

01;09

©1994 г.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДАННЫХ ЗОНДИРОВАНИЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЙЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. I

Д.В.Батраков, Н.В.Будко, Н.П.Жук

В части I работы предложена схема численного обращения данных рассеяния для радиально-слоистых диэлектрических структур, использующая алгоритм Ньютона-Канторовича, и приведены результаты численных экспериментов, свидетельствующие о ее перспективности для неразрушающего контроля и диагностики.

Введение

Побудительным мотивом к появлению данной работы служат потребности бесконтактной диагностики и контроля, заключающиеся в повышении надежности и расширении возможностей дистанционного определения свойств неоднородных материалов. Применяемые на практике методы радиоволнового и оптического контроля (см., например, [1,2]) привлекают сравнительно несложный физико-математический аппарат, отказывающийся в случае многослойных структур или материалов с более общим типом неоднородности. Для удовлетворения запросов практики перспективным представляется использование методов теории обратных задач рассеяния, которые пригодны для широкого круга неоднородных сред. Имеющиеся строгие аналитические методы решения таких задач для слоистых сред [3-5] предполагают, однако, большой объем вспомогательных вычислений на ЭВМ, что пока является одним из серьезных препятствий на пути их использования в реальном масштабе времени. Этот же недостаток присущ и многим численным решениям одномерных обратных задач рассеяния [6-8].

В предлагаемой работе, примыкающей в идейном плане к работе [9], рассматривается схема интерпретации данных радиоволнового или оптического зондирования слоистых сред, которая базируется на численном решении обратной задачи рассеяния гармонической электромагнитной волны методом Ньютона-Канторовича. Заметную часть

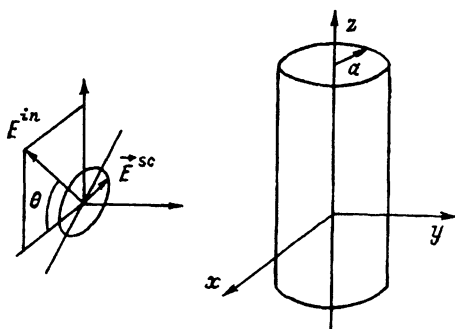


Рис. 1. Геометрия исследуемой структуры.

вычислений в рамках данного подхода удается выполнить аналитически, что уменьшает объем расчетов на ЭВМ и делает возможным его использование в реальном масштабе времени. Развиваемая схема позволяет интерпретировать зависимости регистрирующих величин от разнообразных варьируемых параметров, что может повысить эффективность неразрушающего контроля.

В части I настоящей работы рассматривается модель контрольной радиально-слоистой среды, описывающая, к примеру, столб плазмы, пластмассовую трубку, градиентное оптическое волокно и т.п. Мы строим алгоритм обращения данных рассеяния для такой среды и иллюстрируем его возможности с привлечением смоделированных данных для трех вариантов измерений: в полосе частот, в области углов рассеяния и для изменяющихся состояний поляризации облучающей волны.

Авторы признательны О.А. Третьякову за плодотворные дискуссии и всяческое содействие в работе.

Постановка и решение обратной задачи

1. Отнесем все трехмерное пространство к прямоугольной декартовой системе координат x, y, z , причем ось Oz для определенности направим вертикально вверх (рис. 1). Зондируемая радиально-слоистая среда заполняет внутренность кругового цилиндра радиуса a с осью вращения Oz . Распределение диэлектрической проницаемости среды характеризуется кусочно-гладкой функцией $\varepsilon(r)$ ($0 \leq r < a$), в общем случае комплекснозначной, а ее магнитная проницаемость равна 1. Здесь и далее $\mathbf{r} = (x, y, 0)$. Пространство, окружающее цилиндр, является свободным.

