1995 PHYSICS AND TECHNICS OF SEMICONDUCTORS vol. 29, N 9

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ И УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ЭНЕРГИИ ОТ ИМПУЛЬСА В БЫСТРОПЕРЕМЕННОМ И ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Ф.Г.Басс

Институт радиофизики и электроники Национальной академии наук Украины, 310085, Харьков, Украина
(Получена 2 августа 1994 г. Принята к печати 6 декабря 1994 г.)

Получены уравнения движения электрона с произвольной зависимостью его энергии от импульса в высокочастотном электрическом поле для средней координаты и импульса. Рассмотрена локализация электрона в переменных — однородном случайном и монохроматическом — электрических полях. С помощью выведенных в статье уравнений исследована локализация в неоднородном поле.

Если движение электрона во внешнем переменном электрическом поле можно разделить на быстрое и медленное, то весьма эффективным способом решения такого рода задач является усреднение по быстрому времени [1]. Некоторым вопросам разработки такого рода теории применительно к задаче о динамической локализации электрона в полупроводнике со сверхрешеткой и посвящена настоящая работа.

1. Усредненные уравнения движения

Рассмотрим электрон с произвольной зависимостью энергии ε от импульса $\mathbf{p}$:

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p}). \tag{1}$$

Электрон движется в поле электромагнитной волны $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор электрона, t — время, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля соответственно. Для дальнейшего удобно выразить электрическое и магнитное поля через вектор-потенциал $\mathbf{A}$ с помощью соотношений

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{rot}(\mathbf{A}), \tag{2}$$

где c — скорость света в вакууме.

Представим $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{A}$ в виде суммы быстро и медленно меняющихся величин $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{E}}$, $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} + \bar{\mathbf{H}}$, $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{A}}$. Знак «$\sim$» над символом обозначает быстро меняющуюся компоненту, являющуюся периодической функцией времени с периодом T. Чертой над символом обозначено усреднение по быстрому времени:

$$\overline{f(T)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \tag{3}$$

Выведем уравнения для быстрой и медленной составляющих координаты и импульса:

$$\mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}, \qquad \mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{p}}. \tag{4}$$

Будем исходить из уравнений движения

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\varepsilon(\mathbf{p})}{\partial(\mathbf{p})},$$

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{e}{c}[\mathbf{r}, \mathrm{rot}(\mathbf{A})]. \tag{5}$$

Воспользуемся методом последовательных приближений. Предположим, что $|\tilde{\mathbf{r}}| \approx |\bar{\mathbf{r}}|$. Разложим часть второго уравнения (5) по степеням $\tilde{\mathbf{r}}$, удержим первый член разложения, усредним его по быстрому времени t, входящем в $\mathbf{A}$. После этого вычтем усредненное уравнение из неусредненного. В результате получим

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \bar{\mathbf{H}}\right] - \frac{e}{c}\left\{\left[\frac{\partial^2\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}},t)}{\partial t\partial\bar{\mathbf{r}}}\tilde{\mathbf{r}} - \overline{\frac{\partial^2\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}},t)}{\partial\bar{\mathbf{r}}\partial t}}\tilde{\mathbf{r}}\right] - \left[\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{H}\right] + \overline{\left[\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{H}\right]}\right\},$$

$$\dot{\bar{\mathbf{p}}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}},t)}{\partial t} - \frac{e}{c}\left\{\overline{\frac{\partial^2\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}},t)}{\partial t\partial\bar{\mathbf{r}}}\tilde{\mathbf{r}}} - \left[\dot{\bar{\mathbf{r}}}, \bar{\mathbf{H}}\right] - \left[\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \tilde{\mathbf{H}}\right]\right\}. \tag{6}$$

Оценим слагаемое в фигурных скобках в первом из уравнений (6) в сравнении с первым слагаемым в правой части. Очевидно, что отношение этого слагаемого к первому будет порядка $|\tilde{r}/\lambda|$, где λ — характерное расстояние, на котором меняется поле. Но $|\tilde{r}| \sim V_{\max}/\omega$, где ω — частота высокочастотного поля, $V_{\max}$ — максимальная скорость электрона. В случае полупроводника со сверхрешеткой

$$V_{\max} \sim \varepsilon^{(1)}a/\hbar,$$

где энергия $\varepsilon^{(1)}$ — величина порядка ширины энергетической зоны сверхрешетки, a — период сверхрешетки. Отношение слагаемого в фигурных скобках в правой части первого из уравнений (6) в первому слагаемому порядка $V_{\max}/V_f$, где $V_f = \omega\lambda$ — величина порядка фазовой скорости электрической волны.

