных формул следует, что при изменении длительности нагружения в диапазоне от 2 до $0.5\,\mu\mathrm{s}$ пороговая амплитуда динамического нагружения (откольная прочность) увеличивается от 600 до 1400 MPa, что хорошо согласуется с данными экспериментов [10,11]. Как следует из (10)–(12), разрушение в сечении откола происходит с задержкой, т.е. после прохождения пика локального разрывающего напряжения, что также наблюдается в эксперименте.

Таким образом, временна́я зависимость прочности, попытки объяснения которой предпринимаются до сих пор, является элементарным следствием теории Новожилова, а наблюдаемые в экспериментах статическая и динамическая ветви временно́й зависимости прочности являются реализацией пространственной и временной структур процесса разрушения.

## 4. Аналогия с квантовой механикой

Рассматриваемая проблема динамической прочности при высокоскоростном нагружении по существу является аналогом проблемы низкотемпературной теплоемкости твердых тел в классической молекулярной физике (см., например, [12]). Проблема эта была решена в рамках квантовой механики. В основе квантово-механического подхода были положены постулаты о дискретном строении вещества (твердое тело есть совокупность элементарных осцилляторов), о дискретном характере выделения и поглощения энергии (энергия выделяется и поглощается элементарными порциями — квантами), а также принцип соответствия (требование, состоящее в том, чтобы в предельных «нормальных» случаях квантовая теория не противоречила классической). Эти соображения позволили преодолеть затруднения классической теории и объяснять зависимость удельной теплоемкости твердых тел от температуры. При этом оказалось, что при самых низких (близких

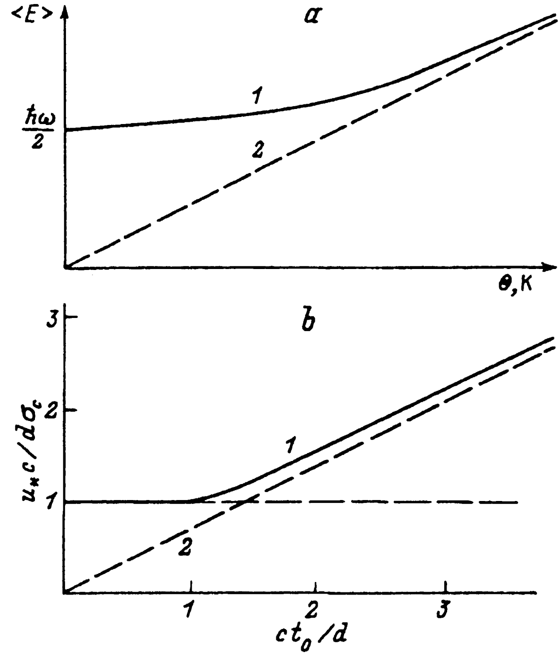


**Рис. 3.** Квантовая аналогия в теории разрушения.

*a* — зависимость внутренней энергии $\langle E\rangle$ от температуры $\Theta$: *1* — по квантовой теории, *2* — по классической молекулярной теории; *b* — зависимость порогового силового импульса разрушения $U_*$ от его длительности $t_0$ в условиях откола: *1* — по структурно-временно́му критерию, *2* — по критерию критического напряжения.

