

01;07;09

©1994 г.

## ХАОТИЗАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ ВОЛНОВОДЕ ЧЕРЕЗ УНИВЕРСАЛЬНУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

В.И.Гуляев, А.Л.Васильева, В.Л.Кошкин

Для нелинейных волн в простейших волноводах, описываемых уравнением Клейна–Гордона, построены последовательности бифуркаций, в результате которых период модуляции волны стремится к бесконечности, волны становятся хаотическими, а их спектр непрерывным. Для двух вариантов параметров уравнения показано, что возникающая при изменении интенсивности внешнего возбуждения бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода волны обладает свойством универсальности, обнаруженным Фейгенбаумом.

При исследовании распространения периодических волн малой интенсивности в детерминированных волноводах и диспергирующих средах обычно считается, что период волн совпадает с периодом иницирующего их внешнего возмущения. В нелинейных системах, однако, с увеличением интенсивности возбуждения происходит бифуркация волн, которая часто сопровождается  $N$ -кратным увеличением их периода. При таких бифуркациях могут возникать установившиеся структуры модулированных волн с  $N$  волнами на периоде модуляции [1]. Дальнейшее изменение интенсивности внешнего возбуждения может привести к последовательности бифуркаций кратного увеличения периода, в результате которых период модуляции волны стремится к бесконечности, волны становятся хаотическими, а их спектр непрерывным [2].

В настоящей работе это явление установлено для нелинейных волн в простейших волноводах, описываемых уравнением Клейна–Гордона [3]. Показано, что возникающая при изменении интенсивности внешнего возбуждения бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода волны обладает свойством универсальности, обнаруженным Фейгенбаумом [4].

Уравнение Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw + \beta w^3 = \lambda \sin \gamma(x - ct) \quad (1)$$

описывает распространение бегущих волн в волноводах, образованных натянутыми мембранами и струнами, связанными с нелинейно деформируемой упругой средой [5]. Обзор других физических задач, в которых фигурирует уравнение этого типа, дан в работе [3].

Сравнительно новые перечисленные в ней задачи включают следующие: 1) переход Джозефсона; 2) дислокации в кристаллах с периодической структурой рядов атомов; 3) распространение в ферромагнитных материалах волн, связанных с вращением направления намагниченности; 4) лазерные импульсы в двухфазной среде, где переменные также можно выразить через вращающийся вектор.

В уравнении (1) сделаем замену  $\theta = x - ct$  и будем считать, что  $w = w(\theta)$ . Тогда после подстановки  $\partial^2/\partial t^2 = c^2 d^2w/d\theta^2$ ,  $\partial^2 w/\partial x^2 = d^2w/d\theta^2$  уравнение (1) принимает вид

$$(c^2 - \alpha^2) \frac{d^2 w}{d\theta^2} + kw + \beta w^3 = \lambda \sin \gamma \theta. \quad (2)$$

Построим зависимость амплитуды  $w_{\max}$  волны от параметра интенсивности возбуждения  $\lambda$ .

Пусть при некотором значении параметра  $\lambda = \lambda_0$  уравнение (2) имеет  $T$ -периодическое решение  $w_0(\theta)$ , удовлетворяющее условиям

$$w_{(0)}(0) = w_{(0)}(T), \quad w'_{(0)}(0) = w'_{(0)}(T) \quad (3)$$

и непрерывно зависящее от начальных условий и  $\lambda_{(0)}$

$$w_{(0)}(\theta) = w(w_{(0)}(0), w'_{(0)}(0), \lambda_{(0)}, \theta),$$

$$w'_{(0)}(\theta) = w'(w_{(0)}(0), w'_{(0)}(0), \lambda_{(0)}, \theta).$$

Тогда из условий (3) имеем

$$w_{(0)} = w(w_{(0)}(0), w'_{(0)}, \lambda_{(0)}, T),$$

$$w'_{(0)} = w'(w_{(0)}(0), w'_{(0)}, \lambda_{(0)}, T), \quad (4)$$

Проварьируем обе части (4) в окрестности состояния  $\lambda = \lambda_{(0)}$ ,  $w(0) = w_{(0)}(\theta)$

