

УДК 621.315.592

©1995 г.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМ

О б з о р

А.Я.Шук

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
194021, Санкт-Петербург, Россия

(Получен 8 декабря 1994 г. Принят к печати 13 декабря 1994 г.)

1. Введение

Последние два десятилетия в физике твердого тела характеризуются чрезвычайно быстрым развитием физики низкоразмерных электронных систем, приведшим к открытию в 1980 г. квантового эффекта Холла, что в свою очередь еще более стимулировало исследования в этой области. В результате структуры с двумерным электронным газом (2МЭГ) стали наиболее популярным объектом как теоретических, так и экспериментальных исследований.

Переход от трехмерного электронного газа к двумерному качественно меняет многие электронные свойства полупроводниковых структур. В данном обзоре будет рассмотрена совокупность этих свойств, связанная со взаимодействием между 2МЭГ и внешними зарядами или электромагнитными полями. Эта группа явлений включает экранирование точечного заряда, контактные явления, максвелловскую релаксацию и некоторые другие эффекты, связанные с электронным экранированием.

Мы покажем, что экранирование в 2МЭГ существенно отличается от экранирования в массивном образце. Как следствие, большинство электродинамических свойств 2МЭГ имеют качественно иной характер и обладают специфическими особенностями, рассмотрение которых и является задачей настоящего обзора.

2. Свойства двумерного электронного газа

2.1 *Энергетический спектр и плотность состояний.* В большинстве экспериментов для создания 2МЭГ используются планарные полупроводниковые структуры, в которых движение электронов (или дырок) вдоль одной из координат, которую будем называть осью z , резко

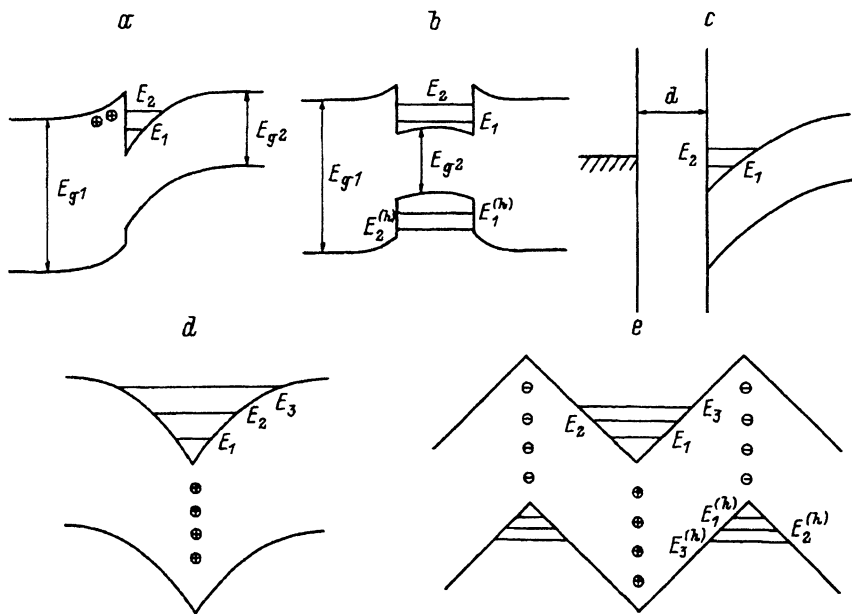


Рис. 1. Энергетическая зонная диаграмма и дискретные уровни электронов E_i в различных полупроводниковых структурах с 2МЭГ.

a — одиночный гетеропереход; b — двойная гетероструктура (квантовая яма); c — МПД структура; d — δ -слой; e — n - i - p - i -сверхрешетка. В структурах, где движение дырок также квантовано, показаны и дискретные уровни дырок $E_i^{(h)}$. Ионизованные донорные и акцепторные состояния показаны символами \oplus and \ominus .

ограничено [1]. Подобное ограничение осуществляется за счет разрывов зон на гетерограницах, внутренних электрических полей или совместного действия обоих этих факторов (рис. 1). Первый механизм реализуется в двойных гетероструктурах (квантовых ямах) и сверхрешетках [2], второй — в δ -слоях [3] и n - i - p - i -структурах [4], а третий, комбинированный механизм ограничения, осуществляется в одиночных гетеропереходах [2] и МПД структурах [1].

С формальной точки зрения все структуры с 2МЭГ представляют собой одномерную потенциальную яму для носителей и отличаются друг от друга лишь формой потенциала $V(z)$. Согласно квантовой механике, движение носителей вдоль оси z квантуется и соответствующая энергия может принимать лишь дискретные значения E_i ($i = 1, 2, \dots$). В то же время движение в плоскости xy остается свободным и имеет обычный параболический спектр с эффективной массой m . В результате полный закон дисперсии состоит из дискретной и квадратичной частей,

$$E = E_i + \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m}. \quad (1)$$

Если температура T и концентрация 2МЭГ n_0 не слишком велики, то носители заполняют лишь состояния с $i = 1$, принадлежащие основному уровню. Важнейшие механизмы рассеяния в металлах и полупроводниках (рассеяние на примесях, фононах) являются упругими

или квазиупругими. В этом случае квантовое число i при рассеянии не меняется, поскольку это потребовало бы дополнительной энергии, что невозможно в упругих процессах. Поэтому рассеяние сопряжено с изменением лишь двух компонент импульса, p_x, p_y , т.е. носители ведут себя как чисто двумерные частицы, могущие двигаться лишь в одной плоскости. Именно поэтому для систем с энергетическим спектром (1) используется термин «двумерный электронный газ», хотя реально потенциальная яма имеет конечную ширину.

Для наблюдения эффектов 2МЭГ необходимо, чтобы энергетическое расстояние между уровнями размерного квантования $E_2 - E_1$ значительно превосходило как тепловую энергию kT , так и столкновительное уширение уровней \hbar/τ , где τ — импульсное время релаксации. Для типичных полупроводниковых гетероструктур это реализуется при толщинах квантовых ям порядка нескольких сот ангстрем и меньше.

2МЭГ с энергетическим спектром (1) характеризуется ступенчатой плотностью состояний,

$$g(E) = \frac{m}{\pi \hbar^2} \sum_i \theta(E - E_i), \quad (2)$$

где $\theta(x)$ — единичная функция Хевисайда. Для 2МЭГ, где носители заполняют лишь нижний уровень, их энергии E лежат между E_1 и E_2 и плотность состояний постоянна в отличие от трехмерного случая с $g(E) \sim \sqrt{E}$.

2.2 Двумерные кулоновские центры. Сильная локализация электронов в одном из направлений, вызванная потенциалом $V(z)$, изменяет энергетический спектр не только свободных носителей, но и электронов, связанных на притягивающих кулоновских центрах. Объяснение этому весьма простое: дополнительная локализация уменьшает среднее расстояние между электроном и центром, что увеличивает энергию электростатического притяжения. В результате энергия связи E_B , равная в массивном полупроводнике $me^4/(2\epsilon_0^2 \hbar^2 N^2)$ (ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость, $N = 1, 2, \dots$), в низкоразмерных структурах возрастает.

Для определения E_B в структурах с 2МЭГ следует решать уравнение Шредингера, содержащее как квантующий потенциал $V(z)$, так и кулоновский член $-e^2/\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}$. (Здесь и далее ρ обозначает двумерный радиус-вектор в плоскости 2МЭГ). В общем случае энергия связи зависит от положения центра z_0 относительно потенциала ямы. Однако существует важный предельный случай, когда характерная ширина потенциальной ямы $V(z)$ значительно меньше эффективного боровского радиуса $a_B = \epsilon_0 \hbar / me^2$ или, что то же самое, эффективная боровская энергия E_B значительно меньше энергии размерного квантования $E_2 - E_1$. В этом пределе ответ носит универсальный характер, не зависящий от z_0 (см. [1,2]):

$$E = E_1 - \frac{me^4}{2\epsilon_0^2 \hbar^2 (N - 1/2)^2}. \quad (3)$$

Видно, что энергия связи основного состояния ($N = 1$) в четыре раза больше, чем в массивном образце.

3. Общий подход к проблеме экранирования

Поскольку данный обзор посвящен различным аспектам двумерного экранирования, целесообразно вспомнить общее понятие об экранировании. Если в среду, содержащую свободные носители, поместить дополнительный заряд, то носители перераспределяются так, чтобы нейтрализовать поле внесенного заряда и минимизировать электростатическую энергию системы. В результате электрическое поле дополнительного заряда скомпенсируется полем, созданным носителями, и станет пренебрежимо малы на расстояниях, превосходящих некоторую характерную длину, называемую радиусом экранирования.

С формальной точки зрения конечной целью всех обсуждаемых далее электродинамических задач является нахождение самосогласованного потенциала $\phi(\mathbf{r})$ и пространственного распределения электронной плотности $n(\mathbf{r})$, вызванных внешним возмущением (заряженный центр, контактный потенциал и т.д.). В обычной трехмерной ситуации это требует решения уравнения Пуассона

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi e}{\epsilon_0} [n^{(3)}(\mathbf{r}) - n_0^{(3)}]. \quad (4)$$

В качестве второго уравнения, связывающего две неизвестные величины $\phi(\mathbf{r})$ и $n(\mathbf{r})$, обычно используется уравнение непрерывности

$$\nabla \mathbf{j} = e \frac{\partial n^{(3)}}{\partial t} \quad (5)$$

(\mathbf{j} — плотность тока). В равновесии оно сводится к обычному ферми-евскому распределению

$$n^{(3)}(\mathbf{r}) = 2 \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \mathcal{F}_{1/2} \left\{ \frac{-\zeta_0 - e\phi(\mathbf{r})}{kT} \right\}, \quad (6)$$

где $\mathcal{F}_{1/2}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_0^\infty \sqrt{t} dt / [1 + \exp(t - x)]$ — интеграл Ферми, а

ζ_0 — уровень химического потенциала, соответствующий равновесной концентрации носителей $n_0^{(3)}$. Уравнения (4) и (5) (или (4) и (6)) дают в принципе полное решение любой трехмерной задачи экранирования.

Очень часто связь между $n^{(3)}(\mathbf{r})$ и $\phi(\mathbf{r})$ линеаризуют и для статического равновесного случая получают хорошо известное уравнение

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = l_3^{-2} \phi(\mathbf{r}), \quad (7)$$

описывающее экспоненциальное спадание потенциала и плотности заряда с характерной трехмерной длиной экранирования

$$l_3 = \left[\frac{4\pi e^2}{\epsilon_0} \left(\frac{dn^{(3)}}{d\zeta} \right)_0 \right]^{-1/2}. \quad (8)$$

Символ $(\dots)_0$ означает производную, взятую при $\zeta = \zeta_0$.

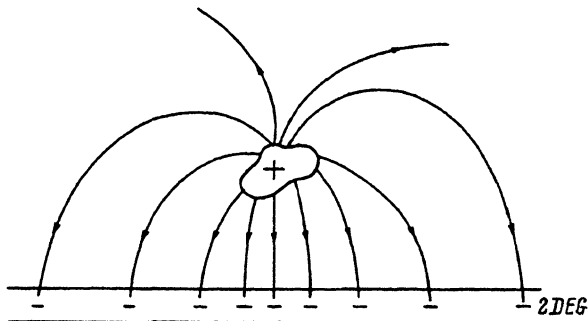


Рис. 2. Экранирование внешнего заряда двумерными электронами. Показаны избыточный заряд в 2МЭГ (2DEG), не скомпенсированный положительным фоном, и силовые линии электрического поля.

Экранирование в 2МЭГ существенно иное, нежели в массивных образцах. Основная разница связана с тем, что электрическое поле существует во всем пространстве, окружающем 2МЭГ, в то время как экранирующие электроны могут двигаться лишь в плоскости (рис. 2). Поэтому экранирование в 2МЭГ всегда менее эффективно, чем в массивных образцах.

3.1 *Граничные условия к уравнению Лапласа.* Для количественного описания экранирования в 2МЭГ мы должны учесть, что отвечающий за экранирование электрический заряд может существовать лишь в плоскости 2МЭГ. Будем предполагать также, что компенсирующий положительный заряд примесей лежит в той же самой плоскости (корректность этого предположения обсуждается в конце параграфа). В этом случае всюду, за исключением указанной плоскости, система нейтральна и для нахождения распределения потенциала следует решать не уравнение Пуассона, а уравнение Лапласа

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (9)$$

Процессы в 2МЭГ будут определять граничное условие к (9). Если ϵ_- и ϵ_+ — диэлектрические проницаемости по обе стороны от 2МЭГ, то это условие можно записать в виде

$$\epsilon_+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{+0} - \epsilon_- \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)_{-0} = 4\pi e[n(\rho) - n_0]. \quad (10)$$

Здесь локальная плотность 2МЭГ $n(\rho)$ должна находиться из уравнения непрерывности (5), которое теперь относится только к плоскости, содержащей 2МЭГ.

В статическом равновесном случае (5) сводится к двумерному распределению Ферми

$$n(\rho) = \frac{mkT}{\pi\hbar^2} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\zeta_0 + e\phi(\rho)}{kT} \right) \right]. \quad (11)$$

Линеаризация зависимости n от ϕ , описываемой выражением (11), и подстановка ее в (10) дают искомое граничное условие. При

$\epsilon_+ = \epsilon_- = \epsilon_0$ оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{-0} = \frac{2\phi(z=0)}{l_2}. \quad (12)$$

Здесь двумерная длина экранирования l_2 описывается выражением

$$l_2 = \frac{\epsilon_0}{2\pi e^2} \left(\frac{dn}{d\zeta_0}\right)^{-1} = \frac{a_B}{2} \left[1 + \exp(-\zeta_0/kT)\right]. \quad (13)$$

Поскольку эффекты экранирования наиболее существенны при высоких концентрациях 2МЭГ, когда носители вырождены, мы часто будем ограничиваться случаем полностью вырожденного 2МЭГ. В этом случае длина экранирования равна половине эффективного боровского радиуса и, следовательно, не зависит от концентрации 2МЭГ n_0 . На первый взгляд, это кажется странным, поскольку при $n_0 \rightarrow 0$ экранирование должно исчезать. Однако следует помнить, что при нулевой температуре 2МЭГ является вырожденным лишь при достаточно высокой концентрации. Если уменьшать n_0 , то мы придем к невырожденному случаю, где $l_2 = \epsilon_0 kT / (2\pi e^2 n_0)$ и непрерывно растет при $n_0 \rightarrow 0$. Еще одна причина, по которой $l_2 \rightarrow \infty$ при $n_0 \rightarrow 0$ даже при нулевой температуре, будет указана в разд. 3.2.