Пусть выполнено неравенство $V_{\max} \ll V_f$. Тогда, отбрасывая в первом из уравнений системы (6) слагаемое того же порядка в фигурной скобке, получим для $\tilde{\mathbf{p}}$ такое уравнение:

$$\dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\tilde{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}},t)}{\partial t} + \frac{e}{c}\left[\dot{\tilde{\mathbf{r}}}, \bar{\mathbf{H}}\right]. \tag{7}$$

Будем считать $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Нужно заметить, что условие $V_{\max} \ll V_f$, необходимое для разделения движения электрона на быстрое и медленное, имеет наглядный физических смысл. Это неравенство означает, что электрон фактически неподвижен относительно движения электрической волны. В результате электрон находится под воздействием большого количества очень быстрых толчков, которые и ответственны за быстрое движение электрона. Медленное движение возникает за счет наложения действия этих толчков за большой промежуток времени.

Перейдем к выводу уравнений для $\bar{\mathbf{r}}$ и $\bar{\mathbf{p}}$. Пусть $\bar{\mathbf{A}} \neq 0$, тогда $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} - (e/c)\tilde{\mathbf{A}} - (e/c)\bar{\mathbf{A}}$. Согласно определению скорости,

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon \left(\bar{\mathbf{p}} - (e/c)\tilde{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}, t) - (e/c)\bar{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{r}}, t)\right)}{\partial \mathbf{p}}. \tag{8}$$

Разложим $\varepsilon\left[\bar{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\right]$ в ряд Фурье по времени:

$$\varepsilon\left[\bar{\mathbf{p}} - (e/c)A(\bar{\mathbf{r}}, t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon_n \exp(i\omega n t). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим

$$\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \varepsilon_0(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{r}})}{\partial \bar{\mathbf{p}}}, \tag{10}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \frac{1}{i\omega} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\partial \varepsilon_n(\bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{r}})}{\partial \bar{\mathbf{p}}} \exp(i\omega n t). \tag{11}$$

Наконец, используя (7), имеем такое уравнение для $\mathbf{p}$:

$$\dot{\bar{p}}_k = -\frac{e}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{2e}{c}\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} V_{ni} \frac{\partial A_{in}}{x_k}\right\}, \tag{12}$$

где A_{in} — разложение компоненты $A_i(\bar{r}, t)$ в ряд Фурье по быстрому времени; $i, k = 1, 2, 3$. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Таким образом, зависимость $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{r}}$ от t определяется из системы уравнений (10), (12). Эта система, вообще говоря, негамильтонова. Это связано с тем, что в динамической системе, описываемой $\bar{\mathbf{p}}$ и $\bar{\mathbf{r}}$, имеет место своеобразный механизм диссипации, связанный с перекачкой энергии из медленной системы в быструю.

При выводе уравнений движения было использовано неравенство $|\bar{\mathbf{r}}| \gg |\tilde{\mathbf{r}}|$. Предположим, что медленное движение является периодическим с частотой ω_0. Очевидно, что в системе с периодической зависимостью энергии от импульса это неравенство сводится к

$$\omega_0 \ll \omega, \tag{13}$$

которое необходимо для разделения движения на быстрое и медленное. Далее это условие будет конкретизировано.

2. Средняя энергия электрона

Если электрон находится в пространственно периодическом поле кристаллической решетки с периодом

$$\mathbf{a}_q = \mathbf{a}_1 q_1 + \mathbf{a}_2 q_2 + \mathbf{a}_3 q_3$$

(здесь q_1, q_2, q_3 — целые числа; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — базисные векторы прямой решетки), то, как известно, в этом случае энергия электрона будет периодической функцией импульса с периодом $2\pi\hbar\mathbf{b}_l$, где векторы $\mathbf{b}_l$ являются векторами обратной решетки. Энергия представлена в виде следующего ряда Фурье:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sum_q \varepsilon^{(q)} \exp\left(\frac{i\mathbf{p}\mathbf{a}_q}{\hbar}\right). \tag{14}$$