Зондирующее, или первичное, электромагнитное поле представляет собой гармоническую плоскую волну эллиптической поляризации, которое распространяется в плоскости yOz перпендикулярно образующим цилиндра. Ее покомпонентная запись такова:

$$E_x^{in} = -H_z^{in} = E_{\perp} \exp(iky),$$

$$E_z^{in} = H_x^{in} = E_{\parallel} \exp(iky),$$

$$E_y^{in} = H_y^{in} \equiv 0. \quad (1)$$

В этих формулах $k = \omega/c$; c — скорость света в вакууме, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен; E_{\parallel} и E_{\perp} — комплексные амплитуды составляющих первичной волны, поляризованные вдоль цилиндра и перпендикулярно ему соответственно,

$$E_{\parallel} = E(\sin \Theta - ie \cos \Theta),$$

$$E_{\perp} = E(\cos \Theta + ie \sin \Theta), \quad (2)$$

E — размер большей полуоси эллипса поляризации ($E > 0$), e — эллиптичность ($-1 \leq e \leq 1$), Θ — азимут (в данном случае угол в плоскости xOz между большей полуосью эллипса поляризации и положительным направлением оси Ox): $-\pi/2 < \Theta \leq \pi/2$ [10].

Предполагается, что скалярный информативный параметр u (в общем случае комплекснозначный), который измеряется в натурном эксперименте, формально получается применением некоторой линейной операции Φ , действующей по \mathbf{r} , к электрическому вектору $\mathbf{E}^{sc}(\mathbf{r})$ рассеянного поля

$$u = \Phi \mathbf{E}^{sc}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Пусть в результате N экспериментов, каждый из которых может характеризоваться индивидуальным выбором зондирующего поля \mathbf{E}_j^{in} , H_j^{in} и измерительного функционала Φ_j ($j = 1, 2, \dots, N$), в нашем распоряжении имеется набор значений соответствующих информативных параметров $\{u^{(j)}\}$. Считая, что физико-математические модели упомянутых зондирующих полей и измерительных функционалов известны, необходимо найти оценку¹ $\varepsilon^{est}(r)$ функции $\varepsilon(r)$ $0 \leq r < a$.

В приведенной выше постановке обратной задачи подразумевается, что все эксперименты выполняются на одной и той же частоте или же что частотной дисперсией в используемом диапазоне можно пренебречь. Применяемый нами подход охватывает, однако, и случай частотной дисперсии, если она укладывается в рамки простейшей модели

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma, \quad (4)$$

описывающей среды с электронной проводимостью [11]. Здесь $\varepsilon'(r)$ и $\sigma(r)$ — вещественная часть диэлектрической проницаемости и проводимость радиально-слоистой среды, которые считаются не зависящими от ω . Оценка распределения названных параметров на основе данных $\{u^{(j)}\}$ и является целью решения обратной задачи в таком случае.

2. Рассмотрим вначале ситуацию, когда частотную дисперсию можно оставить без внимания. Заменяем мысленно исследуемый рассеиватель вспомогательным радиально-слоистым цилиндром того же радиуса, диэлектрическая проницаемость которого распределена по закону $\varepsilon_b(r)$ ($0 \leq r < a$). Обозначим через \mathbf{E}_b^{sc} и E_b соответственно поле,

¹ Вести речь об однозначном и точном восстановлении достаточно произвольной функции $\varepsilon(r)$ нельзя, так как достичь этого с привлечением конечного набора данных рассеяния невозможно.

рассеянное вспомогательным цилиндром, и поле внутри этого цилиндра, которые возникли бы при облучении последнего плоской волной (1). Далее названные величины считаются известными из результатов численного моделирования. Предположим, что заданная функция $\varepsilon_b(r)$ достаточно близка к искомой функции $\varepsilon(r)$. Тогда для описания величины применимо улучшенное ("искаженное") приближение Борна, в рамках которого \mathbf{E}^{sc} дается выражением

$$\mathbf{E}^{sc}(r) = \mathbf{E}_b^{sc}(r) - \int_0^a \mathbf{M}(\mathbf{r}|\mathbf{r}')\eta(r')dr', \quad (5)$$

и которое сопровождается отбрасыванием малых членов порядка η^2 и выше [12]. Здесь

$$\eta(r) = \varepsilon(r) - \varepsilon_b(r), \quad (0 \leq r < a); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = r' \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ \mathbf{z}^0 k^2 G_e E_{bz}(r') + \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{z}^0 \times \nabla}{ik\varepsilon_b(r')} \left[E_{b\varphi}(r') \frac{\partial G_m}{\partial r'} - \frac{E_{br}(r')}{r'} \frac{\partial G_m}{\partial \varphi'} \right] \right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

r', φ — полярные координаты переменной точки \mathbf{r}' в плоскости xOy , \mathbf{z}^0 — орт оси Oz .