$$\delta w_{(0)}(0) = \frac{\partial w_{(0)}(T)}{\partial w_{(0)}(0)} \delta w_{(0)}(0) + \frac{\partial w_{(0)}(T)}{\partial w'_{(0)}(0)} \delta w'_{(0)}(0) + \frac{\partial w_{(0)}(T)}{\partial \lambda_{(0)}} \delta \lambda_{(0)},$$

$$\delta w'_{(0)}(0) = \frac{\partial w'_{(0)}(T)}{\partial w_{(0)}(0)} \delta w_{(0)}(0) + \frac{\partial w'_{(0)}(T)}{\partial w'_{(0)}(0)} \delta w'_{(0)}(0) + \frac{\partial w'_{(0)}(T)}{\partial \lambda_{(0)}} \delta \lambda_{(0)}. \quad (5)$$

Входящие в соотношения (5) коэффициенты после замены  $\partial w_{(0)}(\theta)/\partial w_{(0)}(0) = y_1(\theta)$ ,  $\partial w_{(0)}(\theta)/\partial w'_{(0)}(0) = y_2(\theta)$ ,  $\partial w_{(0)}(\theta)/\partial \lambda_{(0)} = y_3(\theta)$  определяются при  $\theta = T$  из линеаризованных уравнений

$$(c^2 - \alpha^2) y_1'' + (k + 3\beta w_{(0)}^2) y_1 = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0,$$

$$(c^2 - \alpha^2)y_2'' + (k + 3\beta w_{(0)}^2)y_2 = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1,$$

$$(c^2 - \alpha^2)y_\lambda'' + (k + 3\beta w_{(0)}^2)y_\lambda = \sin \gamma \theta, \quad y_\lambda(0) = 0, \quad y_\lambda'(0) = 0. \quad (6)$$

Задавшись величиной  $\delta\lambda_{(0)}$ , определяем из (5) соответствующие вариации начальных условий  $\delta w_{(0)}(0)$ ,  $\delta w'_{(0)}(0)$  как решение системы линейных уравнений

$$[y_1(T) - 1]\delta w_{(0)}(0) + y_2(T)\delta w'_{(0)}(0) = -y_\lambda(T)\delta\lambda_{(0)},$$

$$y_1'(T)\delta w_{(0)}(0) + [y_2'(T) - 1]\delta w'_{(0)}(0) = -y_\lambda'(T)\delta\lambda_{(0)}.$$

Решение задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями  $w_{(1)}(0) = w_{(0)}(0) + \delta w_{(0)}(0)$ ,  $w'_{(1)}(0) = w'_{(0)}(0) + \delta w'_{(0)}(0)$  будет  $T$ -периодическим при  $\lambda_{(1)} = \lambda_{(0)} + \delta\lambda_{(0)}$ . Поэтому, используя его далее в качестве порождающего, последующей вариацией параметра  $\lambda$  можно найти  $T$ -периодическое решение при  $\lambda = \lambda_{(2)} = \lambda_{(1)} + \delta\lambda_{(1)}$  и т.д. При этом на каждом шаге приращения параметра  $\lambda$  в линеаризованной системе уравнений следует учитывать невязку условий (4), связанную с заменой нелинейного уравнения (2) линеаризованными. Обозначив через  $r_1(T)$  и  $r_2(T)$  невязку в условиях (4), соответствующие поправки к вариациям начальных условий на  $i$ -м шаге продолжения по параметру  $\lambda$  могут быть найдены с использованием метода Ньютона-Канторовича

$$\begin{Bmatrix} \delta w_{(i)r} & (0) \\ \delta w'_{(i)r} & (0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1(T) - 1 & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) - 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1(T) \\ r_2(T) \end{Bmatrix}.$$

Матрица монодромии

$$Y(T) = \begin{vmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{vmatrix}$$