Для вырожденного 2МЭГ характерна еще одна специфическая черта. В невырожденном 2МЭГ и в трехмерном газе с любой статистикой связь концентрации с химическим потенциалом нелинейна. Поэтому линейные выражения (7) и (12) справедливы лишь, если $|\phi(\mathbf{r})|$ значительно меньше, чем энергии электронов (тепловая или фермиевская). Вместе с тем, для вырожденного 2МЭГ формула (11) дает линейную связь между n и ϕ ,

$$n(\rho) = n_0 \left[1 + \frac{e\phi(\rho)}{\zeta_0}\right], \quad (14)$$

без всяких приближений. В результате выражение (12) остается справедливым даже при больших $|\phi|$, до тех пор пока уровень Ферми не пересечет основной уровень E_1 (для потенциала обеднения) или первый возбужденный уровень E_2 (для потенциала обогащения) и формула (14) не перестанет быть применимой.

Как уже отмечалось, мы полагаем, что 2МЭГ лежит в одной плоскости с компенсирующим положительным зарядом, который, как правило, представляет собой заряд легирующих примесей. Это предположение справедливо не всегда. В модуляционно-легированных структурах примеси могут отделяться от 2МЭГ нелегируемым спейсером с толщиной d_0 , не превосходящей нескольких сот ангстрем. В этом случае наши формулы будут справедливы, если соответствующие характерные длины (l_2 , a_B и т.д.) превосходят d_0 . Ситуация иная в МДП структурах, где компенсирующий заряд находится на металлическом затворе, является подвижным и сам может обеспечивать экранирование. В этом случае сделанные выше выводы могут существенно измениться, что будет объектом обсуждения в разд. 11.2.

Формула (12) и все вытекающие из нее выражения для потенциала экранированного заряда основываются на локальной связи потенциала с концентрацией носителей, даваемой выражением (11). Такая связь

справедлива только в случае, когда потенциал мало меняется на длине де-Бройлевской волны носителей. Для описания нелокальной связи потенциала и концентрации удобно использовать формализм диэлектрической проницаемости.

3.2 *Формализм диэлектрической проницаемости.* Реакция трехмерного электронного газа на внешнее электромагнитное возмущение, отвечающая за экранирование и другие родственные эффекты, часто описывается с помощью диэлектрической проницаемости $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$, зависящей от волнового вектора и частоты (см., например, [5]). Аналогичный подход может быть использован и в теории 2МЭГ.

Рассмотрим некоторую систему внешних зарядов, создающую в плоскости $z = 0$ распределение потенциала $\phi_0(\rho, t)$, зависящее в общем случае также и от времени. Если в этой плоскости поместить 2МЭГ, то потенциал изменится и станет равным $\phi(\rho, t)$. По определению, пространственные и временные фурье-компоненты исходного и экранированного потенциала связаны соотношением

$$\phi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\phi_0(\mathbf{q}, \omega)}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)}, \quad (15)$$

где \mathbf{q} — двумерный вектор. Основной задачей теории при этом является вычисление $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

Знание $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ позволяет также определить распределение электронной плотности в 2МЭГ. Фурье-образ электронной плотности дается выражением

$$n(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\epsilon_0 q \phi(\mathbf{q}, \omega)}{2\pi e} = \frac{\epsilon_0 q \phi_0(\mathbf{q}, \omega)}{2\pi e \epsilon(\mathbf{q}, \omega)}. \quad (16)$$

В простейшем приближении хаотических фаз $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ может быть без труда вычислено [6], но конечная формула достаточно громоздка и вынесена нами в Приложение (выражение (П. 4)). В данном разделе, рассматривая задачу статического экранирования, мы ограничимся статическим ($\omega = 0$) пределом этой формулы. Для вырожденного 2МЭГ

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{2}{qa_B}, \quad q \leq 2k_F; \quad (17)$$

$$\epsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{2}{qa_B} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{2k_F}{q} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad q > 2k_F. \quad (18)$$

Здесь $k_F = (2m\zeta_0)^{1/2}/\hbar$ — фермиевский волновой вектор 2МЭГ.

Формула (18), отвечающая не слишком большим q , эквивалентна (12). Покажем это, полагая для простоты, что ϕ_0 не зависит от одной из координат, для определенности y . Неэкранированный потенциал во всем пространстве является решением уравнения Лапласа (9) и может быть записан в виде $\phi_0(x, z) = \int f(q) \exp(iqx) \exp(-q|z|) dq$. Экранированный потенциал будем искать в виде $\phi(x, z) = \int \chi(q) \exp(iqx) \exp(-q|z|) dq$. Поскольку $\partial\phi_0/\partial z$ непрерывна при $z = 0$, то, подставляя $\phi(x, z)$ в (12), имеем $\chi(q) = -\phi_0(q)/(1 + ql_2)$, что для вырожденного случая совпадает с (18).

При $q > 2k_F$ диэлектрическая проницаемость спадает значительно быстрее и экранирование становится менее эффективным. Это обстоятельство объясняет парадокс, упомянутый в разд. 3.1 и связанный с независимостью экранирования от концентрации носителей при $T = 0$. Из (18) видно, что уменьшение n_0 , приводя к уменьшению k_F , сужает область эффективного экранирования $q < 2k_F$.

Необходимо подчеркнуть, что диэлектрический формализм, с одной стороны, является более общим, чем подход, основанный на граничном условии (12), но, с другой стороны, применим только для малых возмущений и в отличие от (11) не может использоваться в ситуации, когда $e|\phi|$ сравнимо с энергией Ферми или превосходит ее. Примеры существенно нелинейной ситуации, не допускающей описания в терминах диэлектрической проницаемости, описаны в разд. 5.2 и 10.

4. Экранирование точечного заряда

Начнем с простейшей задачи об экранировании одиночного точечного заряда Q , находящегося на некотором расстоянии z_0 от плоскости 2МЭГ. Ввиду цилиндрической симметрии задачи удобно описывать распределение потенциала, плотности заряда и другие характеристики 2МЭГ с помощью преобразований Фурье-Бесселя: $g(\rho) = \int_0^\infty qg(q)J_0(q\rho)dq$, где J_0 — функция Бесселя. Неэкранированному потенциалу $\phi_0(\rho) = Q(\rho^2 + z_0^2)^{-1/2}\epsilon_0^{-1}$ соответствует преобразование $\phi_0(q) = Q \exp(-qz_0)/\epsilon_0 q$. Находя соответствующий экранированный потенциал путем решения уравнения Лапласа с граничными условиями (12) или, что то же самое, используя выражение (15) с диэлектрической проницаемостью (18), получаем [6]

$$\phi(q) = \frac{Ql_2 \exp(-qz_0)}{\epsilon_0 ql_2 + 1}. \quad (19)$$

На больших расстояниях, $\rho \gg z_0, l_2$, выражение (19) соответствует потенциалу, спадающему как ρ^{-3} ,

$$\phi(\rho) \simeq \frac{Q(z_0 + l_2)l_2}{\epsilon_0 \rho^3}, \quad (20)$$

что значительно медленнее экспоненциального спада $\phi \sim \exp(-r/l_3)$ в трехмерном случае. Этот результат был впервые получен в 1967 г независимо Н.С. Рытовой [7] и Ф. Стерном [8]. Благодаря линейной связи между потенциалом и концентрацией в вырожденном 2МЭГ (14) такая же координатная зависимость описывает спад избыточной электронной плотности вдали от точечного заряда. Это достаточно общее выражение, не содержащее при $z_0 \gg l_2$ никаких характеристик 2МЭГ, совпадает с электронной плотностью, индуцированной в металлической плоскости точечным зарядом Q ,

$$n(\rho) - n_0 = \frac{Qz_0}{2\pi(\rho^2 + z_0^2)^{3/2}}. \quad (21)$$

Если использовать более точное выражение (18) для $\epsilon(\mathbf{q}, 0)$, применимое и в области больших q , получим, что помимо членов $\sim \rho^3$, даваемых (20), (21), существуют также осциллирующие члены, связанные с сингулярностью в $\epsilon(q)$ при $q = 2k_F$ и пропорциональные

$$\delta\phi(\rho) \simeq \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{l_2}{(2k_F l_2 + 1)^2} \frac{\sin(2k_F(\rho))}{\rho^2}. \quad (22)$$

Этот эффект, впервые предсказанный в [8], аналогичен осцилляциям Фриделя в массивном металле.

5. Статические контактные явления

Физические исследования и приборные применения кинетических явлений в низкоразмерных системах связаны с необходимостью создания электрических контактов к 2МЭГ. Любой такой контакт может рассматриваться как переход между трех- и двумерной электронными системами. Благодаря уже отмечавшейся в разд. 3 специфике экранирования в 2МЭГ распределение потенциала в таком контакте и его емкость будут существенно иными, чем, скажем, в обычном диоде Шоттки [9].

Рассмотрим контакт между массивным вырожденным образцом, занимающим полупространство $x < 0$, и плоскостью $z = 0$, $x > 0$, содержащей 2МЭГ (рис. 3,а). Для нахождения распределений потенциала и концентрации в контакте следует решать уравнение Лапласа (9) в квадранте $x > 0$, $z > 0$ с соответствующими граничными условиями. Одно из них очевидно:

$$\phi(0, z) = V, \quad (23)$$

где потенциал металлического контакта V равняется сумме контактной разности потенциала между металлом и 2МЭГ и приложенного к контакту напряжения. Второе граничное условие относится к плоскости, содержащей 2МЭГ, и различно в разных ситуациях.

5.1. *Малый контактный потенциал.* Начнем со случая относительно малого изгиба зон, когда контактный потенциал $|eV|$ не превосходит энергию Ферми 2МЭГ ζ_0 . При этом граничное условие на плоскости

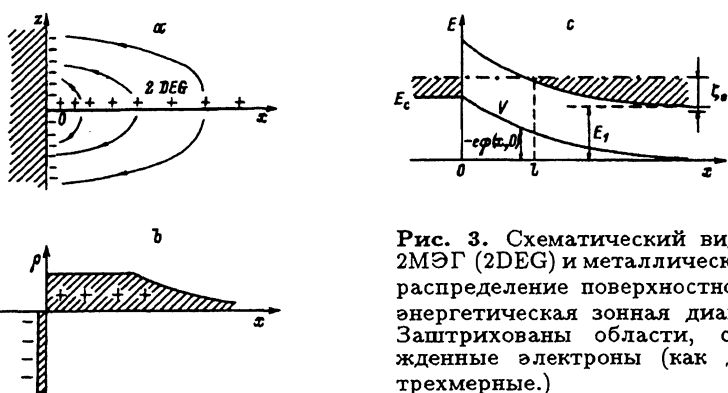


Рис. 3. Схематический вид контакта между 2МЭГ (2DEG) и металлическим электродом (а), распределение поверхностного заряда ρ (б) и энергетическая зонная диаграмма 2МЭГ (с). Затрихованы области, содержащие вырожденные электроны (как двумерные, так и трехмерные.)

$z = 0$ дается формулой (12), которую можно переписать в виде

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0) = \frac{2\phi(x, 0)}{a_B}. \quad (24)$$

Уравнение Лапласа с граничными условиями (23), (24) легко решается и дает следующее распределение потенциала в 2МЭГ [9]:

$$\phi(x, 0) = \frac{2V}{\pi} \left[\text{ci} \left(\frac{2x}{a_B} \right) \sin \left(\frac{2x}{a_B} \right) - \text{si} \left(\frac{2x}{a_B} \right) \cos \left(\frac{2x}{a_B} \right) \right]. \quad (25)$$

Здесь si и ci — интегральные синус и косинус. Несмотря на наличие синуса и косинуса, зависимость ϕ от x является монотонной и имеет следующие асимптотики:

$$\phi(x, 0) \sim V \left(1 - 0.54 \frac{x}{a_B} + \frac{4x}{\pi a_B} \ln \frac{2x}{a_B} \right), \quad x \ll a_B; \quad (26)$$

$$\phi(x, 0) \sim V \frac{a_B}{\pi x}, \quad x \gg a_B. \quad (27)$$

Заметим, что формула (25) в равной степени применима как для обедняющего, так и для обогащающего изгиба зон. При большом контактном потенциале эта симметрия исчезает и ответ начинает зависеть от знака V . Мы уделим основное внимание обедняющему изгибу зон (контакту Шоттки), поскольку для обратного случая, отвечающего омическому контакту, сопротивление контакта мало и точный профиль потенциала не влияет на большинство электрических свойств контакта.

5.2 Большой контактный потенциал. При больших обедняющих контактных напряжениях, когда $e|V| > \zeta_0$, результаты предыдущего раздела, основанные на граничном условии (12) (или, что то же самое, на выражении (18) для диэлектрической провициаемости), становятся несправедливыми. В этом случае весь приконтактный слой обеднения в 2МЭГ можно разделить на две части: область полного обеднения, где $e|\phi(x, 0)| > \zeta_0$, не содержащая электронов, и область хвоста потенциала, где $e|\phi(x, 0)| < \zeta_0$, так что концентрация электронов отлична от нуля, но меньше своего равновесного значения (рис. 3). Формально это означает, что граничное условие (12) выполняется только при $x > l$, в то время как при $x < l$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, 0) = -\frac{2\pi e n_0}{\epsilon_0}. \quad (28)$$

Стоящая здесь ширина области полного обеднения l определяется из условия $e|\phi(l, 0)| = \zeta_0$.