Далее, функции $G_{e,m} = G_{e,m}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ определены как решения уравнений

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \varepsilon_b(r) \right] G_e = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \left[\frac{\varepsilon_b(r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \varepsilon_b(r) \right] G_m = \varepsilon_b(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (8) \end{aligned}$$

которые изображают уходящую волну при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow +\infty$ и непрерывны вместе с величинами

$$\frac{\partial G_e}{\partial r}, \quad \frac{1}{\varepsilon_b(r)} \frac{\partial G_m}{\partial r} \quad (9)$$

в каждой точке разрыва коэффициентов уравнений (8), включая точку $r = a$. Уточним, что условие непрерывности величин (9) налагается при $r \neq r'$; функция $\varepsilon_b(r)$ в (8) распространена на интервал $a < r < +\infty$, где она равна 1. Требуемое решение уравнений (8) находится с привлечением метода разделения переменных и некоторых других, столь же стандартных численно-аналитических средств.

Применив к обеим частям равенства (5) измерительный функционал из (3), приходим к соотношению, связывающему информативный параметр с неизвестной функцией η

$$u = u_b - L\eta. \quad (10)$$

Здесь

$$u_b = \Phi \mathbf{E}_b^{sc}(r), \quad (11)$$

L — линейный функционал с ядром $L(r')$

$$L\eta \equiv \int_0^a L(r')\eta(r')dr', \quad L(r') = \Phi M(\mathbf{r}|r'). \quad (12)$$

При разыскивании η естественно исходить из условия минимума сглаживающего функционала

$$F[\eta] = f[\eta] + \alpha\Omega[\eta], \quad (13)$$

где функционал $f[\eta]$ представляет собой “взвешенную” невязку между измерениями и смоделированными значениями информативных параметров, а $\Omega[\eta]$ есть стабилизирующий функционал [13].

$$f[\eta] = \sum_{j=1}^N w_j \left| u^{(j)} - u_b^{(j)} + L^{(j)}\eta \right|^2,$$

$$\Omega[\eta] = \int_0^a w(r)|\eta(r)|^2 dr. \quad (14)$$

В приведенных выше формулах α — параметр регуляции [13], w_j и w — весовые коэффициенты и функция соответственно, $w_j, w > 0$; индекс j специализирует соответствующие величины к условиям j -го эксперимента.

Так как в соотношении (10) величина η входит линейно, то сглаживающий функционал (13) оказывается квадратичным. Необходимое условие минимума — равенство нулю первой вариации функционала доставляет линейное интегральное уравнение Фредгольма II рода относительно η . В силу вырожденности ядра решение этого уравнения находится в явном виде

$$\eta(r) = \sum_{j=1}^N w_j \left[u_b^{(j)} - u^{(j)} - \chi_j \right] L^{(j)*}(r)/\alpha w(r), \quad (15)$$

где * означает комплексное сопряжение, $\{\chi_j\}$ — решение системы N линейных алгебраических уравнений

$$\chi_j + \sum_{n=1}^N a_{jn}\chi_n = \psi_j \quad (j = 1, 2, \dots, N); \quad (16)$$

$$\psi_j = \sum_{n=1}^N \left[u_b^{(n)} - u^{(n)} \right] a_{jn},$$

$$a_{jn} = \alpha^{-1} w_n \int_0^a L^{(j)}(r) L^{(n)*}(r) dr / w(r). \quad (17)$$

Имея в распоряжении величину η , в согласии с определением (6) последней можно предложить следующую оценку диэлектрической проницаемости зондирующего цилиндра:

$$\varepsilon_1^{est} = \varepsilon_b + \eta. \quad (18)$$

Эту оценку следует использовать вместо ε_b на новом этапе вычислений, проводимых по предыдущей схеме. В результате получим оценку ε_2^{est} второго приближения. Продолжая этот итерационный процесс, можно восстановить искомую функцию ε .

Заметим, что с математической точки зрения мы имеем дело с итерационной процедурой Ньютона-Канторовича [14]. Выяснение условий и скорости сходимости этой процедуры применительно к рассматриваемым здесь задачам составляет предмет отдельного исследования. Некоторые результаты численных экспериментов, выполненных в связи с упомянутым вопросом, приведены в заключительном разделе.