определяет условия существования и единственности решения в рассматриваемой окрестности и его устойчивость [6-8]. Состояния, в которых один из мультипликаторов матрицы  $Y(T)$  равен

$$\rho_i = \arg \frac{2\pi}{n},$$

является бифуркационным, а соответствующая ему в пространстве состояний точка — точка ветвления [8]. Поскольку ответвляющееся из этой точки решение имеет период  $nT$ , то при ее достижении дальнейшие построения следует производить на этом периоде. Так как в этом случае

$$\det |Y(nT) - E| = 0,$$

то вместо представления (5) следует использовать зависимости с удержанием членов более высоких порядков

$$\begin{aligned}
\delta w(0) &= y_1(nT)\delta w(0) + y_2(nT)\delta w'(0) + y_\lambda(nT)\delta\lambda + \\
&+ \frac{1}{2}y_{11}(nT)(\delta w(0))^2 + \frac{1}{2}y_{22}(nT)(\delta w'(0))^2 + \frac{1}{2}y_{\lambda\lambda}(nT)(\delta\lambda)^2 + \\
&+ y_{12}(nT)\delta w(0)\delta w'(0) + y_{1\lambda}(nT)\delta w(0)\delta\lambda + y_{2\lambda}(nT)\delta w'(0)\delta\lambda, \\
\delta w'(0) &= y'_1(nT)\delta w(0) + y'_2(nT)\delta w'(0) + y'_\lambda(nT)\delta\lambda + \\
&+ \frac{1}{2}y'_{11}(nT)(\delta w(0))^2 + \frac{1}{2}y'_{22}(nT)(\delta w'(0))^2 + \frac{1}{2}y'_{\lambda\lambda}(nT)(\delta\lambda)^2 + \\
&+ y'_{12}(nT)\delta w(0)\delta w'(0) + y'_{1\lambda}(nT)\delta w(0)\delta\lambda + y'_{2\lambda}(nT)\delta w'(0)\delta\lambda. \quad (7)
\end{aligned}$$

Эта система представляет собой систему уравнений разветвления [9].

Коэффициенты перед вариациями в правых частях разложений (7) являются производными от функций  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_\lambda$  по  $w(\theta)$ ,  $w'(\theta)$  при  $\theta = nT$ . Индексу 1 соответствует дифференцирование по  $w(0)$ , индексу 2 — по  $w'(0)$  и индексу  $\lambda$  — по  $\lambda$ . Для определения функций  $y_{11}(\theta)$ ,  $y_{12}(\theta)$ , ...,  $y_{\lambda\lambda}(\theta)$  необходимо проварьировать функции  $w(\theta)$ ,  $y_1(\theta)$ ,  $y_2(\theta)$ ,  $y_\lambda(\theta)$ , представив их в виде

$$\begin{aligned}
w + \frac{\partial w}{\partial w(0)}\delta w(0) &= w + y_1\delta w(0), \dots, y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial w(0)}\delta w(0) = \\
&= y_1 + y_{11}\delta w(0), \dots, y_\lambda + \frac{\partial y_\lambda}{\partial w(0)}\delta w(0) = y_\lambda + y_{1\lambda}\delta w(0)
\end{aligned}$$

и т.д.

Подставляя такие представления в уравнения (6) и пренебрегая малыми высокими порядков, получим систему задач Коши, определяющих функции  $y_{11}(\theta)$ ,  $y_{12}(\theta)$ , ...,  $y_{\lambda\lambda}(\theta)$ ,

$$\begin{aligned}
(c^2 - \alpha^2)y''_{11} + (k + 3\beta w^2)y_{11} &= -6\beta w y_1^2, \quad y_{11}(0) = 0, \quad y'_{11}(0) = 0, \\
(c^2 - \alpha^2)y''_{12} + (k + 3\beta w^2)y_{12} &= -6\beta w y_1 y_2, \quad y_{12}(0) = 0, \quad y'_{12}(0) = 0, \\
(c^2 - \alpha^2)y''_{1\lambda} + (k + 3\beta w^2)y_{1\lambda} &= -6\beta w y_1 y_\lambda, \quad y_{1\lambda}(0) = 0, \quad y'_{1\lambda}(0) = 0, \\
(c^2 - \alpha^2)y''_{22} + (k + 3\beta w^2)y_{22} &= -6\beta w y_2^2, \quad y_{22}(0) = 0, \quad y'_{22}(0) = 0, \\
(c^2 - \alpha^2)y''_{2\lambda} + (k + 3\beta w^2)y_{2\lambda} &= -6\beta w y_2 y_\lambda, \quad y_{2\lambda}(0) = 0, \quad y'_{2\lambda}(0) = 0, \\
(c^2 - \alpha^2)y''_{\lambda\lambda} + (k + 3\beta w^2)y_{\lambda\lambda} &= -6\beta w y_\lambda^2, \quad y_{\lambda\lambda}(0) = 0, \quad y'_{\lambda\lambda}(0) = 0. \quad (8)
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений разветвления (7) при вычисленных значениях коэффициентов  $y_1(nT)$ ,  $y_2(nT)$ , ...,  $y_\lambda(nT)$  и заданном  $\delta\lambda$  осуществляется путем отделения корней с последующим уточнением методом Ньютона-Канторовича. После этого методом продолжения по параметру можно продолжить решение по каждой из ветвей. При этом, если система (6) не имеет решения или среди корней имеются кратные, в уравнениях (7) следует учесть последующие члены разложения и вычисления повторить.

