

01;05

©1994 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТОДОМ РЕКОНСТРУКТИВНОЙ ТОМОГРАФИИ

П.Ю. Жилинскas

Рассматривается метод, позволяющий определить распределение электрического сопротивления в токопроводящих слоях. Этот метод осуществляется путем пропускания постоянного тока по разным направлениям через токопроводящий слой. По измеренным значениям тока с помощью итерационного алгебраического алгоритма реконструкции рассчитывается распределение электрического сопротивления. Проверка метода осуществлена численным моделированием токопроводящего слоя резисторным полем. Установлено, что рассчитанные значения сходятся к установленным значениям (с некоторой погрешностью), соответствующим сопротивлению отдельных участков. Метод может быть использован для электронной реконструктивной томографии твердого проводящего тела.

Введение

Электрическое сопротивление (или проводимость) токопроводящих материалов обычно измеряется двух- или четырех-зондовым методом [1]. Для этого в разных местах токопроводящего слоя формируются электрические контакты, измеряются их токи и напряжения, которые позволяют рассчитать либо объемное (в Ом·м), либо поверхностное ($\text{Ом}/\text{м}^2$), либо погонное ($\text{Ом}/\text{м}$) сопротивление участка. В неоднородных образцах этими измерениями определяется эффективное значение сопротивления, а для определения закона распределения требуется повторять эти измерения в разных местах токопроводящего слоя, что не всегда желательно.

В настоящей работе предлагается метод определения распределения электрического сопротивления (или проводимости) [2,3] путем формирования электрических омических контактов-электродов на краю исследуемого токопроводящего слоя, измерения токов электродов в определенной последовательности и расчета распределения сопротивления с использованием алгебраического алгоритма реконструкции изображения по прекциям [4].

Обоснование метода

Пусть исследуемый объект (рис. 1) — токопроводящий слой характеризуется априорно неизвестным законом распределения сопротивления и является тонкой пластиной или слоем произвольной формы. Если мысленно выделить из исследуемого токопроводящего слоя узкую полоску вдоль оси z , приложить к боковым электродам, создающим омический контакт с исследуемым материалом, источник напряжения и пропустить ток, то очевидно, что сумма падений напряжений в отдельных участках по направлению оси z будет равна приложенному внешнему напряжению. Полагая, что величина тока на всех участках выделенного канала по направлению оси z одинакова, можно написать, что

$$R = \int_{z=0}^{z=L} r(x, y) dz, \quad (1)$$

где x и y — координаты участка с погонным сопротивлением r ; R — оценка интеграла вдоль оси z , или, другими словами, сопротивление выделенного канала, определяемое между боковыми электродами.

В этой формуле для точек (x, y) вне области интегрирования $r(x, y) = 0$.

Таким образом, значение сопротивления канала, определяемое между боковыми электродами, называемыми источником (электрод $z = 0$) и приемником (электрод $z = L$), несет в себе информацию о значениях сопротивления отдельных участков вдоль выбранного направления z . Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $r(x, y)$. Решать эту задачу из одного интеграла (1) невозможно, поэтому следует формировать для множества направлений i систему интегральных уравнений вида

$$R_i = \int_{z=0}^{z=L_1} r(x, y) dz, \quad i = 1, \dots, M \quad (2)$$

и отыскать способ совместного решения. В уравнении (2) i — соответствующее направление; M — количество направлений; L_1 — длина линии, соединяющей источник и приемник по i -тому направлению. Решение системы уравнений (2) можно осуществить с помощью принципов, используемых в реконструктивной томографии.

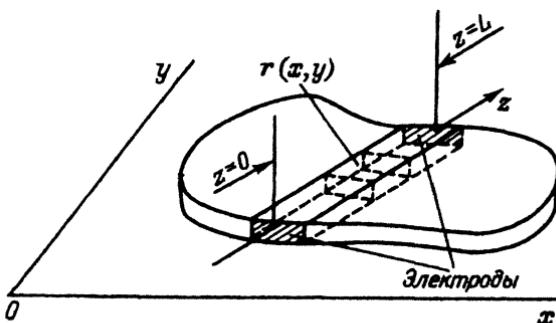


Рис. 1. Токопроводящий слой с выделенной узкой полоской — каналом.