3. Перейдем теперь к ситуации, когда нужно учитывать частотную дисперсию искомой диэлектрической проницаемости в форме (4). В этом случае диэлектрическую проницаемость вспомогательного цилиндра следует взять в исходном виде

$$\varepsilon_b = \varepsilon'_b + \frac{4\pi}{\omega} \sigma_b. \quad (19)$$

Функции $\varepsilon'_b(r)$, $\sigma_b(r)$, не зависящие от ω , должны быть близки к $\varepsilon'(r)$ и $\sigma(r)$ соответственно. Тогда выражение (5), очевидно, сохраняет свою силу, причем

$$\eta(r) = \zeta(r) + \frac{4\pi i}{\omega} \xi(r); \quad (20)$$

$$\zeta(r) = \varepsilon'(r) - \varepsilon'_b(r), \quad \xi(r) = \sigma(r) - \sigma_b(r). \quad (21)$$

Ключевое соотношение (10) переписется так:

$$u = u_b - K\xi - L\zeta, \quad (22)$$

где K , L — линейные функционалы: L определен в (12), а $K = 4\pi i L / \omega$.

Функции ξ , ζ находим из условия минимума сглаживающего функционала

$$F[\xi, \zeta] = f[\xi, \zeta] + \alpha \Omega[\xi, \zeta], \quad (23)$$

выступающего естественным обобщением (13). Смысл используемых величин таков: α , как и прежде, — параметр регуляции,

$$f[\xi, \zeta] = \sum_{j=1}^N w_j \left| u^{(j)} - u_b^{(j)} + K^{(j)}\xi + L^{(j)}\zeta \right|^2,$$

$$\Omega[\xi, \zeta] = \int_0^a \left[v(r) |\xi(r)|^2 + w(r) |\zeta(r)|^2 \right] dr, \quad (24)$$

w_j и w, v — весовые коэффициенты и функции соответственно.

Требование обращения в нуль первой вариации квадратичного функционала (23) приводит к системе двух линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами. Решение их находится в замкнутой форме

$$\begin{cases} \xi(r) \\ \zeta(r) \end{cases} = \sum_{j=1}^N w_j \left[u_b^{(j)} - u^{(j)} - \chi_j \right] \begin{cases} K^{(j)*}(r)/\alpha v(r), \\ L^{(j)*}(r)/\alpha w(r). \end{cases} \quad (25)$$

Здесь $\{\chi_j\}$ — решение системы линейных алгебраических уравнений (16), коэффициенты которой определены выражением

$$a_{jn} = \alpha^{-1} w_n \int_0^a \left[L^{(j)}(r) L^{(n)*}(r)/w(r) + K^{(j)}(r)/v(r) \right] dr, \quad (26)$$

а правые части ψ_j связаны с a_{jn} прежней формулой (17).

При известных ξ, ζ оценки параметров σ, ϵ' в первом приближении выглядят как $\sigma_b + \xi, \epsilon'_b + \zeta$ соответственно. Используя их вместо σ_b, ϵ'_b на очередном этапе вычислений и продолжая эти вычисления итерационным образом далее, можно последовательно уточнить оценки электропроводности и вещественной части диэлектрической проницаемости материала до их стабилизации.

Иллюстративные результаты численных экспериментов

Вычислительные эксперименты, результаты которых отражены в настоящем разделе, преследовали цель сравнить эффективность восстановления диэлектрической проницаемости цилиндра без потерь на основе трех методов радиоволнового зондирования, в рамках которых регистрируется и интерпретируется одна из следующих зависимостей информативного параметра: от частоты зондирующего поля, от его состояния поляризации или от угла рассеяния. Ниже эти варианты поименованы как случай I, II или III соответственно. Необходимые наблюдаемые данные получались численным моделированием.

Исследуя возможность частотного зондирования, первичное поле (1) мы считаем поляризованным параллельно оси цилиндра $e = 0, \Theta = \pi/2$. N частот зондирования $\{\omega_j\}$ располагается эквидистантно на замкнутом интервале $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$. Измерительные функционалы $\Phi^{(j)}$, одинаковые для всех N экспериментов, доставляют значение в точке $\mathbf{r}_0 = (0, -d, 0)$, z — компоненты электрического поля, рассеянного в обратном направлении $\Phi^{(j)} \mathbf{E}^{sc(j)}(\mathbf{r}) = E_z^{sc(j)}(\mathbf{r}_0)$. Здесь и далее d — расстояние между точкой наблюдения и осью цилиндра ($d > a$).