Пусть электрон находится в постоянном электрическом поле с напряженностью $\mathbf{E}_0$ и переменном поле, характеризуемом вектор-потенциалом $\mathbf{A}$. Полный вектор-потенциал будет

$$\mathbf{A}_{\text{tot}} = -c\mathbf{E}_0 t + \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Используя разложение (14), будем иметь

$$\varepsilon\left(\bar{\mathbf{p}} + e\mathbf{E}_0 t - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\right) = \sum_q \varepsilon^{(q)} \exp(i\Omega_q t) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{ie\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\mathbf{a}_q}{c\hbar}\right) \exp\left(\frac{i\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}_q}{\hbar}\right), \tag{15}$$

где Ω_q — так называемая штарковская частота,

$$\Omega_q = e\mathbf{E}_0 \mathbf{a}_q / \hbar.$$

Разложим $\exp\left(-ie\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\mathbf{a}_q \big/ c\hbar\right)$ в ряд Фурье по времени:

$$\exp\left(-\frac{ie\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\mathbf{a}_q}{c\hbar}\right) = \sum_n B_n^{(q)} \exp(i\omega n t). \tag{16}$$

Тогда окончательно получим

$$\varepsilon\left(\bar{\mathbf{p}} + e\mathbf{E}_0 t - (e/c)\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}}, t)\right) =$$

$$= \sum_n \exp(i\omega n t) \sum_q \varepsilon^{(q)} B_n^{(q)} \exp(i\Omega_q t) \exp(i\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}_q/\hbar). \tag{17}$$

Если постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$ равно нулю, то мы придем к разложению (9), где

$$\varepsilon_n = \sum_q \varepsilon^{(q)} B_n^{(q)} \exp(i\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}_q/\hbar). \tag{18}$$

Рассмотрим предельные и частные случаи.

Пусть переменное электрическое поле зависит от времени по гармоническому закону: $\mathbf{E} = \mathbf{E}'(\mathbf{r})\sin(\omega t)$, тогда

$$\mathbf{A} = \frac{c\mathbf{E}'(\mathbf{r})}{\omega}\cos(\omega t).$$

В этом случае $B_n^{(q)}$ определится следующим образом:

$$B_n^{(q)} = J_n\left(\Omega_q'/\omega\right), \tag{19}$$

где $\Omega_q' = \left(e\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}})\mathbf{a}\right)/\hbar$ — штарковская частота, соответствующая амплитуде переменного поля; $J_n\left(\Omega_q'/\omega\right)$ — функция Бесселя целого порядка.

Если энергия электрона рассчитана в приближении сильной связи, то коэффициенты $\varepsilon^{(q)}$ быстро убывают и соответствующие ряды можно заменить на конечные суммы. Выпишем ε_0 в приближении сильной связи для одномерного случая с учетом взаимодействия лишь ближайших соседей:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon^{(0)} + 2\varepsilon^{(1)}J_0\left(q\Omega'/\omega\right)\cos\left(\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}/\hbar\right). \tag{20}$$

Предложенную сумму можно непосредственно обобщить на случайное поле, когда вектор-потенциал является случайной функцией времени. Пусть функция распределения вектор-потенциала есть $F(\mathbf{A})$. Усредняя формулу (15) с функцией распределения $F(\mathbf{A})$, имеем

$$\langle\varepsilon\left[\bar{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}(\bar{\mathbf{r}},t)\right]\rangle = \sum_q \varepsilon^{(q)}\exp(i\Omega_q t)\Phi_q(\bar{\mathbf{r}},t)\exp\left(\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}_q/\hbar\right). \tag{21}$$

Здесь угловые скобки означают статистическое усреднение, $\mathbf{\Phi}_q$ — характеристическая функция, соответствующая функции распределения F:

$$\mathbf{\Phi}_q = \left\langle F(\mathbf{A})\exp\left(-\frac{ie\mathbf{a}_q\mathbf{A}}{ch}\right)\right\rangle. \tag{22}$$