Применение принципов реконструктивной томографии для определения распределения электрического сопротивления токопроводящих материалов выдвигает ряд требований к условиям проведения эксперимента. Во-первых, слой должен быть бесконечно тонким, во-вторых, результат, регистрируемый приемником, должен быть равен сумме ослабляющих способностей отдельных участков вдоль линии, соединяющей источник и приемник, в-третьих, для любого определенного положения источника-приемника измеряется величина, несущая информацию о пространстве вдоль прямой линии, соединяющей источник и приемник.

Первое требование о тонкости может быть выполнено при исследовании механически вырезанных тонких пластин, например из кристаллов, или при исследовании тонких токопроводящих слоев, нанесенных, выращенных или сформированных на изоляционных подложках.

Второе требование о сумме ослабляющих способностей отдельных участков вдоль линии, соединяющей источник и приемник, выполняется при условии, что приложенное внешнее напряжение всегда равно сумме падений напряжений на отдельных участках вдоль линии (второе правило Киргофа).

Третье требование о получении информации вдоль прямой линии выдвигает условие прямолинейного протекания тока, несущего информацию о сопротивлении отдельных участков от источника к приемнику. Для токопроводящих слоев это условие является специфическим, поэтому нужно найти способы подключения образца в электрическую цепь, чтобы это условие обеспечить.

Одна из наиболее простых вариантов, который позволяет осуществить в гомогенном образце прямолинейную траекторию протекания тока, основана на выборе образца, имеющего форму диска со сформированными по периметру образца электродами, которые подключены к источнику напряжения по схеме на рис. 2,а. В этой схеме источник напряжения, создающий ток в образце, одним выводом подключается к одному электроду, далее называемому источником и обозначенному индексом i , а другим выводом — ко всем остальным электродам, далее называемым приемниками и обозначенным индексом j . Все n электроды, расположенные по периметру образца, являются точечными и омическими.

Проверку выполнения условия прямолинейного протекания тока на гомогенном образце, подключенном по схеме на рис. 2,а, можно осуществить путем теоретического расчета и экспериментального измерения эквипотенциальных линий и путем контроля выполнения уравнения (2) в этих же условиях. Теоретический расчет и экспериментальное измерение распределения электрического потенциала дают форму эквипотенциальных линий, показанных на рис. 2,б. Если по этим эквипотенциальным линиям строить траектории составляющих токов от электродов приемников j к электроду источника i , то получается неизообразная форма траектории составляющих тока, по которым нетрудно убедиться, что каждая траектория тока мало отличается от прямой линии, соединяющей электрод приемника с электродом источника.

Уравнение (2) при условии гомогенности токопроводящей структуры, т.е. при $r(x, y) = r = \text{const}$, приобретает следующий вид:

$$R_1 = r \cdot L_1, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3)$$

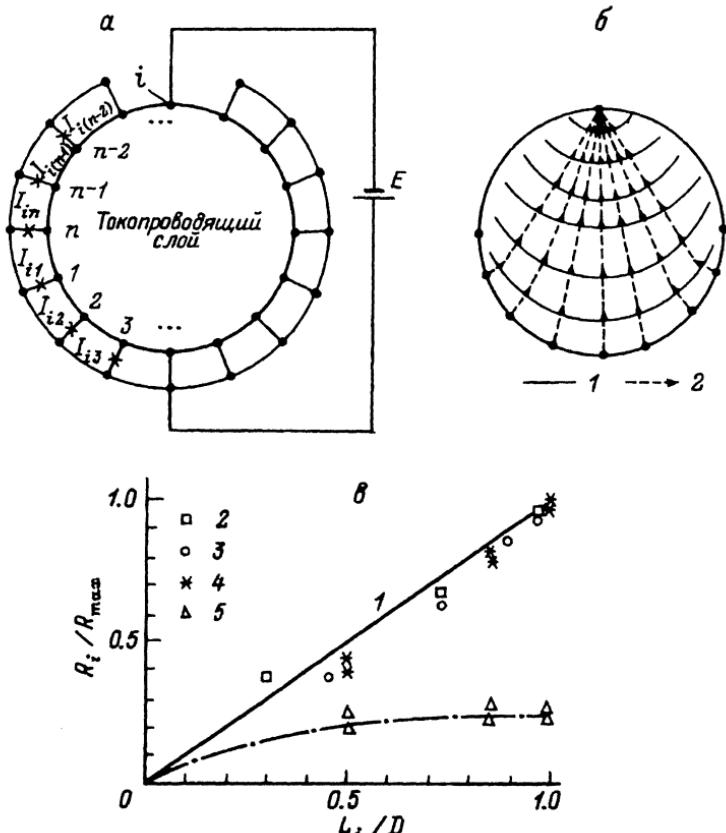


Рис. 2. Токопроводящий слой круглой формы с n боковыми электродами при подключении источника напряжения одним выводом к одному электроду, а другим выводом — к остальным электродам.

a — электрическая схема соединения; *б* — изображение эквипотенциальных линий (1) и траектории токов (2) для гомогенного токопроводящего слоя; *в* — нормированные зависимости сопротивления R_1/R_{\max} от расстояния источник-приемник L_1/D (R_{\max} — сопротивление, когда $L_1 = D$, D — диаметр токопроводящего слоя) для гомогенного токопроводящего слоя: 1 — зависимость построена по формуле (3); 2,3 — теоретический расчет; 4 — экспериментальная проверка; 5 — экспериментальная проверка при подключении источника напряжения к двум электродам.

Уравнение (3) показывает, что в гомогенном токопроводящем слое сопротивление между электродами источника и приемника должно быть прямо пропорциональным расстоянию между электродами источника и приемника. Проверка этого, когда исследуемый токопроводящий слой подключен в цепь по схеме на рис. 2,*а*, осуществлено теоретически на основе расчета токов приемников и по этим токам сопротивления R_1 и экспериментально на модели гомогенного токопроводящего слоя путем измерения токов приемников и расчета по этим токам сопротивления R_1 . Результаты проверки показаны на рис. 2,*в*, где представлены нормированные зависимости значения сопротивления от расстояния между источником и приемником. На этом рисунке квадратиками и кружочками показаны результаты, которые рассчитаны теоретически, крестиками — результаты экспериментальной про-

верки, а сплошной линией — прямая по формуле (3), которая идеально соответствовала требованию прямолинейного протекания тока.

На рис. 2,в проведена штрихпунктирная кривая по экспериментальным результатам, обозначенным треугольниками и полученным после подключения источника напряжения только к двум электродам и измерения сопротивления между источником и приемником при переключении электродов приемника по периметру диска. Эта кривая иллюстрирует явную негодность двухконтактного способа измерения.

Сравнение полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что при подключении источника к исследуемому круглому, имеющему форму диска гомогенному проводящему образцу по схеме на рис. 2,а возможно осуществить условия, близкие к требованиям прямолинейного протекания тока, а также, что результат измерения сопротивления R_1 с некоторой погрешностью является мерой, несущей информацию о пространстве вдоль линии, соединяющей источник и приемник в гомогенном токопроводящем слое.

В негомогенном токопроводящем слое измеренное значение сопротивления R_1 априорно целесообразно считать тоже мерой неоднородности сопротивления по линии, соединяющей источник и приемник. Доказательство этого предположения можно получить после полной проверки правильности работы излагаемого метода.

Таким образом, для осуществления реконструкции распределения сопротивления в токопроводящем слое предлагается измерять токи по схеме, показанной на рис. 2,а, и считать их несущими информацию о сопротивлении отдельных участков, находящихся по линии источника с приемником.