Поскольку при $x = l$ меняется характер граничного условия, точного аналитического решения указанной задачи получить не удастся. Однако при $eV \gg \zeta_0$ (что, как будет показано, эквивалентно условию $l \gg a_B$) ход потенциала в 2МЭГ при $l - x \gg a_B$, т.е. достаточно далеко от точки $x = l$, нетрудно найти. В этом случае можно полагать $\phi \simeq 0$ при $z = 0$, $x > l$ и, как показано в [9], такая задача точно решается с помощью конформного преобразования и приводит к ответу

$$\phi(x, 0) = \frac{2V}{\pi} \arctan \frac{(l^2 - x^2)^{1/2}}{x} - \frac{2en_0}{\epsilon_0} x \ln \frac{l - (l^2 - x^2)^{1/2}}{l + (l^2 - x^2)^{1/2}}. \quad (29)$$

До сих пор ширина области полного обеднения считалась независимым параметром. В действительности она является функцией V и n_0 , которая может быть определена из (29). Внутреннее электрическое поле $\partial\phi(x, 0)/\partial x$ не должно иметь особенностей при $x = l$, что возможно только при

$$l = \frac{\epsilon_0 V}{2\pi e n_0}. \quad (30)$$

Таким образом, ширина области полного обеднения в 2МЭГ пропорциональна контактному потенциалу в отличие от трехмерного случая, где эта связь носит корневой характер. Результат (30) не зависит от длины экранирования l_2 и сохраняет справедливость и в невырожденном 2МЭГ, если выполняется условие $eV \gg kT$.

В нашем приближении, которое аналогично приближению Шоттки в трехмерном случае, потенциал при $x > l$ равен нулю. Вместе с тем плотность заряда в этой области отлична от нуля и дается выражением

$$n_0 - n(x) = -\frac{\epsilon_0}{2\pi} \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, 0) = n_0 \left(1 - \sqrt{\frac{x-l}{x+l}} \right), \quad (31)$$

имеющим ту же асимптотику, что и (27).

Можно видеть, что при любом значении контактного потенциала V плотность заряда вдали от контакта спадает весьма медленно. Заметим, что подобная же гиперболическая зависимость от координаты z характеризует спад плотности заряда на металлическом электроде вдали от плоскости 2МЭГ.

5.3. Контактная емкость. Медленное гиперболическое спадание потенциала и концентрации носителей вдали от контакта характерно не только для систем с 2МЭГ. Оно имеет место также для тонких пленок безразмерного квантования и, как будет показано в разд. 10, даже в 2МЭГ в сильном магнитном поле, где энергетический спектр чисто дискретен. Легко объяснить причину такой универсальности. Вдали от контакта потенциал мал и электронный слой в первом приближении можно считать эквипотенциальным. При этом наша задача сводится к задаче о распределении заряда на двух пересекающихся металлических плоскостях, находящихся под разными потенциалами.

Последняя имеет простое решение, отвечающее гиперболическому спаду плотности заряда по закону $V/\pi^2 x$, характерному для двумерного диполя.

Медленный спад $n(x) - n_0$ приводит к тому, что полный заряд $e \int_0^\infty [n(x) - n_0] dx$, а следовательно, и емкость C на единицу длины контакта, расходятся логарифмически. Для получения конечного значения C мы должны учесть, что реальная структура в отличие от идеальной модели рис. 3,а имеет конечные размеры как металлического контакта, так и плоскости, содержащей 2МЭГ. Если обозначить минимальную из этих двух характерных длин через L , то емкость контакта при большом обедняющем потенциале (см. разд. 5.2) равна

$$C = \frac{e}{V} \int_0^\infty [n(x) - n_0] dx = \frac{\epsilon_0}{2\pi} \left(1 + \frac{1}{\pi} \ln \frac{L}{l} \right). \quad (32)$$

Более точные вычисления емкости для трехмерного контакта конечных размеров были выполнены в [10].

Полученное выражение для емкости имеет следующие важные отличия от такового для обычной емкости трехмерного слоя объемного заряда [9]:

- 1) контактная емкость практически не зависит от напряжения, поскольку, согласно (30), ширина слоя обеднения l пропорциональна V ;
- 2) емкость области полного обеднения $x < l$ (первый член в (32)) и емкость области хвоста потенциала $x > l$ (второй член в (32)) соединены параллельно, как две части одной обкладки конденсатора, где роль второй обкладки играет металлический контакт;
- 3) основной заряд приконтактной области сконцентрирован в медленно спадающем хвосте потенциала, а не в области полного обеднения.

Указанные характерные черты контактной емкости проявляются не только в геометрии, показанной на рис. 3, но и в иных системах, содержащих 2МЭГ. В частности, в [11] при рассмотрении контакта Шоттки двумерного металла с двумерным полупроводником получены аналогичные свойства контактной емкости. Авторами был также проведен эксперимент на описанной структуре. Вольт-фарадная характеристика при малых обедняющих напряжениях V имела хорошо известный трехмерный вид $C^{-2} \sim V$, но при больших V , когда ширина слоя обеднения l превосходила толщину проводящего слоя и система становилась эффективно двумерной, зависимость $C(V)$ становилась более слабой в соответствии с нашими предсказаниями для контакта с 2МЭГ.

Таким образом, в отличие от массивного контакта Шоттки емкость низкоразмерных контактов определяется не микроскопическими характеристиками полупроводника (концентрация носителей, контактная разность потенциалов и др.), а макроскопическими геометрическими факторами, и потому не может быть использована для нахождения указанных микроскопических характеристик.

6. Релаксация заряда

До сих пор мы рассматривали статическое экранирование с независящим от времени распределением зарядов. Самостоятельный интерес имеет задача и о релаксации заряда. Представим себе, что в образце образовалась флуктуация концентрации носителей, например, малый участок с избыточной концентрацией, и посмотрим, как эта флуктуация будет эволюционировать во времени.

Основные закономерности релаксации заряда в 2МЭГ качественно отличаются от закономерностей максвелловской релаксации в трехмерных образцах. Это следует из простых соображений на основе размерности. В трехмерном случае релаксация характеризуется временем максвелловской релаксации $\tau_M = \epsilon_0 / 4\pi\sigma$, где σ — проводимость образца. В двумерном случае такая же комбинация ϵ_0 и σ имеет размерность скорости. Следовательно, мы можем ожидать, что в этом случае релаксация заряда будет описываться не характерным временем, а характерной скоростью.

Различие между трех- и двумерной релаксацией можно показать на основе следующих качественных рассуждений [12]. Электрическое поле исходного распределения заряда и, следовательно, плотность тока

j на больших расстояниях r убывают как r^{-2} . Поэтому в трехмерном случае полный ток $4\pi r^2 j$ через сферу большого радиуса, окружающую распределение заряда, не зависит от ее радиуса r . Напротив, для 2МЭГ полный ток через некоторую окружность уменьшается $\sim r^{-1}$. В результате полный заряд в плоскости сохраняется и релаксация ведет лишь к расширению заряженной площади и уменьшению локальной плотности заряда.

Для количественного описания релаксации заряда в 2МЭГ мы должны решать уравнение непрерывности (5) совместно с уравнением Пуассона. В двумерном случае эти уравнения для соответствующих фурье-компонент $\phi(\mathbf{q})$ и $n(\mathbf{q})$ можно переписать в следующем виде:

$$e \frac{\partial n(\mathbf{q})}{\partial t} = \sigma q^2 \phi(\mathbf{q}), \quad (33)$$

$$n(\mathbf{q}) = -\frac{\epsilon_0 q \phi(\mathbf{q})}{2\pi e}. \quad (34)$$

В результате получаем уравнение для $\phi(\mathbf{q})$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{q})}{\partial t^2} - v^2 q^2 \phi(\mathbf{q}) = 0 \quad (35)$$

или, после обратного фурье-преобразования,

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \Delta_2 \phi = 0, \quad (36)$$

где

$$v = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0}. \quad (37)$$

Такое же уравнение справедливо и для концентрации носителей $n(\rho)$.

Решая (36), легко получить, что точечное возмущение в 2МЭГ $n(\rho, 0) - n_0 = \delta(\rho)$ с потенциалом $\phi(\rho, 0) = -1/\epsilon_0\rho$ будет релаксировать по закону [12]

$$\phi(\rho, t) = -\frac{1}{\epsilon_0 \sqrt{\rho^2 + v^2 t^2}}; \quad (38)$$

$$n(\rho, t) - n_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{vt}{(\rho^2 + v^2 t^2)^{3/2}}. \quad (39)$$

Аналогичное выражение может быть получено для релаксации одномерного распределения заряда $N\delta(x) - n_0$:

$$n(x, t) - n_0 = \frac{N}{\pi} \frac{vt}{x^2 + v^2 t^2}. \quad (40)$$

Интересно, что распределение, аналогичное (39), индуцируется на идеальной металлической поверхности единичным точечным зарядом, удаляющимся от нее со скоростью v .

В связи со сказанным полезно обсудить еще одну интересную проблему. В 2МЭГ с достаточно высокой концентрацией и подвижностью характерная скорость v может превысить скорость света c . Оценки показывают, что $v = c$ в 2МЭГ с концентрацией $\sim 3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ и подвижностью $\sim 10^6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$, что для гетероструктур с модулированным легированием является вполне реалистичным. Для указанного случая наши формулы становятся неприменимыми, поскольку движение носителей с такой скоростью противоречило бы теории относительности. Причина в том, что в (33) мы использовали квазистатическое соотношение $\mathbf{j} = -\sigma \nabla \phi$ между потенциалом и плотностью тока, в то время как в слоях с высокой проводимостью необходимо с самого начала использовать общее соотношение

$$\mathbf{j} = -\sigma \left(\nabla \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (41)$$

и полную систему уравнений Максвелла для определения вектор-потенциала \mathbf{A} . Для такого релятивистского подхода временная эволюция зарядов обсуждалась в [13,14]. Для одномерного распределения заряда было получено выражение

$$n(x, t) - n_0 = \frac{N}{\pi} \frac{vt}{x^2 + v^2(t^2 - x^2/\tilde{c}^2)} \frac{\theta(\tilde{c}^2 t^2 - x^2)}{[1 - x^2/(\tilde{c}t)^2]^{1/2}} \quad (42)$$

($\tilde{c} = c/\sqrt{\epsilon_0}$), которое сводится к (40) в пределе $\tilde{c} \rightarrow \infty$. Пространственное распределение концентрации зависит от параметра $\beta = v/\tilde{c}$ [13]. Для $\beta > (2/3)^{1/2}$ кривизна $n(x)$ при $x = 0$ меняет знак. Если рассматривать временную зависимость n при фиксированном x , то она для $\beta \ll 1$ будет иметь, помимо фронта возмущения при $t = x/\tilde{c}$, также максимум при $t \sim x/v$; для $\beta \gg 1$ функция $n(t)$ спадает монотонно при $t > x/\tilde{c}$.

В нашем рассмотрении мы не учитывали диффузию, считая, что ток определяется исключительно электрическим полем. Это законно, если интересующие нас характерные расстояния l и времена t удовлетворяют неравенству $l^2 \gg Dt$, где D — коэффициент диффузии. Поскольку $l \sim vt$, это условие эквивалентно требованию $l \gg D/\sigma$. В вырожденном 2МЭГ $D/\sigma \sim a_B$ — это означает, что эффекты диффузии в рассматриваемых процессах действительно несущественны, если пространственный масштаб значительно превосходит a_B .

7. Высокочастотная емкость

В разд. 5 мы рассмотрели распределение заряда в контакте и его емкость в предположении, что все характеристики не зависят от времени. Сейчас мы обсудим эти же эффекты для ненулевой частоты сигнала ω , т.е. вычислим частотную дисперсию контактной емкости. Можно ожидать, что в 2МЭГ эта дисперсия будет более заметна, чем в массивном образце, где ее следует учитывать лишь для достаточно больших ω , превосходящих некоторую характерную частоту в системе. Причина в том, что емкость идеального контакта (см. разд. 5.3) расходится благодаря вкладу зарядов, расположенных очень далеко от

контакта в 2МЭГ и металлическом электроде. Для ненулевой ω эти удаленные области уже не успевают перезарядиться за счет конечности скорости диффузионно-дрейфовых процессов и скорости света. В результате контактная емкость становится конечной, что означает наличие частотной дисперсии $C(\omega)$ даже при малых ω .

Для нахождения контактной емкости мы должны вычислить неравновесное распределение концентрации носителей $n_1(x)$, создаваемое в 2МЭГ переменным напряжением $V_1 \propto \exp(i\omega t)$, приложенным между металлическим контактом и удаленной частью 2МЭГ. Величину n_1 следует находить из уравнения непрерывности

$$i\omega n_1 = \mu n_0 \left[\frac{\pi \hbar^2}{em} \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, 0)}{\partial x^2} \right] \quad (43)$$

(мы использовали соотношение Эйнштейна $D = \pi \hbar^2 n_0 \mu / em$, связывающее коэффициент диффузии D и подвижность μ в вырожденном 2МЭГ). Электрический потенциал ϕ в свою очередь находится из уравнения Лапласа с граничными условиями, аналогичными использованным в разд. 5,

$$\phi(0, z) = V_1, \quad (44)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(0, z) = \frac{2\pi e n_1(x)}{\epsilon_0}, \quad (45)$$

$$\phi(x \rightarrow \infty, 0) = 0. \quad (46)$$

Решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям (44), (45), может быть записано в виде

$$\phi(x, z) = V_1 - \frac{4e}{\epsilon_0} \int_0^\infty \nu(q) \sin(qx) \exp(-qz) \frac{dq}{q}, \quad (47)$$

где

$$\nu(q) = \int_0^\infty n_1(x) \sin(qx) dx \quad (48)$$

представляет собой фурье-компоненту $n_1(x)$. После подстановки (47) в (43) получается уравнение для n_1 , которое может быть решено с помощью синус-преобразования фурье.