Если случайная функция $\mathbf{A}(t)$ стационарна, то $\mathbf{\Phi}_q$ не зависит от времени. При гауссовской функции распределения

$$\mathbf{\Phi}_q = \exp\left(-\frac{e^2 a_{qi}a_{qk}}{c^2\hbar^2}\langle A_i A_k\rangle\right), \tag{23}$$

По повторяющимся индексам i и k производится суммирование. В одномерном случае формула (23) переходит в следующую:

$$\mathbf{\Phi}_q = \exp\left(-\frac{q^2 e^2 a^2\langle A^2\rangle}{c^2\hbar^2}\right). \tag{24}$$

Формуле (24) можно придать более привычный вид, если ввести следующие определения:

$$\langle E^2\rangle = \frac{1}{c^2}\left\langle\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)\right\rangle^2,$$

$$\omega_s^2 = \frac{1}{\langle A^2 \rangle} \left\langle \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right) \right\rangle^2, \tag{25}$$

$$\Omega_s^2 = e^2 a^2 \left\langle E^2 \right\rangle / \hbar^2.$$

Частота $\omega_s \sim 1/\tau_s$, где τ_s — время корреляции случайного процесса А. Тогда для распределения Гаусса

$$\Phi_q = \exp\left(-q^2 \Omega_s^2 / \omega_s^2\right). \tag{26}$$

Если параметры А распределены по Гауссу, то Φ_q очень быстро убывает с ростом q. Наконец, если электромагнитное поле является суммой случайного и периодического по времени поля, то

$$\langle \varepsilon_n \rangle = \sum_q \varepsilon^{(q)} \Phi_q B_n^{(q)} \exp\left(i\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}_q/\hbar\right). \tag{27}$$

В дальнейшем нам понадобится явный вид ε_0 для одномерного случая:

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \sum_q \varepsilon^{(q)} \Phi_q J_0\left(q\frac{\Omega'}{\omega}\right) \exp\left(iq\bar{\mathbf{p}}\mathbf{a}/\hbar\right). \tag{28}$$

При $\Phi_q = 1$ эта формула переходит в выражение для средней энергии, приведенное в работе [2].

3. Локализация электрона

Далее полученные результаты будут применены к задаче о динамической локализации. Суть динамической локализации заключается в том, что при определенных значениях параметров электрического поля электрон, совершавший инфинитное движение, останавливается — это называется точечной локализацией (ТЛ), или совершает финитное движение — это называется пространственной локализацией (ПЛ).

Мы будем также отличать локализацию в однородном, т. е. не зависящем от координат электрическом поле и локализацию в неоднородном (зависящем от координат) электрическом поле.

3.1. *Однородная локализация.* Если вектор-потенциал не зависит от координат, то из уравнения (5) следует, что $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} - (e/c)\mathbf{A}$ и также на зависит от координат. Ограничившись одномерным случаем, получим

$$\bar{x} = x_0 + V(\bar{p})t, \tag{29}$$

где

$$V(\bar{p}) = \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \bar{p}} = \frac{ia}{\hbar} \sum_q q\varepsilon^{(q)} \exp\left(-q^2 \frac{\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right) J_0\left(q\frac{\Omega'}{\omega}\right) \exp\left(\frac{iq\bar{p}a}{\hbar}\right), \tag{30}$$

x_0 — положение электрона в начальный момент.

Воспроизведем сначала два известных результата. Первый из них заключается в том, что при произвольном законе дисперсии локализация невозможна [3]. Действительно, пусть при каких-то значениях параметров монохроматического поля (амплитуде и частоте) $V(\bar{p}) = 0$.

При этом допущении соотношение (30) есть разложение нуля в ряд Фурье. Все коэффициенты Фурье нуля есть нуль. Но из (30) следует, что эти коэффициенты ни при каких значениях параметров электрического поля в нуль не обращаются, так как функции $J_0(q\Omega'/\omega)$ при разных q общих корней не имеют. Удержим теперь в формуле (30) лишь первое слагаемое

$$V(\bar{p}) = -\frac{2\varepsilon^{(1)}a}{\hbar}\exp\left(-\frac{\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right)J_0\left(\frac{\Omega'}{\omega}\right)\sin\left(\frac{\bar{p}a}{\hbar}\right). \tag{31}$$

Здесь возможна локализация двух видов — за счет детерминированного поля и за счет случайного поля. Локализация из-за детерминированного поля возникает при $\Omega'/\omega = \xi_i^{(0)}$, где $\xi_i^{(0)}$ — i-й корень функции Бесселя нулевого порядка [4].