Алгоритм реконструкции

Алгоритм реконструкции рассмотрим на примере круглого токопроводящего слоя, по краям которого сформировано n омических контактов. Изображение пластин показано на плоскости x, y (рис. 3), где нанесена сетка, разделяющая кадр изображения на $N \times N$ равных квадратов единичной площади, каждый из которых называют элементом дискретизированного изображения, или элизом.

Имея в виду, что оценка R_1 вдоль оси z в реальных условиях определяется дискретно как сопротивление между двумя заранее сформи-

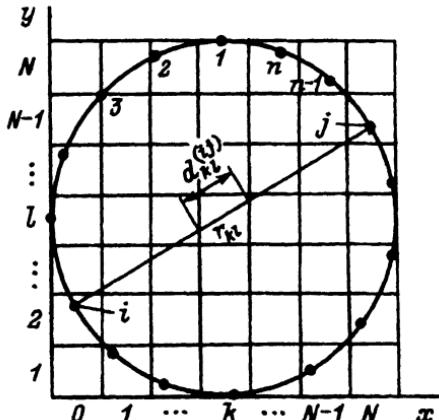


Рис. 3. Круглый токопроводящий слой с n электродами дискретизован на $N \times N$ элизов.

рованными омическими контактами источников и приемников, уравнение (2) тоже должно быть представлено в дискретном виде. Оно может быть переписано с учетом дискретизации изображения пластины (рис. 3) так:

$$R_{ij} = \sum_{k,l=1}^N r_{kl} \cdot d_{kl}^{ij}. \quad (4)$$

Здесь i — номер электрода источника; j — номер электрода приемника; r_{kl} — истинное значение сопротивления в элизе с координатами kl ; d_{kl} — длина в элизе kl линии, соединяющей электроды источника i и приемника j .

Множество дискретных функций, представленных в виде уравнения типа (4), с целью определения сопротивления r_{kl} решается применением алгоритмов разложения их в ряд. Решение сводится к нахождению конечного множества числа r' , каждое из которых имеет смысл сопротивления единичной длины соответствующего участка. Вычисления вектора r' , для которого справедливо соотношение

$$R = r' \cdot d + e, \quad (5)$$

где R — вектор измеренных значений, d — вектор длин, e — вектор погрешностей, осуществляется при помощи итерационного алгебраического алгоритма реконструкции изображения [4].

Вычисления проводятся путем наложения на вектора r' и e условий, удовлетворяющих определенному критерию оптимальности, позволяющий получить последовательность $r'^{(0)}, r'^{(1)}, r'^{(2)}, \dots$, которая сходится при p -м шаге итерации к оценке r^* , т.е.

$$r'^{(p)} = r^*, \quad p \gg 1.$$

Шагом итерации называется процесс получения величины $r'^{(p+1)}$ из $r'^{(p)}$. Принимается предположение, что если p выбрано достаточно большим, то оценка r^* произвольно близка к истинному значению r .

Рассмотрим алгоритм, основанный на определении величины погрешности e по формуле (5) для одного измеренного значения R_{ij} с постепенным внесением в величину r' поправок, пропорциональных полученному значению погрешности e и длине d в элизах, находящихся на линии, соединяющей источник i и приемник j так, чтобы для новых значений величины r' погрешность e стала равной нулю.

В этом алгоритме новое ($m+1$)-е значение вектора r' в элизе рассчитывается из предыдущего m -го значения вектора r' по формуле

$$r'^{(m+1)}_{uv} = r'^{(m)}_{uv} + H^{(ij)} d_{uv}^{(ij)}, \quad (6)$$

где u и v — координаты элизов (их значения изменяются от 1 до N), $H^{(ij)}$ — коэффициент поправки для ij -го измерения, $d_{uv}^{(ij)}$ — длина в элизе с координатами uv для ij -го измерения.