Описанный метод построения последовательности бифуркаций кратного увеличения периода волн, распространяющихся в нелинейных волноводах, ориентирован на использование быстродействующих ЭВМ с применением обеспечивающих высокую точность вычислительных процедур. Остановимся на основных особенностях его численной реализации.

Для построения дерева ветвлений разработана программа на алгоритмическом языке Фортран для ЭВМ РС АТ. Все вычисления выполнялись с удвоенной точностью. Системы уравнений (2), (6) и в точках ветвления (8) интегрировались совместно методом Эверхарта 11-го порядка [10] с высокой точностью ( $\sim 12-13$  верных знаков в конце периода  $nT$ ). Шаг продолжения  $\delta\lambda$  выбирался таким образом, чтобы после 2-3 итераций модифицированного метода Ньютона выполнялось условие

$$|r_1(T)| \leq \mu \max_{\theta} |w(\theta)|, \quad |r_2(T)| \leq \mu \max_{\theta} |w'(\theta)|,$$

где  $\mu \approx 10^{-10}$ .

В окрестности бифуркационных значений параметра  $\lambda$  решение уточнялось методом половинного деления. Мультипликаторы матрицы монодромии вычислялись с высокой точностью по специальным программам как корни соответствующих уравнений.

Исследование зависимости свойств периодических решений уравнения Клейна-Гордона (1) от интенсивности внешнего возбуждения  $\lambda$  проведено при следующих значениях параметров:  $(c^2 - \alpha^2) = 1$ ,  $k = 1$ ,  $\beta = -1$  для двух значений периода  $T$  внешнего поля ( $T = 2\pi/\gamma$ ):  $\gamma_1 = 1.3$ ,  $\gamma_2 = 0.7$ .

В качестве порождающего решения в обоих случаях принято устойчивое стационарное состояние  $\lambda_{(0)} = 0$ ,  $w_{(0)}(\theta) = 0$ ,  $w'_{(0)}(\theta) = 0$ . Остановимся более подробно на случае  $\gamma = \gamma_1 = 1.3$ . При изменении параметра интенсивности возбуждения от  $\lambda_{(0)}$  до  $\lambda^{(1)}$  движение представляет собой устойчивую периодическую волну с периодом  $T$ . При  $\lambda = \lambda^{(1)}$  (см. таблицу) оба мультипликатора матрицы монодромии, вычисленные на периоде  $T$ , принимают значения  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ , что свидетельствует о возможности возникновения бифуркационных волн с удвоением периода. Построенное в соответствии с изложенным выше методом

Бифуркационные значения интенсивности возбуждения и начальных условий при  $\gamma = \gamma_1 = 1.3$

$i$	$\lambda^{(i)}$	$\delta^{(i)}$	$w_{(i)}(0)$	$w'_{(i)}(0)$
1	0.636	—	0.000	-0.848706559318464
1'	0.647745547325417	7.4771411	0.445	-0.704071114335218
2	0.639788514027634	8.3209843	0.569155	-0.605620577514308
3	0.638724332823485	8.7185209	0.596140	-0.586661076792064
4	0.638596441558589	8.7168799	0.596596834695546	-0.585586862460028
5	0.638581772641054	8.7197367	0.596268311658596	-0.585683054229472
6	0.638580089823631	8.7210974	0.596249361653941	-0.585693011992966
7	0.638579896834155		0.596243190363941	-0.585694657191753
8	0.638579874731239		0.596242393794424	-0.585694734286609