Окончательный результат имеет вид

$$\nu(q) = \frac{q n_1(0)}{q^2 + 2q/a_B + i/a_B l_\omega}. \quad (49)$$

Полученная формула содержит две характерные длины. Первая — это эффективный боровский радиус, играющий роль статической длины экранирования в вырожденном 2МЭГ, в то время как вторая длина,

$$l_\omega = \frac{\pi e n_0 \mu}{\epsilon_0 \omega} = \frac{\pi \sigma}{\epsilon_0 \omega}, \quad (50)$$

описывает релаксацию заряда в 2МЭГ с проводимостью σ .

Неизвестный параметр $n_1(0)$ в (49) определяется с помощью условия (46) и оказывается равным $n_1(0) = \pi e V_1 m / \hbar^2$. Окончательный ответ имеет вид

$$n_1(x) = \frac{2eV_1m}{\hbar^2} \int_0^\infty \frac{q \sin(qx) dq}{q^2 + 2q/a_B + i/a_B l_\omega}. \quad (51)$$

Знание распределения электронной плотности позволяет достичь нашей конечной цели и вычислить контактную емкость на единицу длины [15]:

$$C = \frac{e}{V_1} \int_0^\infty n_1(x) dx = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{1 - ia_B/l_\omega}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - ia_B/l_\omega}}{1 - \sqrt{1 - ia_B/l_\omega}}. \quad (52)$$

При относительно низких частотах, когда $a_B \ll l_\omega$,

$$C \simeq \epsilon_0 \left(\ln \frac{4\pi m e^2 \sigma}{\epsilon^2 \omega \hbar^2} - i \frac{\pi}{2} \right). \quad (53)$$

Видно, что $\text{Re } C(\omega)$ логарифмически расходится в пределе $\omega \rightarrow 0$ в согласии со статическими вычислениями из разд. 5.3, в то время как $\text{Im } C$ определяется джоулевыми потерями в 2МЭГ, но при этом не зависит от σ , поскольку ширина области, где происходят эти потери, l_ω , сама пропорциональна σ .

В наших расчетах использовались два упрощающих предположения:

- 1) равновесная концентрация 2МЭГ n_0 в (43) считалась однородной, т.е. игнорировался приконтактный изгиб зон;
- 2) не учитывались токи смещения.

Для справедливости первого предположения необходимо, чтобы характерная длина l_ω значительно превосходила ширину приконтактной области объемного заряда (30), так чтобы большинство электронов, двигающихся в переменном электрическом поле, принадлежали квазинейтральной области 2МЭГ. Для типичных параметров 2МЭГ это требование выполняется во всем диапазоне СВЧ.

Второе предположение *a priori* справедливо, если длина соответствующей электромагнитной волны \tilde{c}/ω превосходит все остальные характерные длины задачи. Условие $\tilde{c}/\omega \gg a_B$ всегда выполняется в емкостных измерениях, но условие $\tilde{c}/\omega \gg l_\omega$ в определенных случаях может нарушаться. Интересно отметить, что это последнее условие в действительности не содержит частоты и эквивалентно требованию $v \ll c$, обсуждающемуся в разд. 6. Поэтому формула (52) справедлива только для сравнительно высокоомных слоев 2МЭГ с $\sigma/\sqrt{\epsilon_0} \ll c/2\pi = (188 \text{ Ом})^{-1}$.

Если $2\pi\sigma \geq \tilde{c}$, то для квазистатической задачи требуется релятивистский подход (см. разд. 6), состоящий в замене уравнения Лапласа $\Delta\phi = 0$ на уравнение Гельмгольца $\Delta\phi + \omega^2\phi/\tilde{c}^2 = 0$ и решении аналогичного уравнения для вектор-потенциала A . Это достаточно сложная

задача, но основные ее качественные результаты нетрудно предсказать [15]. В данном случае переменный ток концентрируется в области с характерным размером $\sim \tilde{c}/\omega$ и потери связаны с излучением эффективного диполя. Расчеты, аналогичные приведенным выше, приводят к выражению

$$\operatorname{Re} C \simeq \epsilon_0 \ln \frac{\tilde{c}}{a_B \omega} = \epsilon_0 \ln \frac{\tilde{c} e^2 m}{\hbar^2 \epsilon_0 \omega}, \quad (54)$$

также логарифмически расходящемуся при $\omega \rightarrow 0$, а $\operatorname{Im} C \simeq \epsilon_0$, как и в (53).

Формально, в согласии с (53), частотная дисперсия контактной емкости существует вплоть до сколь угодно низких частот. Однако это будет так лишь в идеальном случае бесконечно больших размеров слоя 2МЭГ и металлического контакта. В реальных контактах конечного размера, где статическая емкость дается выражением (32), заметная частотная дисперсия будет наблюдаться только при $\omega \geq (\mu V_0 / L a_B) \min\{1; \tilde{c}/2\pi\sigma\}$.

8. Двумерные плазмоны

Эта глава посвящена некоторым динамическим явлениям в 2МЭГ, связанным с пространственной и временной дисперсией диэлектрической проницаемости, т.е. с ее зависимостью от волнового вектора и частоты. Простейшими из них являются плазменные колебания (плазмоны) — коллективные продольные колебания 2МЭГ. Мы дадим лишь краткое описание этой интересной и активно развивающейся области. Интересующиеся более подробными результатами могут найти их в обзорах [16–18].

8.1 Закон дисперсии

Диэлектрическая проницаемость 2МЭГ описывается формулой (П.4) *Приложения*, которая в длинноволновом пределе ($q \rightarrow 0$) может быть записана в виде

$$\epsilon(q \rightarrow 0, \omega) = \epsilon_0 - \frac{2\pi e^2 n_0 q}{m\omega^2}. \quad (55)$$

Как известно, закон дисперсии продольных колебаний определяется условием $\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 0$, которое при использовании (55) дает

$$\omega^2 = \frac{2\pi e^2 n_0}{\epsilon_0 m} q. \quad (56)$$

Получившийся закон дисперсии качественно иной, нежели в трехмерном случае, где плазменная частота $\omega_p = (4\pi n_0^{(3)} e^2 / \epsilon_0 m)^{1/2}$ ($n_0^{(3)}$ — объемная концентрация трехмерных электронов) не зависит от волнового вектора \mathbf{q} возмущений электронной плотности.

Формально для плазмонов с законом дисперсии (56) фазовая скорость ω/q и групповая скорость $d\omega/dq$ стремятся к бесконечности при $q \rightarrow 0$. Это связано с пренебрежением эффектами запаздывания, которое мы допустили, заменив в исходной формуле (87) для диэлектрической проницаемости β на q , что допустимо только при $\omega/q \ll \tilde{c}$. В

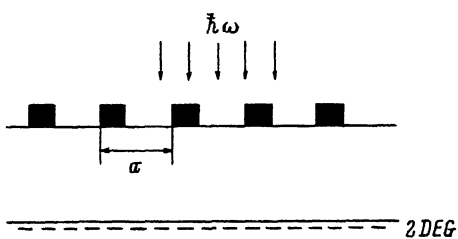


Рис. 4. Схематический вид решеточной структуры, используемой в экспериментах по плазмонному поглощению. Зачернены металлические полосы на поверхности образца.

нашем случае это соответствует волновым векторам $q \gg 2\pi e^2 n_0 / mc^2$ или частотам $\omega \gg 2\pi e^2 n_0 / \epsilon_0 mc$. В обоих этих неравенствах правая часть столь мала, что в реальных экспериментах они обычно выполняются. Тем не менее точные расчеты с учетом эффектов запаздывания также могут быть проведены. Они показывают, что максимум фазовой и групповой скорости достигается при $q \rightarrow 0$ и равен \bar{c} .

Закон дисперсии двумерных плазмонов можно получить и из простых физических соображений. Предположим, что каждый электрон 2МЭГ сдвинут из равновесного положения на величину $s(x) = s_0 \sin(qx)$. Это создает поверхностный заряд $e n_0 (ds/dx)$ и связанное с ним распределение потенциала $\phi(x, z) = (2\pi/\epsilon_0) n_0 s_0 \cos(qx) \exp(-q|z|)$ [19]. Уравнение движения электронов в этом потенциале, $m(d^2s/dt^2) = e[d\phi(x, 0)]/dx$, сразу приводит к выражению (56). Приведенные рассуждения являются чисто классическими, не использующими ни энергетического спектра 2МЭГ, ни статистики Ферми. Это означает, что двумерные плазмоны с законом дисперсии (56) могут существовать в любой электронной системе, представляющей собой слой, достаточной тонкий по сравнению с длиной волны плазмона, что и было предсказано задолго до появления первых работ, посвященных 2МЭГ (см, например, [20]).

8.2 Поглощение и излучение плазмонов

Свободный плазмон в однородной двумерной плазме является неизлучающей модой с фазовой (и групповой) скоростью, не превосходящей скорость света. Чтобы обеспечить его взаимодействие с электромагнитной волной, необходимо должным образом трансформировать последнюю, создав пространственно-модулированное электрическое поле. Этого можно добиться с помощью специальной решеточной структуры, показанной на рис. 4 и создающей продольную модуляцию высокочастотного поля с периодом решетки a . При этом возникает взаимодействие поля излучения и плазменных колебаний 2МЭГ с волновыми векторами $q = 2\pi N/a$ ($N = 1, 2, \dots$).

Эксперименты по длинноволновой оптике подобных структур использовались для исследования закона дисперсии плазмонов [21, 22]. Спектральная зависимость коэффициента поглощения имела резонансный характер (рис. 5) вблизи частоты, равной частоте плазмона с $q = 2\pi/a$ (плазмоны с $N = 2, 3, \dots$ менее выражены, но в некоторых случаях также различимы). Изменение концентрации 2МЭГ сдвигало резонансный пик, что позволяло проследить зависимость частоты плазмона от n_0 при фиксированном q . Как видно из рис. 6, наблюдавшаяся зависимость имела хорошее согласие с теоретическим законом дисперсии.¹

¹ В МДП структурах закон дисперсии плазмона описывается не выражением (56), а формулой (83), полученной далее в разд. 11.2.

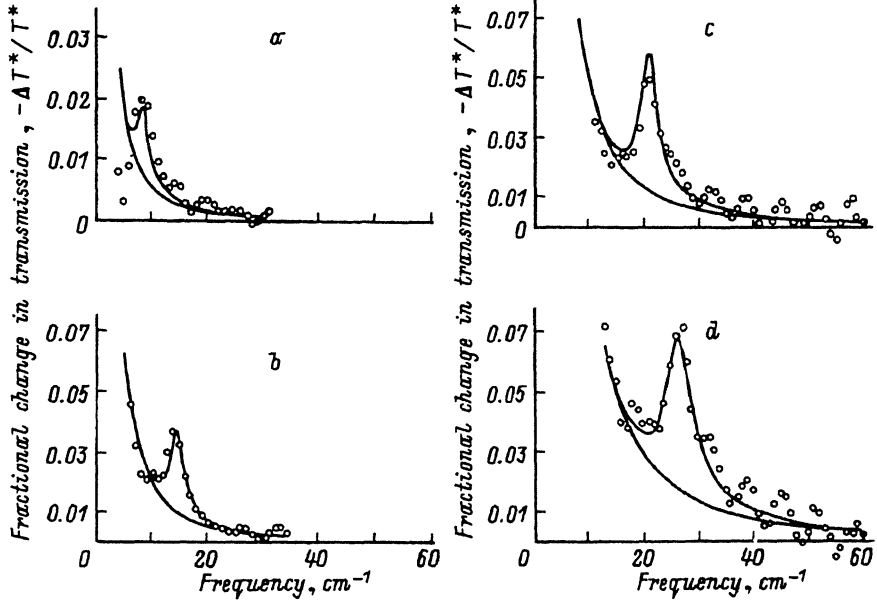


Рис. 5. Относительное изменение прохождения электромагнитных волн ($\Delta T^*/T^*$) через слой 2МЭГ в кремниевой МПП структуре [21].
 $n_0, 10^{12} \text{ см}^{-2}$: a — 0.36, b — 0.75, c — 1.55, d — 2.51. Нижние монотонные кривые соответствуют поглощению Друде.

Существуют также интересные эксперименты по дальнему инфракрасному излучению плазмонов (см., например, [23]). Для наблюдения таких эффектов в решеточной структуре, показанной на рис. 4, создавались дополнительные контакты, позволяющие пропускать ток через 2МЭГ в направлении, перпендикулярном полосам решетки. Разогрев 2МЭГ за счет пропускания коротких импульсов тока вызывает излучение в узкой спектральной полосе дальнего инфракрасного диапазона. В принципе такое излучение могло бы вызываться не только радиационным распадом двумерных плазмонов, но и рядом других причин. Для выбора между той или иной моделью изучалась зависимость ча-

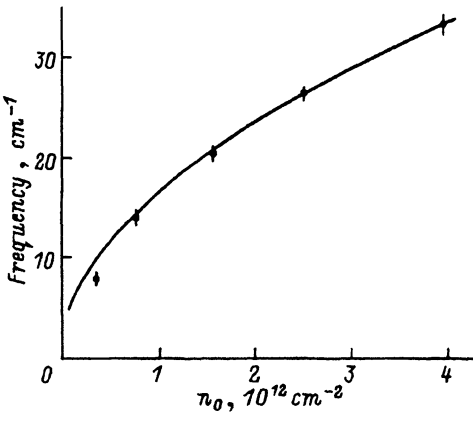


Рис. 6. Зависимость резонансной частоты плазмонного поглощения от концентрации в 2МЭГ n_0 [21].
 Сплошная кривая отвечает формуле (83).

стоты излучения от концентрации 2МЭГ. Полученная зависимость была аналогична изображенной на рис. 6 и точно соответствовала закону дисперсии двумерных плазмонов (83). Это наиболее убедительный аргумент в пользу плазменной природы наблюдавшегося излучения. Заметим также, что, в согласии с продольным характером плазменных колебаний, в образцах, где ток пропусклся вдоль полос решетки, узкополосное излучение, перестраиваемое напряжением на затворе, практически отсутствовало.