к абсолютному нулю) температурах энергия тела конечна и определяется величиной энергии элементарного кванта, а соответствующая температурная зависимость теплоемкости может быть достаточно просто вычислена. На рис. 3, *a* схематически показана зависимость внутренней энергии твердого тела $\langle E\rangle$ от температуры $\Theta$, рассчитанная по квантовой (сплошная линия) и по классической теории (штриховая линия). Очевидна аналогия между основными положениями квантовой механики и базовыми принципами теории Новожилова. Эта аналогия становится еще более очевидной, если подсчитать зависимость порогового (минимального разрушающего) силового импульса нагрузки от его длительности в случае откола. На рис. 3, *b* показана такая зависимость для рассмотренных выше треугольных импульсов $U = U_*(t_0) = P_* t_0/2$, полученная по структурно-временно́му критерию (сплошная кривая) и по классическому критерию критического напряжения (наклонная штриховая линия). Ясно, что, как и в случае с теплоемкостью при низких температурах, прочность при высоких скоростях нельзя моделировать на основе континуальных представлений. В классических критериях предполагается, что в процессе динамического разрыва материала энергия и импульс, идущие на образование новых поверхностей и областей разрушения, расходуются непрерывным образом. Выше было показано, что элементарный учет физической дискретности процесса динамического разрыва позволяет разрешить ряд противоречий классической механики разрушения. Кроме того, представление о «квантовой» природе динамического разрушения и соответствующие критерии (8), (9) позволяют в принципе обходиться без априорного введения кривых динамической прочности материала. В соответствии с (8), (9) динамическая прочность, а также динамическая вязкость разрушения хрупких сред с трещинами [13,14] могут теперь рассматриваться как расчетные характеристики.

Идея дискретности процесса разрушения неоднократно обсуждалась в научной литературе. Так, соображения о замене сплошной среды на дискретные геометрические структуры позволили получить важные выводы о природе хрупкого равновесия при предельных статических и динамических нагрузках. Общей особенностью этих соображений является введение дискретности на геометрическом уровне, т.е. анализ разрушения некоторой дискретной конструкции (например, цепочки или решетки) на основе квазистатических определяющих характеристик. Применяемые при таком подходе критерии разрыва остаются прежними, т.е. взятыми из статической континуальной механики разрушения. Например, естественным критерием разрыва связи в решетке может считаться достижение локальным растягивающим напряжением критического значения. Выше было установлено, что прямое перенесение этого принципа на динамические процессы некорректно. Анализ динамики разрушения требует следующего шага — дискретизации на уровне физическом, т.е. введения дискретности потребления энергии и импульса, необходимых для поддержания процесса разрушения. Такое положение дел типично для физики и неоднократно имело место при переходе от умеренных к экстремальным процессам. Приведенная выше аналогия с поведением теплоемкости твердых тел при низких температурах перекликается с известным принципом температурно-временно́го (или температурно-скоростного) соответствия в механике деформируемого твердого тела.

Автор благодарит Р.В.Гольдштейна за плодотворные дискуссии.

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00391) и Международного научного фонда (ISF) (Grant NW3300).

## Список литературы

[1] Г. Нейбер. Концентрация напряжений. М.-Л. (1947). 204 с.
[2] В.В. Новожилов. ПММ **33**, *2*, 212 (1969).
[3] В.В. Новожилов. ПММ **33**, *5*, 797 (1969).
[4] А.И. Слуцкер, Х. Айдаров. ФТТ **25**, *3*, 777 (1983).
[5] Р.Л. Салганик, А.И. Слуцкер, Х. Айдаров. ДАН СССР **274**, *6*, 1362 (1984).
[6] Н.Ф. Морозов. Математические вопросы теории трещин. М. (1984). 274 с.
[7] И.И. Бугаков. Исследования по упругости и пластичности. Изд-во ЛГУ. Л. (1985). Т. 15. С. 20.
[8] Р.В. Гольдштейн, Н.М. Осипенко. ДАН СССР **240**, *4*, 829 (1978).
[9] Н.Ф. Морзов, Ю.В. Петров. Изв. АН СССР. МТТ, *6*, 108 (1990).
[10] Н.А. Златин, Г.С. Пугачев, С.М. Мочалов, А.М. Брагов. ФТТ **17**, *9*, 2599 (1975).
[11] Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, В.Г. Кудряшов. ФГВ, *2*, 126 (1988).
[12] А.К. Кикоин, И.К. Кикоин. Молекулярная физика. М. (1976). 397 с.
[13] Ю.В. Петров. ДАН СССР **321**, *1*, 66 (1991).
[14] Y.V. Petrov, N.F. Morozov. ASME J. Appl. Mech. **61**, 710 (1994).