Рассмотрим локализацию в случайном поле. Строго говоря, локализация в случайном поле возможна при $\Omega_s^2/\omega_s^2 = \infty$. Фактически локализация имеет место, когда время жизни электрона τ_e порядка времени релаксации за счет столкновения с дефектами и фононами. Время жизни электрона τ_e можно оценить из принципа неопределенности, который в данном случае запишется так:

$$\tau_e\Delta \sim \hbar. \tag{32}$$

Здесь Δ — эффективная ширина зоны. Из формулы (28) вытекает, что

$$\Delta = 2\varepsilon^{(1)}\exp\left(-\frac{\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right). \tag{33}$$

Следовательно, наличие шума сужает эффективную ширину зоны. Локализация наступает при следующих полях:

$$E_s^2 \sim \omega_s^2\frac{\hbar^2}{e^2a^2}\ln\left(\frac{\hbar}{\tau_e\Delta}\right). \tag{34}$$

Изложенные результаты получены в приближении сильной связи, что соответствует взаимодействию электрона, находящегося в узле кристаллической решетки, с ближайшими соседями. Учтем влияние следующих соседей:

$$V(\bar{p}) = -2\varepsilon^{(1)}\frac{a}{\hbar}\exp\left(-\frac{\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right)J_0\left(\frac{\Omega'}{\omega}\right)\sin\left(\frac{\bar{p}a}{\hbar}\right) -$$
$$-2\varepsilon^{(2)}\frac{a}{\hbar}J_0\left(2\frac{\Omega'}{\omega}\right)\exp\left(-\frac{4\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right)\sin\left(\frac{2\bar{p}a}{\hbar}\right). \tag{35}$$

Мы видим, что при $\Omega'/\omega = \xi_i^{(0)}$, когда первое слагаемое обращается в нуль,

$$V(\bar{p}) = -2\varepsilon^{(2)}\frac{a}{\hbar}J_0\left(2\xi_i^{(2)}\right)\exp\left(-\frac{4\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right)\sin\left(\frac{2\bar{p}a}{\hbar}\right). \tag{36}$$

Это соответствует движению электрона в более узкой зоне, ибо

$$\varepsilon^{(2)}\exp\left(-4\frac{\Omega_s^2}{\omega_s^2}\right)\left|J_q\left(2\xi_i^{(0)}\right)\right| < \varepsilon^{(1)},$$

и кристаллической решетке с эффективным периодом $2a$, вдвое большим истинного.

Перейдем теперь к рассмотрению влияния постоянного электрического поля на локализацию электрона.

Если ω и Ω несоизмеримы, то электрон локализован.

Если же Ω и ω соизмеримы, то всегда найдутся такие целые числа r и l, для которых будет выполняться условие нелинейного штарковского резонанса [5]

$$r\Omega = l\omega. \tag{37}$$

При выполнении этого условия наступает делокализация. Назовем ее резонансной делокализацией со скоростью

$$V_r = \frac{2\varepsilon^{(r)} ra}{\hbar} J_l\left(l\frac{E'}{E_0}\right)\sin\left(\frac{r\bar{p}a}{\hbar}\right). \tag{38}$$

При условии $E' = E_0\xi_i^{(l)}/l$ снова наступает резонансная локализация ($\xi_i^{(l)}$ — i-й корень бесселевской функции l-го порядка). Интересно отметить, что из-за резонансного условия (37) выпали частота ω и число r.