В случае II зондирования полем с изменяющимся состоянием поляризации для упрощения анализа мы ограничимся линейно поляризованной ($e = 0$) плоской волной (1), состояние поляризации которой

зависит от единственного параметра Θ . В этих случаях Θ совпадает с углом, взятым с надлежащим знаком, между плоскостью поляризации и плоскостью xOy . N значений $\{\Theta_j\}$ указанного параметра распределено равномерно на замкнутом интервале $[-\pi/2 + \beta, \pi/2]$, где $\beta > 0$ — малый параметр, введенный для удобства программой реализации алгоритма. Считается, что для каждого Θ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) в фиксированной точке $\mathbf{r}_0 = (0, -d, 0)$ определяются значения y - и z -компонент электрического поля, рассеянного в обратном направлении. Очевидно, совокупность таких измерений укладывается в развитую схему, если формально положить общее число экспериментов равным $N' = 2N$ и принять, что в эксперименте с номером n' ($n' = 1, 2, \dots, N'$) измерительный функционал дает значение $E_y^{sc(j)}(\mathbf{r}_0)$ либо $E_z^{sc(j)}(\mathbf{r}_0)$ для $n' = 2j - 1$ и $n' = 2j$ соответственно.

Измерения для различных направлений рассеяния (случай III) моделируются в рамках следующих представлений. Зондирующее поле считается фиксированным и подобно случаю I поляризованным вдоль оси Oz ; j -й эксперимент заключается в определении величины E_z^{sc} в точке наблюдения $\mathbf{r}_j = d(\cos \varphi_j^{sc}, \sin \varphi_j^{sc}, 0)$. Здесь $\varphi_j^{sc} = \pi(N + 1 - 2j)/2(N - 1)$ ($j = 1, 2, \dots, N$), значения $\varphi_1^{sc} = \pi/2$ и $\varphi_N^{sc} = -\pi/2$ отвечают измерениям поля, рассеянного вперед и назад соответственно.

Результаты численных экспериментов проиллюстрированы на рис. 2, 3. Штриховой линией, штрихпунктиром и пунктиром показаны профили диэлектрической проницаемости, восстановленные с использованием численного решения обратной задачи рассеяния в области частот ω , поляризационного параметра Θ или угла рассеяния φ^{sc} , т.е. для случаев I, II или III. Истинный профиль проницаемости представлен сплошной линией; радиус a цилиндра считается известным. На оси абсцисс отложено расстояние от оси цилиндра, нормированное на длину волны λ в свободном пространстве (в случае I под λ надлежит понимать наименьшую длину волны λ_{\min} из применяемого набора частот). Все расчеты выполнены на ЭВМ с тактовой частотой 24 МГц. Начальное приближение для искомого распределения $\varepsilon(r)$ во всех случаях равно $\varepsilon_a \equiv 2.5$ ($0 \leq r < a$).

На рис. 2 представлены результаты восстановления диэлектрической проницаемости однородного цилиндра. Количество отсчетов N варьируемого параметра (ω , Θ или ε^{sc}) для всех случаев равно 7. В случае I время счета, процессорное время, составило 13 мин 13 с, за которое выполнено 5 итераций; усредненная по интервалу $0 \leq r < a$ итоговая оценка $\bar{\varepsilon}$ проницаемости цилиндра равна 2.297. Аналогичные данные для случая II выглядят так: 2 мин 02 с, 17 итераций, $\bar{\varepsilon} = 2.943$, а для случая III — 5 мин 53 с, 3 итерации, $\bar{\varepsilon} = 2.997$. Добавим, что в случае I $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 2.5$, где λ_{\max} — максимальная применяемая длина волны.

Рис. 3 относится к слоисто-неоднородному цилиндру с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(r) = 3 - \sin(\pi r/a)$ ($0 \leq r < a$). Для удобства расчетов используемая в начале каждой итерации оценка искомого профиля получалась из доставляемой предыдущей итерацией путем аппроксимации последней кусочно-постоянной функцией из 9 ступенек одинаковой ширины. Итоговая оценка усреднялась в пределах каждой ступени, а затем аппроксимировалась непрерывной кривой.