бифуркационное решение с удвоенным периодом оказывается неустойчивым. Тем не менее проследим за дальнейшей эволюцией волн на периоде  $2T$  при изменении интенсивности внешнего возбуждения  $\lambda$ . При незначительном изменении  $\lambda$  от  $\lambda^{(1)}$  до  $\lambda^{(1')}$  происходят перестройка профиля волны и сдвиг ее фазы относительно внешнего поля. На этом интервале изменения параметра возбуждения  $2T$ -периодическая волна остается неустойчивой. При  $\lambda = \lambda^{(1')}$  оба мультипликатора матрицы монодромии принимают значения 1, что соответствует наличию некоторой предельной точки на ветви  $2T$ -периодических решений уравнения (1). Продолжение  $2T$ -периодических решений за предельную точку сопровождается уменьшением интенсивности возбуждения  $\lambda$  до значения  $\lambda^{(2)}$  (см. таблицу), причем при  $\lambda^{(1')} \geq \lambda > \lambda^{(2)}$   $2T$ -периодические волны являются устойчивыми. При  $\lambda = \lambda^{(2)}$  происходит следующая бифуркация удвоения периода. Дальнейшее уменьшение интенсивности возбуждения  $\lambda$  приводит к неустойчивости  $2T$ -периодической волны, в то время как бифуркационная  $4T$ -периодическая волна является устойчивой при  $\lambda^{(2)} \geq \lambda > \lambda^{(3)}$ . При  $\lambda = \lambda^{(3)}$  очередная бифуркация удвоения периода приводит к возникновению устойчивой  $8T$ -периодической волны, и т.д. В таблице приведены значения  $\lambda^{(i)}$  для восьми ( $i = \overline{1,8}$ ) первых бифуркаций удвоения периода волн в нелинейном волноводе при  $\gamma = 1.3$ . Там же приведены начальные условия  $2T$ -периодических решений уравнения (2) в точках бифуркации. На рис. 1,  $a-d$  представлены профили  $T$ -,  $2T$ -,  $4T$ -,  $8T$ -,  $16T$ -периодических волн, соответствующие бифуркационным значениям интенсивности возбуждения  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(s)}$ .

Анализ бифуркационных значений  $\lambda^{(i)}$  показывает, что их последовательность быстро сходится к некоторой точке "накопления" [11]  $\lambda^{(\infty)}$  по закону, близкому к геометрической прогрессии с показателем

$$\delta^{(i)} = \frac{\lambda^{(i)} - \lambda^{(i+1)}}{\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i+2)}}$$

а сам показатель  $\delta^{(i)}$  при увеличении  $i$  стремится к универсальной консервативной постоянной Фейгенбаума  $\delta = 8.72109720 \dots$  [12], найденной для двумерных гамильтоновых отображений. Отметим, что уже при  $i = 6\delta^{(i)}$  (см. таблицу) отличается от  $\delta$  на величину  $\sim 10^{-7}$ . Воспользовавшись универсальной постоянной  $\delta$ , определим интенсивность возбуждения  $\lambda^{(\infty)}$ , при которой волновой процесс будет носить хаотический характер. Так, при  $i = 7$

$$\lambda^{(\infty)} = \lambda^{(i)} - \left( \lambda^{(i)} - \lambda^{(i+1)} \right) \frac{\delta}{\delta - 1} = 0.6385798718.$$

Проследим теперь, как изменяется спектр волны при последовательности бифуркаций удвоения периода. На рис. 2,  $a$  представлен спектр Фурье  $T$ -периодической волны при  $\lambda = \lambda^{(1)}$ . В спектре бифуркационной волны удвоенного периода наряду с гармоникой половинной частоты появляются кратные ей нечетные гармоники. При каждом