3.2 *Неоднородная локализация.* В этом разделе переменное электромагнитное поле будет предполагаться зависящим от координат. Положим $\bar{A} = 0$ и рассмотрим продольную волну. Уравнения для усредненной координаты (10) и усредненного импульса (12) можно переписать так:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(p, x), \qquad \frac{dp}{dt} = f_2(p, x), \tag{39}$$

где через f_1 обозначится правая часть уравнения (10), а через f_2 — правая часть уравнения (12). Поделив второе из уравнений (39) на первое, получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{f_2(p, x)}{f_1(p, x)}. \tag{40}$$

Это уравнение имеет решение при очень широких предположениях. Пока что для нас будет достаточно его существования. Пусть

$$p = p(x, \varepsilon), \tag{41}$$

где через ε обозначена константа интегрирования. В частном случае гамильтоновой системы величина ε — энергия. Подставим (41) в первое из уравнений (39) и обозначим

$$V(x) = f_1\left[p(x\varepsilon), x\right],$$

здесь $V(x)$ — скорость частицы. Уравнение для x запишется так:

$$\frac{dx}{dt} = V(x, \varepsilon). \tag{42}$$

Пусть при $t < 0$ поле отсутствовало и частица покоилась, находясь в точке x_0. В момент $t = 0$ поле включилось и частица начала двигаться.

Как следует из уравнения (42) неявная зависимость x от t будет задана соотношением

$$t = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{V(x)}. \tag{43}$$

Характер движения частицы будет зависеть от того, обращается $V(x)$ в нуль при каких-либо значениях или нет. Если $V(x)$ нигде не обращается в нуль, т. е. скорость нигде не изменяет знака, то частица при $V(x) > 0$ уйдет в бесконечность, а при $V(x) < 0$ — в $-\infty$.

Если же существует точка (обозначим ее через x_1), в которой $V(x_1) = 0$, то частица в этой же точке остановится. Пусть такая точка одна и для определенности $x_0 > x_1$. Если начальная скорость $V(x_0) < 0$, то частица дойдет до точки x_1 и там остановится. Рассмотрим поведение частицы в точке x_1. В малой окрестности этой точки $V(x)$ можно записать в виде

$$V(x) = B(x - x_1)^{\alpha}. \tag{44}$$

Предположим, что $B > 0$. Подставляя (44) в (43), мы получим в окрестности x_1 следующую зависимость $x(t)$ в неявном виде:

$$t = \frac{B}{1-\alpha}(x - x_1)^{1-\alpha}, \qquad \alpha \neq 1. \tag{45}$$

Пусть сначала $\alpha < 1$. Тогда при x, стремящемся к x_1, интеграл сходится. Если α — дробная величина, то частица не может проникнуть в область $x < x_1$, так как при этом время станет мнимым, что не имеет физического смысла. Это значит, что частица, дойдя до точки x_1, остановится в ней, отразится от нее и двинется в обратном направлении. То же самое будет при $\alpha < 0$, целом и четном, так как в этом случае при $x < x_1$, $t < 0$. Однако в силу нашего начального условия при $t < 0$ частица неподвижна.

Пусть теперь таких точек отражения две — x_1 и x_2, причем $x_1 < x_0 < x_2$. Тогда частица будет совершать финитное периодическое движение в области $x_1 < x < x_2$ с периодом T, определяемым соотношением

$$T = 2\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{V(x)}, \tag{46}$$

т. е. частица будет локализована в области пространства $[x_1, x_2]$. Такая локализация будет называться пространственной. Если $\alpha < 0$ и нечетно, то частица остановится в точке x_1, проскочит ее и будет продолжать движение в области $x < x_1$.

Пусть $\alpha > 1$ и $B < 0$. Тогда при $x \to x_1$, $t \to \infty$. Это значит, что при сколь угодно больших t частица будет находиться в сколь угодно малой окрестности x_1, т. е. частица будет локализована в точке. Такая локализация будет называться точечной.

В окрестности x_1 зависимость $x(t)$ выглядит так:

$$x = x_1 + \left(\left|\frac{B}{1-\alpha}\right| t\right)^{-1/(\alpha-1)}. \tag{47}$$

Случай $\alpha = 1$ должен быть рассмотрен отдельно. Для этого можно использовать методику, развитую в работе [6], и представить $x(t)$ в виде

$$x = x_1 + \mathcal{P}\exp(-|B|t),$$

$$\mathcal{P} = \exp\left[\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(\frac{1}{V(x)} - \frac{1}{B(x_1 - x)}\right)dx\right]. \tag{48}$$

Заметим, что при этом анализе мы не использовали гамильтоновости уравнений движения. Уравнения (10) и (12), как уже указывалось, не являются гамильтоновыми. Однако если ограничиться приближением сильной связи и монохроматическим переменным полем, то эти уравнения становятся гамильтоновыми с эффективным гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = -\varepsilon^{(1)} J_0(\xi)\cos\left(\frac{pa}{\hbar}\right). \tag{49}$$