Поскольку в МДП структурах концентрацию 2МЭГ легко менять с помощью напряжения на затворе, частота двумерных плазмонов и, следовательно, генерируемого излучения легко перестраивается в широких пределах. Для возможных практических применений это весьма важно.

9. Классический эффект Холла

9.1. *Общая формулировка задачи.* Обсуждаемая в обзоре проблема двумерного экранирования оказывается тесно связанной с теорией эффекта Холла в 2МЭГ. Большинство измерений эффекта Холла в полупроводниках проводится в условиях разомкнутой цепи, где вдоль оси, перпендикулярной току и магнитному полю (назовем ее осью y), возникает холловское электрическое поле. Это поле создается за счет неоднородного распределения электронной концентрации $n(y)$. Для нахождения этого распределения, а также распределения потенциала по образцу необходимо учитывать процессы экранирования в 2МЭГ.

Существует, однако, важное различие между материалом предыдущих разделов и теорией эффекта Холла. Эффект Холла — это существенно неравновесное явление, при рассмотрении которого химический потенциал ζ (точнее, квазипотенциал) следует считать координатно-зависящим, что оказывается особенно важным в низкоразмерных системах. Для случая квантового эффекта Холла на принципиальную возможность ненулевого значения $\nabla\zeta$ указывали авторы работ [24,25], полагая, однако, что эффект этот не играет существенной роли.

Нашей целью является нахождение распределения концентрации носителей, химического и электрического потенциала в проводнике при холловских измерениях и обсуждение эффектов, связанных с нарушением локальной нейтральности. Мы покажем, что в 2МЭГ эти эффекты заметны и весьма интересны.

Будем считать, что магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси z , нормальной к плоскости 2МЭГ, а внешнее напряжение V приложено вдоль оси x . Поскольку ток пропорционален градиенту не электрического, а электрохимического потенциала, $\zeta - e\phi$, условие отсутствия холловского тока можно записать в виде

$$\sigma_{xx} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{1}{e} \frac{\partial\zeta}{\partial y} \right) + \sigma_{xy} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{e} \frac{\partial\zeta}{\partial x} \right) = 0, \quad (57)$$

где σ_{xx} и σ_{xy} — диагональная и недиагональная компоненты проводимости. Это уравнение совместно с уравнением Пуассона позволяет найти пространственное распределение электрического и химического потенциалов, а также электронной плотности [26]. Мы будем полагать, что длина образца в направлении тока L значительно превосходит его ширину в холловском направлении b , что типично для образцов, используемых в холловских измерениях. В этом случае вдали

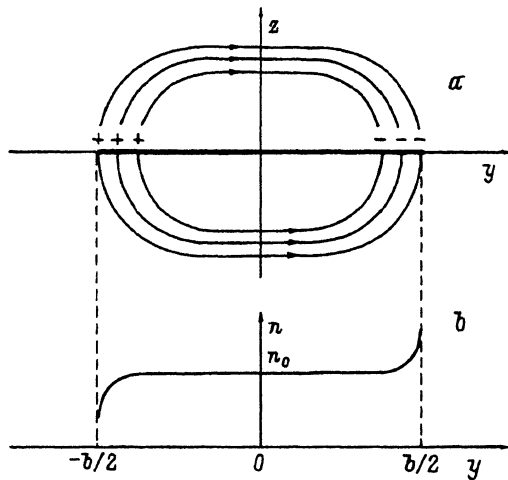


Рис. 7. Схематическое распределение электрического поля (а) и концентрации носителей (б) в полосе 2МЭГ при холловских измерениях.

от токовых контактов концентрация будет зависеть только от координаты y и уравнение (57) заметно упрощается, поскольку $\partial\zeta/\partial x = 0$ и $\partial\phi/\partial x = -E_x = V/L = \text{const}(\mathbf{r})$.

9.2. *Распределение электростатического и химического потенциалов.* Рассмотрим структуру с 2МЭГ в относительно слабых магнитных полях B , когда можно не учитывать квантование Ландау и считать $\sigma_{xy} = (\mu B/c)\sigma_{xx}$ (μ — подвижность электронов). Схематический характер распределения холловского электрического поля и плотности заряда в структуре показан на рис. 7.

Для нахождения распределения концентрации $n(y)$ и потенциала $\phi(y, z)$ мы должны, как обычно, решать уравнение Лапласа $\partial^2\phi/\partial y^2 + \partial^2\phi/\partial z^2 = 0$ вне плоскости, содержащей 2МЭГ, с граничными условиями (10). Однако связь концентрации с потенциалом уже не дается равновесным фермиевским распределением, а должна находиться из (57), которое после интегрирования может быть записано в виде

$$\phi(y, 0) - \frac{\mu B}{c} E_x y = \frac{1}{e} \left(\frac{dn}{d\zeta} \right)_0 [n(y) - n_0]. \quad (58)$$

Если диэлектрические проницаемости по обе стороны 2МЭГ одинаковы, то (10) и (58) дают необходимые граничные условия для ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial z}(y, 0) &= l_2^{-1} \left[\phi(y, 0) - \frac{\mu B}{c} E_x y \right], \quad |y| \leq b/2; \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(y, 0) &= 0, \quad |y| > b/2. \end{aligned} \quad (59)$$

Здесь l_2 — двумерная длина экранирования, определяемая формулой (13).

Уравнение Лапласа с граничными условиями (59) не решается аналитически, но может быть преобразовано в интегральное, более удобное для численного решения. Перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = y/l_2, \quad \nu(\xi) = \frac{2\pi e c}{\epsilon_0 \mu B E_x} [n(y) - n_0], \quad \psi(\xi) = \frac{c\phi(y, 0)}{l_2 \mu B E_x}. \quad (60)$$

В этих обозначениях решение уравнения Лапласа с граничным условием (10) имеет вид

$$\psi(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\lambda\xi) \exp(-\lambda z/l_2) \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{\beta/2} \nu(\eta) \sin(\lambda\eta) d\eta, \quad (61)$$

где $\beta = b/l_2$

Подставляя (61) в (59) и полагая $z = 0$, получаем

$$\nu(\xi) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin(\lambda\xi) \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^{\beta/2} \nu(\eta) \sin(\lambda\eta) d\eta - \xi. \quad (62)$$

Проводя интегрирование по λ , приходим к окончательной форме интегрального уравнения:

$$\nu(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\beta/2} \ln \left(\frac{\xi + \eta}{|\xi - \eta|} \right) d\eta - \xi. \quad (63)$$

Уравнение легко решается численно путем итераций и дает распределение концентрации в холловском направлении для полосок 2МЭГ различной ширины (с различными b). После того как $\nu(\xi)$ найдено, с помощью (61) находится распределение потенциала $\psi(\xi)$ и безразмерное холловское напряжение $\psi(\beta/2) - \psi(-\beta/2)$. Окончательные результаты получены в [26] и приведены на рис. 8 и 9.

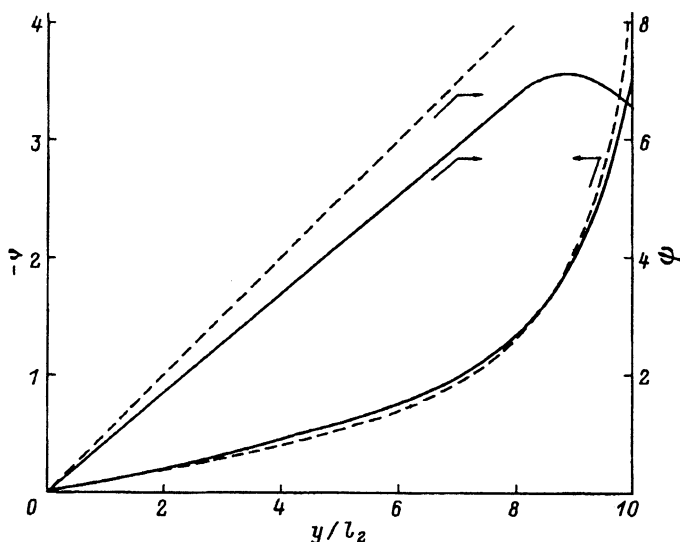


Рис. 8. Координатная зависимость безразмерной плотности заряда (левая шкала) и безразмерного холловского потенциала (правая шкала) в 2МЭГ с $b/l_2 = 20$.

Штриховыми линиями показаны эти же зависимости в пренебрежении диффузией ($l_2 \rightarrow 0$).

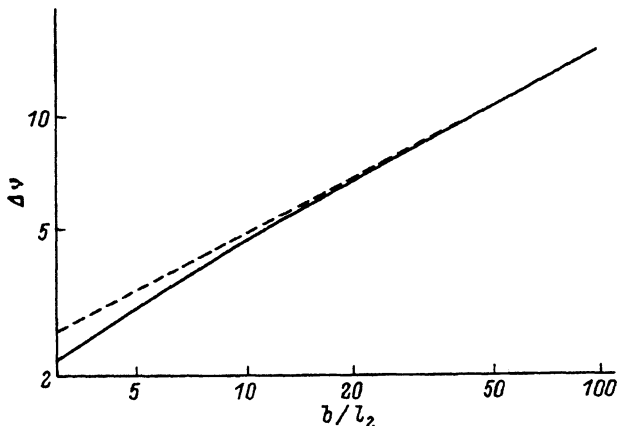


Рис. 9. Зависимость разности безразмерных концентраций на противоположных сторонах образца $\Delta\nu \equiv \nu(-\beta/2) - \nu(\beta/2)$ от его ширины.

Штриховой линией показана зависимость $\Delta\nu \propto b^{1/2}$.

На рис. 8 показано распределение электронной концентрации и электрического потенциала для структуры с 2МЭГ при ширине $b = 20l_2$, значительно превосходящей l_2 . Видны значительные отклонения от нейтральности даже на достаточно больших расстояниях от краев образца, а холловское поле даже меняет знак у краев. На рис. 9 показано, что разность концентраций на противоположных краях при больших b не насыщается, а растет приблизительно $\propto b^{1/2}$. Для объяснения этого факта заметим, что вдали от краев мы можем пренебречь диффузионным током (правая часть в (58)). В этом приближении зависимость $\psi(\xi)$ линейна, а плотность заряда расходится вблизи краев:

$$\nu(\xi) = -\frac{\xi}{(\beta^2/4 - \xi^2)^{1/2}} \quad (64)$$

(см., например, [27]). Эти приближенные зависимости показаны на рис. 8 пунктиром. Диффузионный член обеспечивает эффективное экранирование, обрезая рост концентрации на расстоянии $\sim l_2$ от краев. В результате плотность заряда у краев имеет порядок $(b/l_2)^{1/2}(\epsilon_0\mu VE_x/2\pi ec)$.

В принципе разность химических потенциалов на противоположных краях образца существует и в трехмерных образцах. Но там она имеет очень малую величину, $\zeta(b/2) - \zeta(-b/2) \sim (\epsilon\mu V l_3/c)E_x \sim eE_H l_3$ (E_H — холловское электрическое поле), не зависящую от ширины образца b [26]. Напротив, в 2МЭГ эффект значительно более существен и растет с ростом b . Возможности экспериментального наблюдения эффекта будут обсуждаться в разд. 10.4.

10. Двумерные электроны в квантующем магнитном поле

Обсудим эффекты электронного экранирования в квантующем магнитном поле \mathbf{B} , нормальном к плоскости 2МЭГ. Хорошо известно, что энергетический спектр такой системы чисто дискретен и состоит из эквидистантных уровней Ландау: $E_N = \hbar\omega_c(N + 1/2)$, где $\omega_c = eB/mc$ — циклотронная частота, а $N = 0, 1, 2, \dots$. Каждый уровень Ландау имеет кратность вырождения $eB/\pi\hbar c$ на единицу площади, равную числу неэквивалентных положений центра циклотронной орбиты $n_L \equiv eB/2\pi\hbar c$, умноженному на двукратное спиновое вырождение. В результате плотность состояний представляет собой серию δ -пику:

$$g(E) = \frac{eB}{\pi\hbar c} \sum_N \delta[E - \hbar\omega_c(N + 1/2)]. \quad (65)$$

Если спиновое расщепление уровней Ландау заметно, то каждый пик расщепляется на два, каждый из которых содержит n_L вырожденных состояний на единицу площади.

Сингулярный характер плотности состояний (65) приводит к ступенчатой зависимости концентрации электронов n_0 от химического потенциала ζ_0 в вырожденном 2МЭГ (рис. 10, б). Удобно описывать концентрацию с помощью фактора заполнения уровней Ландау $\nu = n_0/n_L$. При целочисленных значениях ν химический потенциал лежит в щели между уровнями Ландау, что соответствует нулям на σ_{xx} и плато на σ_{xy} в экспериментах по квантовому эффекту Холла.

В реальных структурах за счет случайного потенциала примесей уровни Ландау уширены и все электроны, за исключением находящихся в центре уширенного уровня, локализованы и не принимают участия в эффектах переноса. Это обстоятельство особенно важно для кинетических явлений, таких как квантовый эффект Холла. Вместе с тем большинство электростатических явлений, которые нас интересуют, могут быть адекватно описаны в модели идеальных уровней Ландау (65), и потому мы ограничимся этой простейшей моделью. При этом следует помнить, что некоторые наши последующие рассуждения относятся, строго говоря, только к случаю, когда образец вдали от контактов имеет «металлическую» проводимость с нецелым фактором заполнения ν и уровнем Ферми, привязанным к одному из уровней

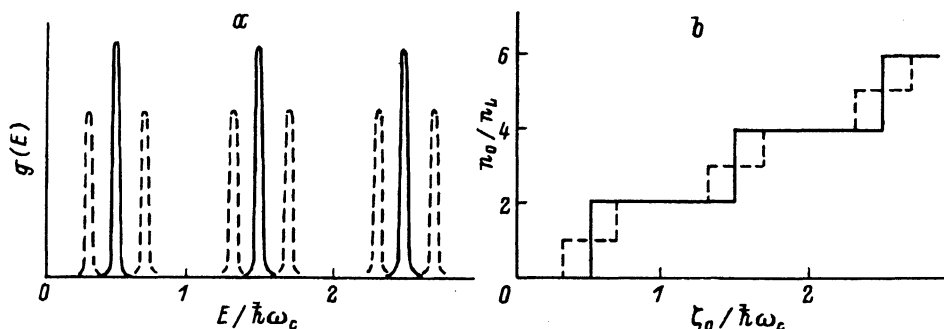


Рис. 10. Плотность состояний (а) и зависимость концентрации от химического потенциала (б) для 2МЭГ в сильном магнитном поле.