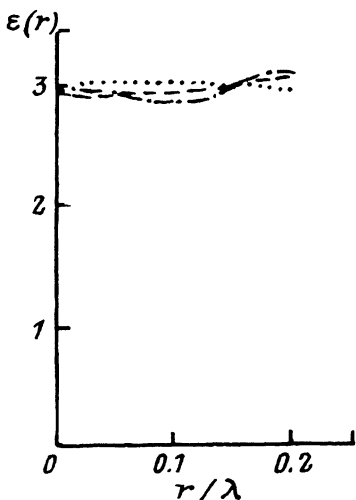


Рис. 2. Восстановление свойств одно-
родного цилиндра.

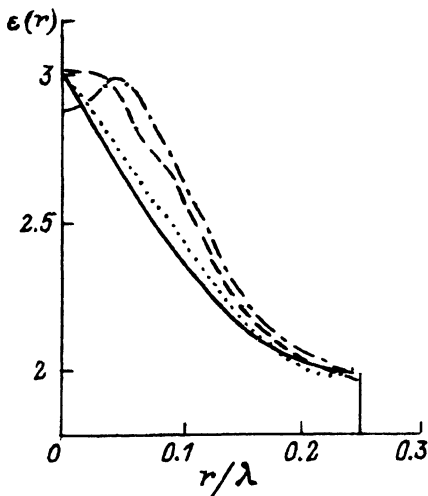


Рис. 3. Восстановление свойств
радиально-неоднородного слоя.

В случае I использован дискретный набор из $N = 8$ частот, причем $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 1.95$; время счета равняется 29 мин 20 с, а количество совершенных итераций 10. В случае II количество значений поляриационного параметра $N = 20$, время счета 3 мин 6 с, за которое выполнено 17 итераций. Аналогичные характеристики для случая III измерения для различных направлений рассеяния таковы: $N = 9$, 26 мин 23 с, 7 итераций.

Результаты численных экспериментов свидетельствуют, что предложенный алгоритм позволяет осуществить восстановление с удовлетворительной точностью как однородного, так и неоднородного профилей диэлектрической проницаемости цилиндра. Наибольшее время требуется для восстановления по данным измерений в частотной области, меньшее — в случае измерений в угловой области для дискретного набора направлений рассеяния. Интерпретация данных зондирования для дискретного набора состояний поляризации первичной волны занимает наименьшее время. Это — выигрышная сторона метода обратной задачи рассеяния в области значений поляризационных параметров, выдвинутого в [15,16]. Однако полный ответ на вопрос об эффективности практического использования каждого из упомянутых выше вариантов обратной задачи рассеяния требует выяснения и сравнительного анализа возможностей экспериментальной реализации соответствующих схем измерений.

Список литературы

- [1] Оптический радиоволновой и тепловой методы неразрушающего контроля. Тез. докл. Всесоюз. научно-техн. конф. Могилев, 1989. Ч. 1.
- [2] Приборы неразрушающего контроля материалов и изделий. Справочник в 2-х кн. / Под ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 1986.
- [3] Хруслев Е.Я. // Журн. выч. матем. и математ. физики. 1985. Т. 25. № 4. С. 548–561.
- [4] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.

- [5] *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [6] *Mostafavi M., Mitra R.* // Radio Sci. 1972. Vol. 7. P. 1105-1111.
- [7] *Tijhuis F.G., van der Worm C.* // IEEE Trans. 1984. Vol. AP-32. N 7. P. 711-716.
- [8] *Habashy T.M., Chow E.Y., Dudley D.G.* // IEEE Trans. 1990. Vol. AP-38. N 5. P. 668-682.
- [9] *Uno T., Adashi S.* // IEEE Trans. 1987. Vol. AP-35. N 12. P. 1456-1466.
- [10] *Аззам Р., Башара Н.* Эллипсометрия и поляризованный свет. М.: Мир, 1981.
- [11] *Стрэттон Дж.* Теория электромагнетизма. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
- [12] *Devaney A.J., Oristaglio M.L.* // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 51. N 4. P. 237-240.
- [13] *Тухонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1985.
- [14] *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
- [15] *Batrkov D.O., Zhuck N. P.* // Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Proc. 4th Intern Seminar. 1991, Alushta (USSR), P. 264-267.
- [16] *Batrkov D.O., Zhuck N.P.* // IEEE & AP-S Intern. Symposium. Chicago, 1992. Vol. 2. P. 838-841.

Харьковский университет им. А.М.Горького

Поступило в Редакцию
14 апреля 1993 г.