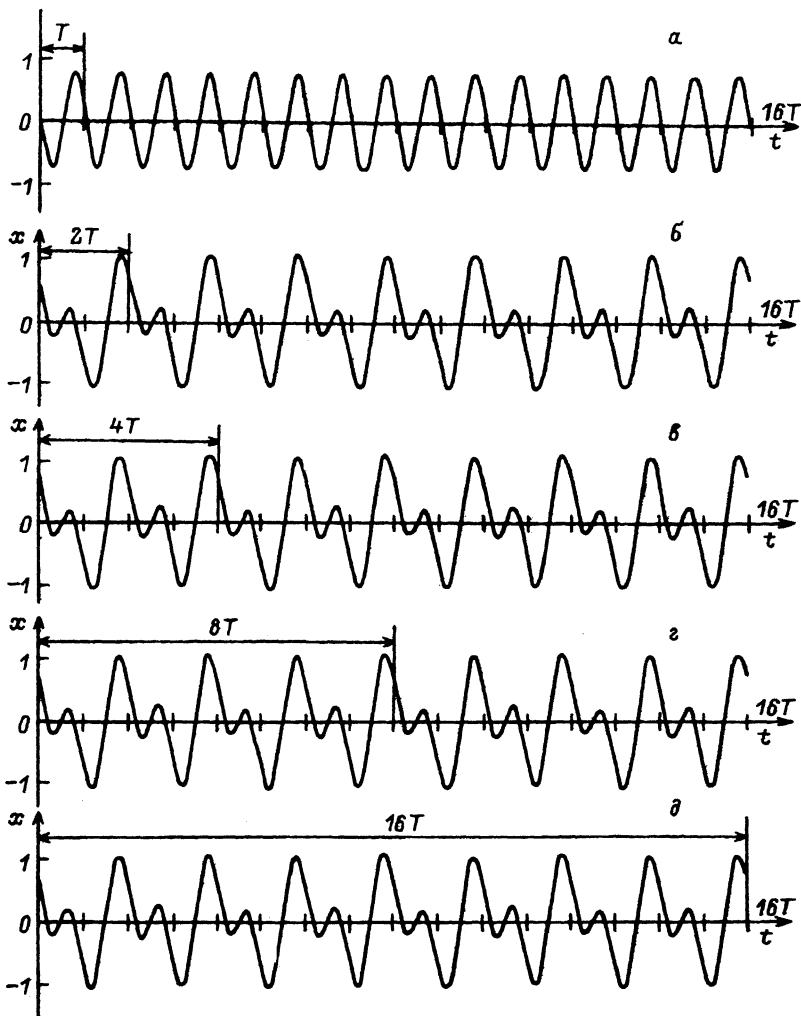


Рис. 1.  
 а-д — профили  $T$ -,  $2T$ -,  $4T$ -,  $8T$ -,  $16T$ -периодических волн, соответствующие бифуркационным значениям интенсивности возбуждения  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(5)}$ .

последующем удвоении периода волны в ее спектре появляются гармоники с частотами  $\nu_{ip} = (2p-1)\gamma/(i+1)$ ,  $p = 1, 2, 3, 4, \dots$ . На рис. 2, б-г представлены спектры бифуркационных волн при  $\lambda = \lambda^{(i)}$  ( $i = 2, 3, 4$ ). При  $i \geq 2$  в спектре волны преобладают две фурье-компоненты: основной и половинной частоты, причем амплитуда гармоники половинной частоты превышает амплитуду основной моды. Сравнение спектров бифуркационных волн при  $i \geq 2$  позволяет сделать вывод, что амплитуда каждой моды, достигнув некоторого уровня насыщения, при дальнейших удвоениях периода практически не изменяется, а сам уровень насыщения уменьшается с ростом  $i$ . Таким образом, при  $i \rightarrow \infty$  в спектре волны появляется бесконечное число фурье-компонент, что и свидетельствует о хаотизации периодической волны.

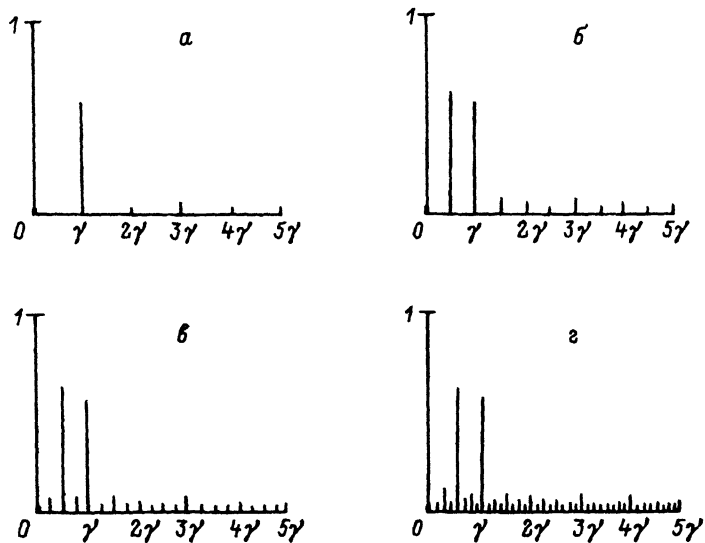


Рис. 2.