После несложных выкладок получится уравнение, определяющее в неявном виде $x(t)$:

$$V_0 t = \pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{[J_0^2(\xi) - \varepsilon^2]^{1/2}}. \tag{50}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon_t/\varepsilon^{(0)}$ — безразмерная полная энергия частицы, ε_t — размерная полная энергия частицы,

$$\xi(x) = \frac{eE'(x)a}{\hbar\omega}, \qquad V_0 = \frac{\varepsilon^{(1)}a}{\hbar}.$$

Так как бесселева функция нулевого порядка J_0 не превышает единицы, для того чтобы время было действительной величиной, должно выполняться неравенство $\varepsilon \leqslant 1$. Если $J_0^2(\xi) > \varepsilon^2$ при всех значениях ξ, то частица совершает инфинитное движение.

Перейдем к изучению локализации. Начнем с пространственной локализации. Пусть x_1' и x_2'' — точки поворота, положение которых, согласно сказанному выше, определяется из уравнения

$$J_0[\xi(x)] = \pm\varepsilon, \tag{51}$$

и, кроме того, $x_1' < x_0 < x_2''$. Частица колеблется, причем период колебаний T определится так:

$$T = \frac{2}{V_0}\int\limits_{x_1'}^{x_2''}\frac{dx}{\{J_0^2[\xi(x)] - \varepsilon^2\}^{1/2}}. \tag{52}$$

Для дальнейшего рассмотрения конкретизируем явный вид функции $\xi(x)$. Пусть электрон находится в поле стоячей волны с косинусоидальной зависимостью от координаты $E = E_0\cos(kx)$, тогда

$$\xi(x) = \xi_0\cos(kx), \qquad \xi_0 = \frac{eE_0a}{\hbar}. \tag{53}$$

Перейдем от интегрирования по x к интегрированию по ξ. Для периода T получится следующее соотношение:

$$T = \frac{2\pi}{\nu}\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{d\xi}{\left\{\left[J_0^2(\xi)-\varepsilon^2\right](1-\xi^2/\xi_0^2)\right\}^{1/2}}, \tag{54}$$

где $\nu = 2\pi k V_0 \xi_0$, волновое число k связано с длиной волны λ соотношением $k = 2\pi/\lambda$. Так как во всех физических достижимых точках $\xi^2 < \xi_0^2$, интеграл (54) — порядка единицы, $T \simeq 2\pi/\nu$ и частота медленного движения $\omega_0 \simeq \nu$. Следовательно, для электрона в сверхрешетке, в поле стоячей косинусоидальной волны критерий (13) можно переписать так:

$$\frac{V_0}{V_f} \ll 1. \tag{55}$$

Так как V_0/V_f много меньше единицы, ξ может существенно превышать единицу, т. е. поля могут быть достаточно сильными. В общем случае находить зависимость x от t и зависимость T от энергии и параметров поля нужно численными методами. Аналогичный результат можно получить, если колебания частицы малы, т. е. мало расстояние между точками поворота. Разложим подкоренное выражение в формуле (50) в ряд вблизи точки x_l, которая будет определена далее:

$$J_0^2[\xi(x)] - \varepsilon^2 = J_0^2[\xi(x_l)] - \varepsilon^2 - J_0[\xi(x_l)]\,J_1[\xi(x_l)]\frac{d\xi(x_l)}{dx}(x-x_l) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d^2 J_0^2[\xi(x_l)]}{dx^2}(x-x_l)^2. \tag{56}$$

Потребуем, чтобы коэффициент при слагаемом, пропорциональном $(x-x_l)$, обращался в нуль. Из этого требования вытекают такие уравнения для точки x_l:

$$\xi(x_l) = \xi_i^{(0)}, \qquad \xi(x_l) = \xi_i^{(1)}, \qquad \frac{d\xi(x_l)}{dx} = 0. \tag{57}$$