Ландау. «Диэлектрическая» ситуация, соответствующая плато квантового эффекта Холла, требует закрепления уровня Ферми в щели между уровнями Ландау, что невозможно в идеальной модели.

10.1. «Металлические» и «диэлектрические» области. Ступенчатый характер зависимости n_0 от ζ_0 , показанный на рис. 10, приводит к специфическому характеру экранирования в квантовых магнитных полях. Если подставить эту зависимость в выражение (13) для длины экранирования, то получим, что длина экранирования в зависимости от положения уровня химического потенциала равна либо нулю, либо бесконечности. В результате неоднородный 2МЭГ разделится на области двух различных типов [28]:

— «сжимаемые», или «металлические» области, где химический потенциал совпадает с одним из уровней Ландау и формально, благодаря бесконечной плотности состояний, $l_2 = 0$;

— «несжимаемые», или «диэлектрические» области, где химический потенциал лежит в щели между уровнями Ландау и $l_2 = \infty$, что означает отсутствие экранирования. (Говоря точнее, в этих областях существует некоторое экранирование за счет деформации волновых функций во внешнем потенциале [27], однако это эффект весьма слаб и может играть роль лишь при малой амплитуде экранируемого потенциала, $V < \hbar\omega_c/e$; если eV имеет порядок расстояния между уровнями Ландау или превосходит его, то возникают металлические области, осуществляющие более эффективное экранирование, рассматриваемое далее).

Металлические области характеризуются фиксированным положением уровня химического потенциала, но неопределенностью в концентрации электронов, которая внутри одной и той же области может меняться в интервале n_L . Напротив, в диэлектрических областях концентрация фиксирована и равна целому кратному n_L , в то время как химический потенциал может иметь произвольное положение между уровнями Ландау. В неоднородной ситуации, при меняющейся в пространстве концентрации 2МЭГ, полная картина будет представлять чередующуюся систему металлических и диэлектрических областей [29,28], рассматриваемую более детально в следующем разделе.

10.2. Контактные явления. Применим представления, сформулированные в предыдущем разделе, для расчета контактного изгиба зон в той же геометрии, что рассматривалась в разд. 5 и показана на рис. 3. Результирующее распределение потенциала и концентрации носителей в приконтактной области обеднения изображено на рис. 11. Вблизи контакта существует область полного обеднения, ширина которой при большом обедняющем напряжении описывается той же формулой (30), что и в отсутствие магнитного поля. Однако распределение заряда и потенциала в области $x > l$ качественно меняется и представляет серию чередующихся металлических и диэлектрических полос. Их параметры детально рассмотрены в [28]. Мы приведем здесь некоторые наиболее важные результаты.

На рис. 11,с показано распределение концентрации электронов при наличии и в отсутствие магнитного поля. Видно, что максимальные отклонения $n(x)$ от своего значения в отсутствие поля (31) локализованы в непосредственной близости от диэлектрических полос, каждая из которых может рассматриваться как линейный диполь с

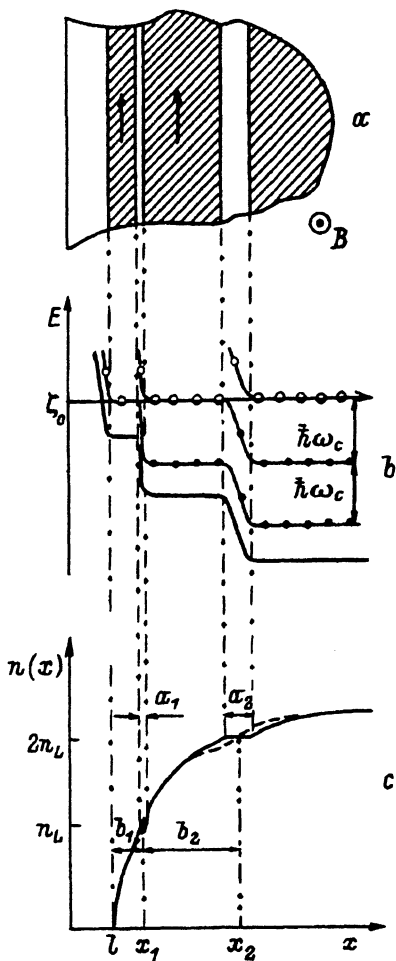


Рис. 11. Контакт к 2МЭГ в режиме квантового эффекта Холла (из [28]).

a — вид сверху на плоскость 2МЭГ вблизи контакта; заштрихованы области с нецелым фактором заполнения («металлические» полосы), стрелки показывают направление тока электронов. *b* — изгиб уровней Ландау; кружками показано локальное заполнение уровней: черные — заполненные уровни, черно-белые — частично заполненные, белые — пустые. *c* — координатная зависимость концентрации электронов при наличии (сплошная линия) и в отсутствие (штриховая) магнитного поля.)

центром при x_k . Рассмотрим случай нецелого ν с $n_0 = n_L N + \Delta n$ (N — целое, $0 < \Delta n < n_L$). Легко видеть, что помимо области полного обеднения $x < l$ существуют также N диэлектрических полос $x_k - a_k/2 < x < x_k + a_k/2$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Концентрация электронов и потенциал сохраняют постоянные значения соответственно внутри и снаружи полосы. Таким образом, в окрестности некоторой k -й полосы граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= -\frac{\hbar\omega_c}{e}(N - k + 1), & x < x_k - a_k/2; \\ \phi(x, 0) &= -\frac{\hbar\omega_c}{e}(N - k), & x > x_k + a_k/2; \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, 0) &= -\frac{2\pi e[n_L(N - k) + \Delta n]}{\epsilon_0}, & |x - x_k| < a_k/2. \end{aligned} \quad (66)$$

Решение уравнения Лапласа с данными граничными условиями может быть представлено в виде $\phi(x, z) = \phi_0(x, z) + \phi_1(x, z)$, где ϕ_0 — распределение в отсутствие поля, найденное в разд. 5.2, а ϕ_1 — вклад

упомянутых дипольных слоев. Далее будет показано, что эффективная ширина дипольных слоев a_k много меньше расстояния между ними. Это позволяет пренебречь взаимным влиянием диполей и рассматривать каждый из них независимо. Преобразуя (67) в граничные условия для новой переменной, мы учитываем, что для $x > l$ $\phi_0(x, z) = 0$ и $\partial\phi_0/\partial z(x, 0) = (2\pi e/\epsilon_0)[n(x) - n_0]$, где $n(x)$ дается выражением (31). Для узких полос точное выражение для $n(x)$ может быть разложено вблизи $x = x_k$ до линейных членов включительно, что дает окончательно следующие граничные условия для ϕ_1 :

$$\begin{aligned} \phi_1(x, 0) &= -\frac{\hbar\omega_c}{e}, \quad x > x_k - a_k/2; \\ \phi_1(x, 0) &= 0, \quad x > x_k + a_k/2; \\ \frac{\partial\phi_1}{\partial z}(x, 0) &= \frac{2\pi e}{\epsilon_0} \frac{dn(x)}{dx} \Big|_{x=x_k} (x - x_k), \quad |x - x_k| < a_k/2. \end{aligned} \quad (67)$$

Решение соответствующего уравнения Лапласа может быть получено в явном виде [28]:

$$\phi_1(x, z) = -\frac{\hbar\omega_c}{\pi e} \operatorname{Im} \ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) + \frac{\pi e}{\epsilon_0} \frac{dn(x)}{dx} \Big|_{x=x_k} \operatorname{Im} \left[\xi \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right], \quad (68)$$

где $\xi = 2(x - x_k + iz)/a_1$. До сих пор мы рассматривали ширины диэлектрических областей a_k как независимые параметры. По аналогии с результатами разд. 5.2 мы можем найти их из условия, что электрическое поле в плоскости слоя $\partial\phi/\partial x(x, 0)$, определяемое из (68), не имеет особенностей при $x = x_k \pm a_k/2$. Это дает

$$a_k^2 = \frac{4\epsilon_0 \hbar\omega_c}{\pi^2 e^2 (dn/dx)|_{x=x_k}}. \quad (69)$$

Полученное выражение для a_k легко объясняется. Падение потенциала на дипольном слое равно $\hbar\omega_c/e$. В то же самое время его можно определить как произведение характерного электрического поля в полосе $e(dn/dx)|_{x=x_k} a_k/\epsilon_0$ на ее ширину a_k , что дает формулу (69) с точностью до численного множителя.

Другим важным параметром задачи является расстояние между диэлектрическими полосами $b_k = x_k - x_{k-1}$. При $N \gg 1$ его можно найти из выражения $b_k \simeq n_L/(dn/dx)|_{x=x_k}$, что дает $a_k^2 = (8/\pi)b_k a_B$.

Для оценки величины $(dn/dx)|_{x=x_k}$ в (69) и получения конкретных выражений для a_k и b_k мы можем использовать формулу (31), что дает $(dn/dx)|_{x=x_k} = n_0 l (x_k + l)^{-1} (x_k^2 - l^2)^{-1/2}$. Поскольку $n(x_k) = kn_L$, то $x_k = l(n_0^2 + k^2 n_L^2)/(n^2 - k^2 n_L^2)$, и окончательно для $N \gg 1$ имеем

$$a_k = 4 \sqrt{\frac{2a_B l}{\pi}} \frac{N\sqrt{k}}{N^2 - k^2}, \quad (70)$$

$$\frac{a_k}{b_k} = \sqrt{\frac{2a_B}{\pi l}} \frac{N^2 - k^2}{N\sqrt{k}}. \quad (71)$$

Поскольку $a_B \ll l$, можно видеть, что, как уже говорилось, ширина диэлектрических полос значительно меньше, чем металлических, по крайней мере для внутренних полос с не очень малыми k . С ростом k как a_k , так и b_k возрастают, в то время как их отношение (71) уменьшается.

В отсутствие магнитного поля, когда контактный потенциал ϕ_0 дается формулами разд. 5, плотность заряда вдали от металлического контакта спадает гиперболически (31). Можно показать, что дополнительный потенциал квантовых диполей ϕ_1 (см. (68)) обладает тем же свойством. Таким образом, универсальный характер распределения заряда вдали от контакта и аномально большая контактная емкость, определяемая геометрическими факторами, отмеченные в разд. 5.3, характерны и для 2МЭГ в сильном магнитном поле с чисто дискретным энергетическим спектром [9].

10.3. *Распределение потенциала и концентрации.* Обобщим теорию эффекта Холла, описанную в разд. 9, на квантовый случай. Как и в классической ситуации, между контактными явлениями, рассмотренными выше, и эффектом Холла существует одно важное различие. В теории контактных явлений электроны считаются равновесными и $\nabla\zeta = e\nabla\phi$. В нашем случае функции $\zeta(y)$ и $e\phi(y)$ не равны и должны определяться раздельно [26].

Наличие холловского напряжения на образце приводит к образованию чередующихся металлических и диэлектрических областей, как и в теории контактных явлений. Вдали от токовых контактов границы этих областей параллельны току или, что то же самое, границам образца. Основная разница с описанным в предыдущем разделе равновесным распределением состоит в ходе потенциала в металлических областях. Они характеризуются уже не постоянным потенциалом (67), а его линейным ходом,

$$\phi(y, 0) = -\frac{\sigma_{xy}\partial\phi}{\sigma_{xx}\partial x}y + \text{const} \equiv -E_H y + \text{const}, \quad (72)$$

который получается из (57) при учете того, что в этих областях $\zeta = \text{const}$.

В зависимости от равновесного положения уровня Ферми ζ_0 следует рассматривать две различные ситуации.

Вначале рассмотрим случай нецелого фактора заполнения, когда $\zeta = \hbar\omega_c(N+1/2)$ (рис. 12, а). При этом центральная часть образца будет металлической с однородным электрическим полем (72). Однако этого не может быть во всем образце, поскольку тогда плотность заряда у краев была бы бесконечна (см. (64)). Следовательно, при любом приложенном напряжении края образца должны быть диэлектрическими. Для оценки ширины этих диэлектрических полосок δ можно использовать формулу (64): δ можно определить как значение $(b/2 - y)$, при котором поверхностная плотность заряда равна концентрации электронов (или свободных мест) на уровне Ландау. Эта концентрация имеет порядок n_L и потому

$$\delta/b \sim [(\epsilon_0 \hbar c / e^2)(E_H / B)]^2. \quad (73)$$

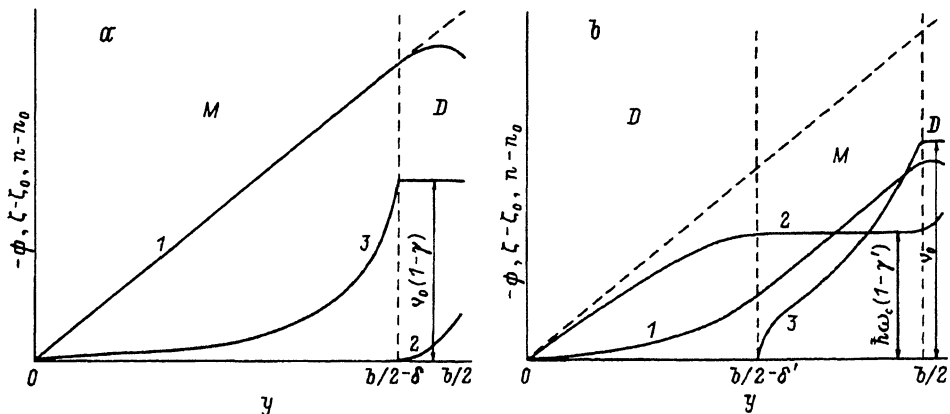


Рис. 12. Схематическая координатная зависимость электрического потенциала (1), химического потенциала (2) и нескомпенсированной концентрации электронов (3) в условиях квантового эффекта Холла.

a — нецелый равновесный фактор заполнения: $n_0 = n_L(N + \gamma)$, $\phi_0 = \hbar\omega_c(N + 1/2)$.
b — целочисленный фактор заполнения: $n_0 = (N + 1)$, $\phi_0 = \hbar\omega_c(N + 1/2 + \gamma')$. $0 < \gamma, \gamma' < 1$.
 Буквы *M* и *D* обозначают «металлическую» и «диэлектрическую» фазы. Штриховой линией показана линейная зависимость $\phi(y) = -E_H y$.