*a-г* — спектры  $2^{(i-1)}T$ -периодических волн, соответствующие интенсивности возбуждения  $\lambda^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) при  $\gamma = \gamma_1$ .

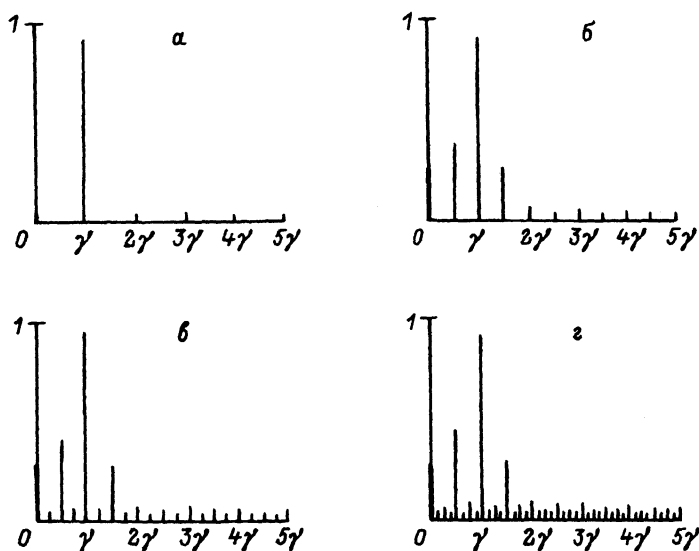


Рис. 3.

*a-г* — спектры  $2^{(i-1)}T$ -периодических волн, соответствующие интенсивности возбуждения  $\lambda^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) при  $\gamma = \gamma_2$ .



Рассмотрим теперь случай, когда период внешнего поля больше собственного периода волны в линейном приближении ( $\gamma = \gamma_2$ ). В этом случае также обнаружена бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода волны, обладающая свойством универсальности. Характерно, что уже при  $i = 3$  отличие показателя  $\delta^{(i)}$  от универсальной постоянной  $\delta$  составляет  $\sim 10^{-4}$ . Не останавливаясь подробно на результатах численных исследований, отметим лишь качественные особенности найденных  $2^{(i-1)}T$ -периодических решений при  $\gamma = \gamma_2$ . Так, в отличие от случая  $\gamma = \gamma_1$  последовательность бифуркаций удвоения периода волн при  $\gamma = \gamma_2$  не сопровождается существенной перестройкой профиля волны и сдвигом ее фазы относительно внешнего поля. Для фурье-спектров бифуркационных волн характерно преобладание основной моды. Спектры  $2^{(i-1)}T$ -периодических волн, соответствующие значениям интенсивности возбуждения  $\lambda^{(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) при  $\gamma = \gamma_2$ , представлены на рис. 3, а-г. Присутствие в спектрах бифуркационных волн нулевой фурье-компоненты свидетельствует об их несимметричности относительно уровня  $w(\theta) = 0$ . В рассмотренном случае максимальная глубина ложбин становится больше высоты гребней.

Наряду с последовательностью бифуркаций удвоения периода, уравнение (1) при некоторых значениях интенсивности возбуждения