Таблица 1. Матрица длин отрезков D

ij	kl										
	11	12	...	1N	21	22	...	2N	...	$N(N - 1)$	NN
12	0	0		0	$d_{21}^{(12)}$	$d_{22}^{(12)}$		$d_{2N}^{(12)}$		0	0
13	0	0		0	0	$d_{22}^{(13)}$		$d_{2N}^{(13)}$		0	0
14	0	0		0	0	0		0		0	0
⋮											
1n	0	$d_{12}^{(1n)}$		$d_{1N}^{(1n)}$	0	0		0		0	0
21											
⋮											
2n	0	0		0	0	0		0		0	0
⋮											
36	0	0		0	$d_{21}^{(36)}$	$d_{22}^{(36)}$		0		0	0
⋮											
$n(n - 2)$	0	0		0	0	0		0		0	0
$n(n - 1)$	0	0		$d_{1N}^{n(n-1)}$	0	0		0		0	$d_{NN}^{n(n-1)}$

Коэффициент поправки для ij -го измерения рассчитывается по формуле

$$H^{(ij)} = \frac{R_{ij} - \sum_{k,l=1}^N r'_{kl}^{(m)} \cdot d_{kl}^{(ij)}}{\sum_{k,kl}^N d_{kl}^{(ij)} \cdot d_{kl}^{(ij)}}. \quad (7)$$

Итерационный алгоритм реконструкции распределения сопротивления по результатам измерения токов на краях токопроводящего слоя выполняется в двух этапах.

На первом этапе формируются матрицы R , D и R' исходных данных при выполнении следующих действий: 1) измеряются токи I_{ij} ($i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $i \neq j$) по схеме на рис. 2, a ; 2) вычисляются сопротивления R_{ij} по формуле $R_{ij} = E/I_{ij}$ и создается матрица R измеренных данных; 3) создается матрица D длин отрезков $d_{kl}^{(ij)}$ для данной конфигурации и дискретизации (на рис. 3, табл. 1), 4) создается матрица R' сопротивления r'_{kl} (табл. 2) и заполняется начальными значениями $r'^{(0)}$.

ij	12	13	...	1n	21	23	...	2n	...	36	...	$n(n - 2)$	$n(n - 1)$
R	R_{12}	R_{13}	...	R_{1n}	R_{21}	R_{23}	...	R_{2n}	...	R_{36}	...	$R_{n(n-2)}$	$R_{n(n-1)}$

Таблица 2. Матрица сопротивлений R'

l	k			
	1	2	...	N
1	r'_{11}	r'_{12}		r'_{1N}
2	r'_{21}	r'_{22}		r'_{2N}
:				
N	r'_{N1}	r'_{N2}		r'_{NN}

На втором этапе осуществляется процесс реконструкции, который состоит из определенного количества шагов итераций p и который из начальных значений, занесенных в матрицу R' , рассчитывает конечные значения, удовлетворяющие уравнению (5) по возможности с наименьшей погрешностью. Для этого выполняются следующие действия: 1) выбирается первое значение индексов ij (обычно 12); 2) вычисляется коэффициент поправки $H^{(ij)}$ по формуле (7) с учетом данных матриц R , D и R' ; 3) вычисляются новые значения матрицы R' сопротивлений r' по формуле (6) для выбранного индекса ij ; 4) выбирается следующее значение индекса ij и осуществляется переход к пункту 2 этого этапа; 5) Вычисление завершается после расчета содержания матрицы R' для последнего индекса ij (обычно $n(n - 1)$); 6) проверяется условие $|r'^{(p)} - r'^{(p-1)}| < \varepsilon$, где ε — произвольно малая величина, характеризующая неизменность содержания матрицы R' по сравнению с предыдущей.

Если условие по пункту 6 не выполняется, то осуществляется переход к следующему шагу итерации, т.е. к пункту 1 этого этапа.

Если это условие выполняется, то итерационный процесс расчета завершается и содержимое матрицы R' считается оценкой закона распределения сопротивления исследуемого токопроводящего слоя.