Для любых разумных значений E_H и B , характерных для квантового эффекта Холла, правая часть (73) значительно меньше единицы. Точное распределение концентрации электронов, электрического и химического потенциалов в образце рассчитывалось в [26] и показано схематически на рис. 12,а. Аналогичная немонотонная зависимость $\phi(y)$ была ранее получена путем численных расчетов в [30,31].

Интересно отметить, что полный заряд, сконцентрированный в половине металлической области, имеет порядок $\epsilon_0 E_H b$, в то время как заряд в краевой диэлектрической области имеет значительно меньшую величину, в согласии с обсуждавшимся в разд. 10.2 соотношением между ширинами металлических и диэлектрических областей.

Приведенные аргументы показывают, что даже при малых токах (малые E_H) концентрация электронов на противоположных краях образца отличается на конечную величину: $n(b/2) - n(-b/2) = n_L \equiv \equiv eB/2\pi\hbar c$.

Наши выводы относятся к случаю не слишком больших E_H . Если ток (и, следовательно, E_H) достаточно велик, то химический потенциал ζ , изменяясь на длине δ , может достичь следующего уровня Ландау, что приведет к появлению еще одной металлической полосы. В этом случае $n(b/2) - n(-b/2)$ становится равным уже не n_L , а $2n_L$. Оценим соответствующее критическое значение $(E_H)_{cr}$. Можно показать, что $\zeta(b/2) - \zeta_0 \sim eE_H \delta$. Дополнительная полоса появляется, когда эта разность достигает $\hbar\omega_c$, что с учетом (73) дает $(E_H)_{cr} \sim B(e^4/\hbar c^3 \epsilon_0^2 m b)^{1/3}$. Дальнейший рост E_H вызовет появление дополнительных металлических полос, сопровождающееся очередными скачками $n(b/2) - n(-b/2)$.

Если ζ_0 лежит между уровнями Ландау, $\zeta_0 = \hbar\omega_c(N + 1/2 + \gamma')$ с $0 < \gamma' < 1$, то картина заметно меняется (рис. 12,б). При малых токах, когда $eV_H < \hbar\omega_c$, на уровне Ферми нет делокализованных электронов. В этом случае формально $l_2 = \infty$ и экранирование происходит лишь за счет деформации волновых функций Ландау [27], что выходит за рамки

нашего подхода, использующего локальную связь между потенциалом и концентрацией электронов.

С ростом тока химический потенциал вблизи одного или обоих краев образца фиксируется на уровне Ландау и локальное значение фактора заполнения принимает нецелое значение (качественно этот факт уже отмечался в работе [32]). Эти металлические области осуществляют эффективное экранирование и значительно изменяют распределение потенциала по сравнению со случаем малых токов. Заметим, что, как и в предыдущем случае, на самых краях образца должны существовать узкие диэлектрические полосы (рис. 12, b).

Вычисления показывают [26], что $\phi(y)$ в нейтральной сердцевине образца описывается формулой

$$\phi(y) = -\frac{E_H(b/2 - \delta')}{\pi} \int_0^{2\delta'/b} \left(\frac{t}{2\delta'/b - t} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{t+2}{t} \right) dt, \quad (74)$$

где δ' — ширина металлической полосы, считающаяся значительно меньшей, чем $b/2$. В частности, на границе диэлектрической и металлической областей $\phi(b/2\delta') \simeq -E_H\delta'[0.2 + 0.5 \ln(b/\delta')]$.

Для нахождения неизвестной величины δ' заметим, что в точке $y = b/2 - \delta'$ ζ должно совпадать с уровнем Ландау и $\zeta - \zeta_0$ должно равняться $\hbar\omega_c(1 - \gamma')$ (или $-\hbar\omega_c\gamma'$ на противоположной стороне). Учитывая соотношение $e\phi(y) - \zeta(y) + \zeta_0 = -eE_H y$ и полагая $\gamma' = 0.5$, получаем уравнение

$$eE_H\delta'[2.4 + \ln(b/\delta')] = eE_H b - \hbar\omega_c. \quad (75)$$

Оно имеет решение, удовлетворяющее нашему предположению $\delta' \ll b$, только для узкого диапазона токов. Это означает, что вскоре после того как $eE_H b$ превысит $\hbar\omega_c$, металлическая область распространится на значительную часть образца. В результате мы придем к ситуации, аналогичной случаю нецелого фактора заполнения. Единственным различием будет то, что $n(b/2) - n(-b/2)$ равно $2n_L$, а не n_L .

Таким образом, в условиях квантового эффекта Холла существует широкая область холловских полей, $\hbar\omega_c/eb < E_H < (E_H)_{cr}$, где концентрация электронов на противоположных краях образца различается на постоянную величину, кратную n_L .

10.4. *Экспериментальные результаты.* В разд. 9 и 10 мы показали, что электростатические эффекты могут исказить общепринятую картину как классического, так и квантового эффекта Холла, создавая неоднородности в пространственном распределении холловского электрического поля и концентрации носителей. Эти эффекты уменьшают разность электрических потенциалов между краями образца $\phi(b/2) - \phi(-b/2)$. На первый взгляд, это должно уменьшать измеряемое холловское напряжение и, следовательно, холловское сопротивление ρ_{xy} , вызывая отклонения от классического значения $V/n_0 e s$ в слабых магнитных полях и от $\pi\hbar/e^2 N$ в режиме квантового эффекта Холла. Однако это не так, поскольку измеряемое холловское напряжение определяется разностью не электрических, а электрохимических потенциалов $\phi - \zeta/e$ (см., например, [24]) и уменьшение $\Delta\phi$ в точности компенсируется возникновением $\Delta\zeta$ за счет Δn .

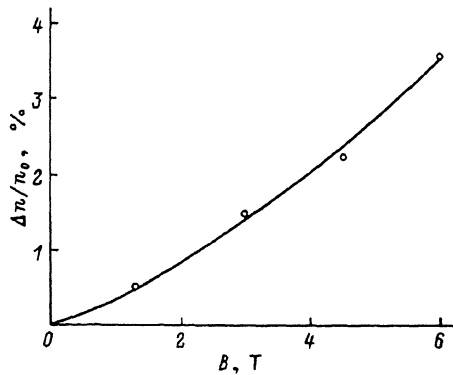


Рис. 13. Экспериментальная зависимость разности концентраций на противоположных краях холловского образца от магнитного поля (из [34]).

Эффект может быть обнаружен при прямых измерениях разности концентраций на противоположных сторонах образца Δn . В классическом случае Δn пропорционально току через образец j (см. разд. 9.2), в то время как в квантовом случае $\Delta n = eBN/\pi\hbar c = \text{const}(j)$ ($N = 1, 2, \dots$) в широком интервале j . Данная величина имеет порядок $10^{10} \div 10^{11} \text{ см}^{-2} \text{ см}^{-2}$ для типичных B , используемых в экспериментах по квантовому эффекту Холла. Это достаточно большое значение, которое можно обнаружить в экспериментах, позволяющих определять локальную концентрацию электронов в разных частях образца.

Один из таких экспериментов уже описан в литературе [33]. Изучались изменения проводимости 2МЭГ в сильном магнитном поле под влиянием сфокусированного пучка неравновесных фононов. Эффект имел осциллирующую зависимость от B , аналогичную осцилляциям Шубникова-де-Гааза, но частота осцилляций, определяемая концентрацией электронов (уровнем химического потенциала), на противоположных гранях образца была различна. Последующие исследования [34] показали, что эффект связан не с неоднородностью образца как такового, а с эффектом Холла, что подтверждается сменой знака Δn при изменении направления магнитного поля или тока и ростом Δn с ростом магнитного поля (рис. 13). Разность локальных значений ζ на противоположных сторонах образца имела порядок $\hbar\omega_c$, в согласии с изложенной выше теорией.

Другой возможный способ исследования неоднородностей распределения потенциала и концентрации в образце основан на электрооптических измерениях. Он позволяет определить распределение локальной напряженности электрического поля. Первые результаты, полученные с его помощью в условиях квантового эффекта Холла, приведены в [35,36].

11. Роль сил изображения

Всюду выше мы обсуждали свойства 2МЭГ в электрически однородных системах, где диэлектрическая проницаемость ϵ_0 имела одно и то же значение во всем объеме, окружающем 2МЭГ. Такая модель адекватно описывает большинство гетероструктур, где диэлектрические проницаемости соседних полупроводников различаются, как правило, достаточно мало. В то же время существуют и иные, электрически неоднородные системы. В качестве примера достаточно назвать МДП

структуры (металл-диэлектрик-полупроводник). В этих структурах, во-первых, 2МЭГ существует на границе веществ с различными ϵ (например, Si и SiO₂) и, во-вторых, поблизости от 2МЭГ располагается металлический затвор. Оба этих фактора создают силы изображения, заметно изменяющие электрический потенциал. Роль этих сил и рассматривается в данной главе.

11.1. *Граница двух диэлектриков.* Начнем со случая, когда 2МЭГ существует на границе веществ с различными диэлектрическими проницаемостями: $\epsilon_0 = \epsilon_+$ при $z > 0$ и $\epsilon_0 = \epsilon_-$ при $z < 0$. В этом случае энергия электростатического взаимодействия между двумя зарядами Q и Q' на границе равна $2QQ'/r(\epsilon_+ + \epsilon_-)$, где r — расстояние между зарядами [19]. Таким образом, наличие одной границы раздела может быть учтено простой заменой $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{\text{eff}} \equiv (\epsilon_+ + \epsilon_-)/2$ во всех предыдущих формулах.

Эта модель пригодна для описания 2МЭГ в одиночном гетеропереходе. Если толщина верхнего полупроводникового слоя достаточно мала, то во многих электростатических задачах можно считать, что 2МЭГ находится на границе между полупроводником с проницаемостью ϵ_s и воздухом. Для $\epsilon_s \gg 1$ $\epsilon_{\text{eff}} \simeq \epsilon_s/2$. Это можно показать и иначе. При больших ϵ_s электрическое поле концентрируется в основном в полупроводнике. Это означает, что мы можем решать уравнение Пуассона только в полупространстве $z < 0$, используя граничное условие $\epsilon_s(\partial\phi/\partial z)_0 = 4\pi e[n(\rho) - n_0]$. Другими словами, правую часть наших граничных условий (24), (28), (45) и т.д. следует увеличить в 2 раза. Именно такой подход был использован в [28]. Поэтому формулы данной работы отличаются от выражений, приведенных в разд. 10.2, на множитель 2.

Значительно более интересно влияние сил изображения в случае тонкой пленки $0 < z < d$ с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 = \epsilon_f$, существенно отличающейся от проницаемости как подложки ($\epsilon_0 = \epsilon_-$ при $z < 0$), так и атмосферы над пленкой ($\epsilon_0 = \epsilon_+$ при $z > d$). В этом случае даже неэкранированный потенциал точечного заряда Q в пленке $\phi_0(\rho)$ может иметь существенно некулоновский вид. Если $\epsilon_f \gg \gg \epsilon_+, \epsilon_-$, то для $\rho \gg d$ [7,37]

$$\phi_0(\rho) = \frac{\pi Q}{\epsilon_f \rho} \left[\mathcal{H}_0 \left(\frac{\epsilon_+ + \epsilon_- \rho}{\epsilon_f d} \right) - N_0 \left(\frac{\epsilon_+ + \epsilon_- \rho}{\epsilon_f d} \right) \right], \quad (76)$$

где $\mathcal{H}_0(x)$ и $N_0(x)$ — функции Струве и Неймана. В интервале $d \ll \rho \ll d\epsilon_f/(\epsilon_+ + \epsilon_-)$ электрическое поле сконцентрировано в основном в пленке и потенциал аналогичен потенциалу линейного заряда:

$$\phi_0(\rho) = \frac{2Q}{\epsilon_f d} \ln \left(\frac{2\epsilon_f d}{\epsilon_+ + \epsilon_- \rho} \right). \quad (77)$$

Лишь при $\rho \gg \epsilon_f d/(\epsilon_+ + \epsilon_-)$ силовые линии выходят из пленки и $\phi_0(\rho) \simeq 2Q/(\epsilon_+ + \epsilon_-)\rho$. В результате энергия кулоновской связи для $a_B(\epsilon_+ + \epsilon_-)^2/4\epsilon_f^2 \ll d \ll a_B$ существенно отличается от боровской энер-

гии и дается формулой [37]

$$E = -\frac{e^2}{\epsilon_f d} \ln \left[\left(\frac{2\epsilon_f}{\epsilon_+ + \epsilon_-} \right)^2 \frac{d}{a_B} \right], \quad (78)$$

где a_B — боровский радиус в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_f .