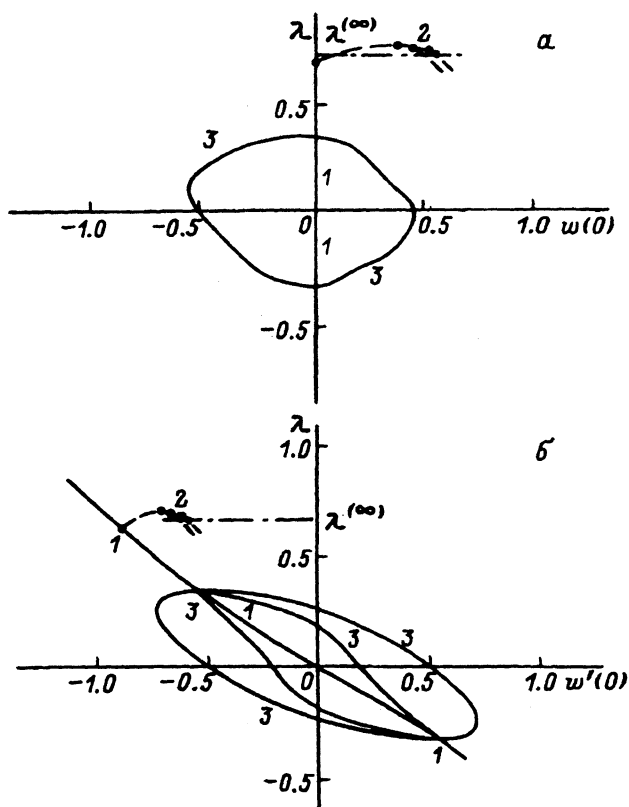


Рис. 4. Проекция ветвей  $T$ -,  $2^{(i-1)}T$ -,  $3T$ -периодических решений в пространстве  $w(0)$ ,  $w'(0)$ ,  $\lambda$  на плоскости  $w(0) \ 0 \ \lambda$  (а) и  $w'(0) \ 0 \ \lambda$  (б).

$\lambda$  допускает возможность возникновения бифуркационных волн с утроением периода. При частоте внешнего поля  $\gamma = \gamma_1 = 1.3$  бифуркация утроения периода волны возможна в том случае, когда интенсивность возбуждения достигает значения  $\lambda = \lambda^{(*)} = 0.3388478$ . Продолжение по параметру  $\lambda$  ветви  $3T$ -периодических решений уравнения (1) позволило построить семейство бифуркационных волн утроенного периода, соответствующих интенсивности возбуждения  $-\lambda^{(*)} \leq \lambda \leq \lambda^{(*)}$ . Характерно, что ветвь  $3T$ -периодических решений в пространстве  $w(0)$ ,  $w'(0)$ ,  $\lambda$  является замкнутой, а все принадлежащие ей решения — устойчивыми. На рис. 4 показаны проекции ветвей  $T$ -,  $2^{(i-1)}T$ -,  $3T$ -периодических решений в пространстве  $w(0)$ ,  $w'(0)$ ,  $\lambda$  на плоскости  $w(0)0\lambda$  (а) и  $w'(0)0\lambda$  (б): 1 — ветвь  $T$ -периодических решений, 2 — ветвь  $2^{(i-1)}T$ -периодических решений, 3 — ветви  $3T$ -периодических решений. Участки, соответствующие устойчивым  $nT$ -периодическим решениям, показаны сплошной линией, неустойчивым — пунктирной.

Проведенные расчеты показали возможность распространения в простейших волноводах нелинейных волн, период которых намного превосходит период модулирующего внешнего поля. Показано, что в таких волноводах могут возникать хаотические волны через универсальную последовательность бифуркаций кратного увеличения периода.

#### Список литературы

- [1] Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. М.: Мир, 1987. 178 с.
- [2] Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И. // Физика XX века. Развитие и перспективы. М.: Наука, 1984. С. 219–281.
- [3] Shilnikov L.P. Bifurcation Theory and Turbulence. Nonlinear and Turbulent Processes. New York: Harward Academic Publishers, 1984. Vol. 2. P. 1627–1635.
- [4] Анищенко В.С. Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч. 1,2. Саратов, 1985.
- [5] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
- [6] Feigenbaum M.J. // Los Alamos Science. 1980. Vol. 1. N 1. P. 4–27.
- [7] Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львов: Вища школа, 1983. 287 с.
- [8] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
- [9] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969. 528 с.
- [10] Everhart E. // Celest. Mech. 1974. Vol. 10. P. 35–55.
- [11] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
- [12] Helleman R.H.G. // Chaos and Order in Nature. Intern. Simp. of Synergetics. Bavaria, Berlin: Springer, 1981. P. 232–248.

Киевский инженерно-строительный институт

Поступило в Редакцию  
10 июня 1993 г.