Здесь $\xi_i^{(0,1)}$ — корни функции Бесселя нулевого и первого порядков. Для вычисления их значений используем формулу (53). Решая первое, второе и третье уравнения, получим соответственно

$$x_l^{(0,i)} = \frac{1}{k}\arccos\frac{\xi_i^{(0)}}{\xi_0} + 2\pi l,$$

$$x_l^{(1,i)} = \frac{1}{k}\arccos\frac{\xi_i^{(1)}}{\xi_o} + 2\pi l,$$

$$x_l = \frac{\pi l}{k}. \tag{58}$$

Отметим, что первые две группы точек зависят от амплитуды высокочастотного поля. Чтобы частица совершала колебательное движение, требуется положительность первого слагаемого и отрицательность третьего. Таким образом, первая группа точек отпадает. А из второй и третьей группы точки должны быть выбраны так, чтобы выполнялись при фиксированной энергии ε следующие неравенства:

$$J_0^2[\xi(x_l)] > 0, \qquad \frac{d^2 J^2(x_l)}{dx^2} < 0. \tag{59}$$

В этом случае интеграл вычисляется, и для $x(t)$ имеет место выражение

$$x(t) = x_l + \left| \left\{ \frac{d^2 J_0^2[\xi(x)]}{dx^2} \right\}_{x_l} \right|^{-1/2} \left\{ 2\left[J_0^2[\xi(x_l)] - \varepsilon^2 \right] \right\}^{1/2} x \sin(\omega_0 t + \varphi), \tag{60}$$

где

$$\omega_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \left| \left\{ \frac{d^2 J_0^2[\xi(x)]}{dx^2} \right\}_{x_l} \right|^{1/2},$$

$$\varphi = \arcsin\left(-\frac{(x_0 - x_l)\left| \left\{ \frac{d^2 J_0^2[\xi(x)]}{dx^2} \right\}_{x_l} \right|^{1/2}}{\left\{ 2\left[J_0^2[\xi(x_l)] - \varepsilon^2 \right] \right\}^{1/2}} \right).$$

Рассмотрим теперь точечную локализацию. Для того чтобы она имела место, необходимо, чтобы точки локализации определялись формулами (58) и первое слагаемое обратилось в нуль. Это имеет место, если для первой группы точек

$$\varepsilon = 0, \tag{61}$$

для второй группы точек

$$\varepsilon = \pm J_1(\xi_i^{(0)}), \tag{62}$$

для третьей группы точек

$$\varepsilon = J_0(\xi_0). \tag{63}$$

Кроме того, точки локализации должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{d^2 J_0^2[\xi(x_l)]}{dx^2} > 0. \tag{64}$$

Зависимость x от t в окрестности точки локализации будет определяться формулой (48), причем $|B| = \omega_0$.

Если спектр электрона аддитивен, то из уравнения (12) непосредственно вытекает, что поперечное поле, зависящее от одной координаты, к локализации не приводит. Это не исключает локализацию в более сложных случаях.

В заключение автор выражает благодарность Ю.В. Аверкову, О.М. Евтушенко, А.П. Панчеху, сделавшим ряд полезных замечаний и проверившим выкладки.

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Курс теоритической физики.* Т. 1, *Механика* (М., Наука, 1988).
[2] M. Holthaus. Phys. Rev. Lett., **69**, 351 (1992).
[3] D.H. Dunlap, V.M. Kenkre. Phys. Rev. B, **34**, 3625 (1986).
[4] D.H. Dunlap, V.M. Kenkre. Phys. Lett. A, **127**, 438 (1988).
[5] Ф.Г. Басс, А.А. Булгаков, А.П. Тетервов. *Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешетками* (М., Наука, 1988).
[6] Ф.Г. Басс, Ю.Г. Гуревич. *Горячие электроны и сильные электромагнитные волны в плазме полупроводников и газового разряда* (М., 1975).

Редактор Т.А. Полянская

Dynamic localization and averaged equations of motion of an electron having an arbitrary dependence of the energy on momentum in fast-alternating and static electric fields

F.G. Bass

Institute of Radiophysics and electronics. Ukrainian Academy of Sciences, 310085 Kharkov, the Ukraine

Averaged equations of the motion of an electon having an arbitrary dependence of the energy on momentum are obtained for the high-frequency electric field. Dynamic localizations of an electron in alternating electric fields (uniformly random and monochromatic) have been considered. The equations derived make it possible to investigate the localization in an inhomogeneous field.