Экранированный кулоновский потенциал в пленке с большой диэлектрической проницаемостью был рассчитан в [7]. Его фурье-компонента есть

$$\phi(q) = \frac{2Q}{\epsilon_f \{q[qd + (\epsilon_+ + \epsilon_-)/\epsilon_f] + 4/a_B\}}. \quad (79)$$

Если $(\epsilon_+ + \epsilon_-)/\epsilon_f \gg 4\sqrt{d/a_B}$, то членом $\sim q^2$ в знаменателе (79) можно пренебречь, и мы возвращаемся к хорошо известному выражению (19). В обратном пределе, т.е. при очень большой восприимчивости пленки, несуществен линейный член. Опуская его, получаем после обратного фурье-преобразования

$$\phi(\rho) \simeq \frac{2Q}{\epsilon_f d} K_0 \left(\frac{2\rho}{\sqrt{da_B}} \right) \quad (80)$$

($\rho \gg d$), где $K_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента. На очень больших расстояниях, $\rho > \sqrt{da_B}/2$, потенциал (80) спадает экспоненциально,

$$\phi(\rho) \simeq \frac{2Q}{\epsilon_f d} \frac{\sqrt{da_B}}{\sqrt{\pi\rho}} \exp(-2\rho/\sqrt{da_B}), \quad (81)$$

как в трехмерном случае, но с иной, зависящей от d , длиной экранирования. Это обстоятельство легко объяснить. Как уже говорилось в разд. 3, слабость экранирования в 2МЭГ связана с тем, что электрическое поле существует во всем пространстве, в то время как экранирующие электроны могут двигаться лишь в плоскости. В нашем случае электрическое поле локализовано в основном в пленке, так что, как и в трехмерном случае, почти все пространство, содержащее электрическое поле, доступно для электронов.

11.2 Металлический затвор в МДП структурах. На рис. 1, с изображена типичная геометрия МДП структуры. Здесь 2МЭГ образован в инверсионном слое вблизи границы раздела полупроводника с диэлектрической проницаемостью ϵ_s и окисла с диэлектрической проницаемостью ϵ_d . На расстоянии d от 2МЭГ находится металлический затвор. Наиболее важный эффект затвора состоит в дополнительном экранировании зарядами изображения, индуцированными в металле. Любой избыточный заряд в 2МЭГ сопровождается теперь изображением, имеющим противоположный знак, и потому на больших расстояниях, $\gg 2d$, ведет себя как диполь. В результате потенциал спадает значительно быстрее, чем в отсутствие затвора.

Формально это может быть количественно описано с помощью эффективной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{\text{eff}} = [\epsilon_s + \epsilon_d \coth(qd)]/2. \quad (82)$$

Из формул (15) и (82) видно, что фурье-компоненты потенциала с $q < d^{-1}$ резко подавлены. Заметим, что длинноволновая асимптотика выражения (82) аналогична (18). Это означает, что экранирование самим 2МЭГ и металлическим затвором носит сходный характер, а их относительный вклад зависит от отношения длины экранирования l_2 и толщины диэлектрика МДП структуры.

Эффекты экранирования металлическим затвором заметно изменяют закон дисперсии двумерных плазмонов. Заменяя ϵ_0 в (56) на ϵ_{eff} , получаем для закона дисперсии [38-40]

$$\omega^2 = \frac{4\pi e^2 n_0 q}{m[\epsilon_s + \epsilon_d \coth(qd)]}. \quad (83)$$

Для длинноволновых ($qd < 1$) плазмонов закон дисперсии становится линейным с фазовой скоростью $v = (4\pi e^2 n_0 d / \epsilon_d m)^{1/2}$.

Описанное в разд. 9 и 10 перераспределение зарядов в эффекте Холла также модифицируется в присутствии металлического затвора. Формально его можно найти путем решения уравнения Лапласа с дополнительным граничным условием: $\phi = \text{const}$ на плоскости $z = d$. Наличие затвора приведет к дополнительному уменьшению $\Delta\phi = \phi(b/2) - \phi(-b/2)$. Для гипотетической МДП структуры с очень тонким диэлектриком, $d \ll a_B$, $\Delta\phi$ будет в $\sim a_B/d$ раз меньше, чем в отсутствие затвора. В то же самое время $\Delta\zeta$ возрастет и можно ожидать, что разность Δn на противоположных краях образца будет больше, чем предсказывалось в разд. 9 и 10.

Таким образом, МДП структуры и гетероструктуры с одной и той же проводимостью 2МЭГ и при одном и том же токе будут иметь различные холловские поля и различные возникающие градиенты концентрации. В результате пробой квантового эффекта Холла, какова бы ни была его физическая природа, может протекать по-разному в этих двух типах структур с 2МЭГ.

12. Заключение

Итак, мы рассмотрели различные эффекты, связанные с экранированием статического или динамического электрического поля в полупроводниковых структурах с 2МЭГ. Мы показали, что электроны в этих структурах, ограниченные в своем движении одной плоскостью, осуществляют значительно более слабое экранирование, чем в трехмерном случае. В результате в двумерных электронных системах появляется ряд качественно новых эффектов, отсутствующих в массивных образцах:

1) характерная длина экранирования в вырожденном 2МЭГ равна половине эффективного боровского радиуса и не зависит от концентрации электронов;

2) потенциал экранированного заряда спадает на больших расстояниях ρ относительно медленно, пропорционально ρ^{-3} , а не экспоненциально;

3) ширина приконтактной области полного обеднения пропорциональна контактному потенциалу и обратно пропорциональна концентрации 2МЭГ;

4) статическая контактная емкость на единицу длины идеального бесконечного контакта расходится, а в реальных структурах определяется геометрическими факторами и практически не зависит от параметров $2MЭГ$ и напряжения на контакте;

5) частотная зависимость контактной емкости носит логарифмический характер и для больших контактов может существовать даже при низких частотах;

6) релаксация заряда в $2MЭГ$ определяется не характерным временем, а характерной скоростью, пропорциональной проводимости образца σ , и при больших σ должна рассчитываться с учетом релактивистских эффектов;

7) частота плазмонов в $2MЭГ$ становится зависящей от волнового вектора, что позволяет наблюдать плазменное поглощение и излучение в специальных структурах с решетками, определяющими волновой вектор плазмонов;

8) при измерениях эффекта Холла в $2MЭГ$ могут возникать заметные градиенты концентрации и химического потенциала ζ , в сильных магнитных полях разность ζ на противоположных краях образца кратна расстоянию между уровнями Ландау;

9) в режиме квантового эффекта Холла приконтактная область объемного заряда разбивается на чередующиеся проводящие и изолирующие области, соответствующие нецелым и целым факторам заполнения уровней Ландау.

Многие из этих эффектов уже наблюдались экспериментально. Эта работа сделалась возможной благодаря годам совместной работы с С.Г. Петросьяном. Автор хотел бы также поблагодарить Л. Чаллиса (Ноттингемский университет) и М.И. Дьяконова (ФТИ им. А.Ф. Иоффе) за полезные обсуждения. Работа выполнена при финансовой поддержке НАТО (грант CRG 930040) и фонда Сороса (грант R5C000).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Простейшим приближением, позволяющим вычислить отклик электронной системы на электромагнитное возмущение, является так называемое приближение хаотических фаз (см., например, [41]). Оно приводит к хорошо известной формуле Линдхарда для электронной поляризуемости:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{e^2}{q^2 L^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{f(E_{\mathbf{k}}) - f(E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}})}{E_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{k}} - \hbar\omega - i\alpha}. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $f(E)$ — функция распределения Ферми, L — нормировочная длина в плоскости $2MЭГ$. Для полностью вырожденного $2MЭГ$ интегрирование в (84) выполняется точно, что дает [8]

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \chi_1(\mathbf{q}, \omega) + i\chi_2(\mathbf{q}, \omega);$$

$$\chi_1(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2m\epsilon^2 n_0}{\hbar^2 k_F q^3} \left\{ \frac{q}{k_F} - C_- \left[\left(\frac{q}{2k_F} - \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - C_+ \left[\left(\frac{q}{2k_F} + \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}; \quad (\text{II.2})$$

$$\chi_2(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2m\epsilon^2 n_0}{\hbar^2 k_F q^3} \left\{ D_- \left[1 - \left(\frac{q}{2k_F} - \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right)^2 \right]^{1/2} - D_+ \left[1 - \left(\frac{q}{2k_F} + \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}; \quad (\text{II.3})$$

$$C_{\pm} = \text{sign} \left(\frac{q}{2k_F} \pm \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right), \quad D_{\pm} = 0, \quad \text{для} \quad \left| \frac{q}{2k_F} \pm \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right| > 1;$$

$$C_{\pm} = 0, \quad D_{\pm} = 1, \quad \text{для} \quad \left| \frac{q}{2k_F} \pm \frac{m\omega}{\hbar k_F q} \right| < 1.$$

Диэлектрическая проницаемость для продольных возбуждений линейно связана с $\chi(\mathbf{q}, \omega)$:

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = \epsilon_0 + 2\pi\beta\chi(\mathbf{q}, \omega), \quad (\text{II.4})$$

где $\beta = \sqrt{q^2 - \epsilon_0\omega^2/c^2}$. Как правило, нас интересуют либо статические задачи, либо электромагнитные возбуждения с фазовой скоростью ω/q , много меньшей скорости света $c/\sqrt{\epsilon_0}$, что позволяет не учитывать эффекты запаздывания и заменять $\beta \rightarrow q$.

Список литературы

- [1] T. Ando, A. Fowler, F. Stern. *Rev. Mod. Phys.*, **54**, 437 (1982).
- [2] G. Bastard. *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures* (Ed. de Phys., Les Ulis, 1988).
- [3] А.Я. Шик. *ФТП*, **26**, 1161 (1992).
- [4] G.H. Döhler. *IEEE J. Quant Electron.*, **QE-22**, 1682 (1986).
- [5] H. Haug, S.W. Koch. *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors* (World Scientific, Singapore, 1990).
- [6] F. Stern, W. Howard. *Phys. Rev.*, **163**, 816 (1967).
- [7] Н.С. Рыгова. *Вестн. МГУ. Сер. 3, Физика, астрономия*, N 3, 30 (1967).
- [8] F. Stern. *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 546 (1967).
- [9] С.Г. Петросян, А.Я. Шик. *ЖЭТФ*, **96**, 2229 (1989).
- [10] V.L. Gelmont, M. Shur, C. Moglestue. *IEEE Trans. Electron. Dev.* **39**, 1216 (1992).
- [11] V.L. Gelmont, W. Peatman, M. Shur, *J. Vac. Sci. Technol. B*, **11**, 1670 (1993).
- [12] М.И. Дьяконов, А.С. Фурман. *ЖЭТФ*, **92**, 1012 (1987).
- [13] А.О. Говоров, А.В. Чаплик. *ЖЭТФ*, **95**, 1976 (1989).
- [14] В.И. Фалько, Д.Е. Хмельницкий. *ЖЭТФ*, **95**, 1988 (1989).
- [15] A. Shik. *J. Phys.: Condens. Matter*, **4**, L335 (1992).
- [16] V.G. Litovchenko. *Surf. Sci.*, **73**, 446 (1978).
- [17] T.N. Theis. *Surf. Sci.*, **98**, 515 (1980).
- [18] A.V. Chaplik. *Surf. Sci. Rep.*, **5**, 289 (1985).

- [19] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике* (Физматгиз, М., 1962).
- [20] R.A. Ferrell. *Phys. Rev.*, **111**, 1214 (1958).
- [21] S.J. Allen, D.C. Tsui, R.A. Logan. *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 980 (1977).
- [22] T.N. Theis, J.P. Kotthaus, P.J. Stiles. *Sol. St. Commun.*, **26**, 603 (1978).
- [23] D.C. Tsui, E. Gornik, R.A. Logan. *Sol. St. Commun.*, **35**, 875 (1980).
- [24] B.I. Halperin. *Phys. Rev. B*, **25**, 2185 (1982).
- [25] P.C. van Son, T.M. Klapwijk. *Europhys. Lett.*, **12**, 429 (1990).
- [26] A. Shik. *J.Phys.: Condens. Matter.*, **5**, 8963 (1993).
- [27] A.H. MacDonald, T.M. Rice, W.F. Brinkman. *Phys. Rev. B*, **28**, 3648 (1983).
- [28] D.B. Chklovskii, B.I. Shklovskii, L.I. Glazman. *Phys. Rev. B*, **46**, 4026 (1992).
- [29] C.W.J. Beenakker. *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 216 (1990).
- [30] R.R. Gerhardts, V. Gudmundsson. *Sol. St. Commun.*, **67**, 845 (1988).
- [31] D. Pfannkuche, J. Haidu. *Phys. Rev. B*, **46**, 7032 (1992).
- [32] В.М. Пудалов, С.Г. Семенчинский. *Письма ЖЭТФ*, **42**, 304 (1985).
- [33] A.J. Kent, D.J. McKitterick, L.J. Challis, P. Hawker, C.J. Mellor, M. Henini. *Phys. Rev. Lett.*, **69**, 1684 (1992).
- [34] D.J. McKitterick, A. Shik, A.J. Kent, M. Henini. *Phys. Rev. B*, **49**, 2585 (1994).
- [35] P.F. Fontein, P. Hedriks, F.A.P. Blom, J.H. Wolter, L.J. Giling, C.W.J. Beenakker. *Surf. Sci.*, **263**, 91 (1992).
- [36] R. Knott. *Ph. D. Thesis* (Stuttgart, Max-Planck-Institute, 1994).
- [37] Л.В. Келдыш. *Письма ЖЭТФ*, **29**, 716 (1979).
- [38] А.В. Чаплик. *ЖЭТФ*, **62**, 746 (1972).
- [39] M. Nakayama. *J.Phys. Soc. Japan.*, **36**, 393 (1974).
- [40] A.Eguiluz, T.K. Lee, J.J. Quinn, K.W. Chiu. *Phys. Rev. B.*, **11**, 4989 (1975).
- [41] Д. Пайнс, Ф. Нозьер. *Теория квантовых жидкостей* (Мир, М., 1967).

Редактор Л.В. Шаронова