Экспериментальная проверка

Проверка метода определения закона распределения сопротивления токопроводящего слоя и его свойств осуществляется путем цифрового моделирования закона распределения и моделирования токопроводящего слоя резисторным полем. Цифровое моделирование позволяет определить свойства алгоритма, а моделирование резисторным полем позволяет определить еще и свойство измерительного процесса. В обоих случаях имеется в виду круглый токопроводящий слой с шестью боковыми электродами ($n = 6$) под углом 60° (рис. 4). Изображение токопроводящего слоя разделено на 4×4 равные квадраты. Исследования проводились с гомогенной структурой и со структурой, разделенной на две зоны с разными значениями сопротивления.

Для проверки метода путем цифрового моделирования сначала создается матрица D для отрезков (в нашем случае для $n = 6$ и $N = 4$), выбирается исследуемая гомогенная и негомогенная структуры, формируется матрица R исходных данных, считается, что уравнение (4) выполняется, и задается начальное значение для матрицы R' .

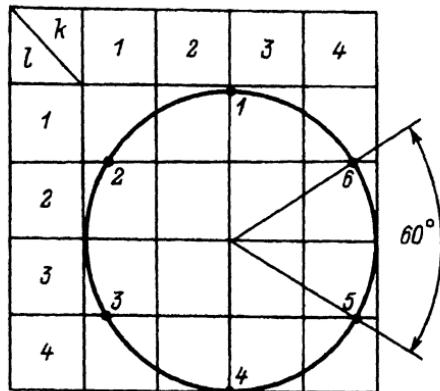


Рис. 4. Изображение моделируемого токопроводящего слоя с шестью ($n = 6$) боковыми электродами, разделенного сеткой на 4×4 ($N = 4$) элизов.

Далее выполняется процедура реконструкции содержания матрицы R' по имеющимся исходным данным в матрице R . Результаты расчета содержания каждой ячейки матрицы R в зависимости от номера итерации p для одного однородного ($r = 1$) и двух неоднородных (одна с $r_1 = 1$ и $r_2 = 2$ и другая с $r_1 = 1$ и $r_2 = 9$) моделей слоев представлены на рис. 5. Эти графики являются наиболее характерными и иллюстрируют основные свойства работы алгоритма реконструкции. Из них видно, что результаты расчета сходятся к некоторому установившемуся значению в каждой ячейке и разброс или погрешность рассчитанных значений сопротивлений отдельных участков тем меньше, чем однороднее токопроводящая структура. Расчеты также показывают, что установившееся значение в каждой ячейке и их разброс в однородной зоне не зависит, а длительность процесса реконструкции, которая определяется количеством итерации p , зависит от заданных начальных значений $r^{(0)}$. Для однородного токопроводящего слоя установлено, что чем ближе начальное значение к истинному значению сопротивления токопроводящего слоя, а для неоднородного чем ближе начальное значение к среднему значению, тем меньшее количество итераций требуется для процесса реконструкции.

Для проверки метода путем моделирования резисторным полем создается резисторная матрица, имитирующая токопроводящий слой. Матрица может быть сформирована следующим образом. Непрерывный токопроводящий слой делится на равносторонние треугольники и каждый из них замещается треугольниками равных резисторов, сопротивление которых равно сопротивлению квадрата участка. Треугольники из резисторов соединяются между собой вершинами, и формируется шестигранник, имитирующий круглый токопроводящий слой с шестью боковыми электродами ($n = 6$). Варьируя значения сопротивления резисторов треугольников, можно формировать гомогенную или негомогенную модель слоя. В качестве примера смоделирована негомогенная модель слоя с двумя зонами. В этой матрице одна зона собрана из резисторов $0.12 \text{ кОм} \pm 5\%$, другая из резисторов $0.56 \text{ кОм} \pm 5\%$.

Процедура восстановления распределения сопротивления осуществляется по данным, получаемым при измерении токов с kontaktов матрицы резисторов по схеме, показанной на рис. 2,а. Результаты расчета содержимого матрицы R' в зависимости от номера итерации для матрицы резисторов представлены на рис. 6. Там же показан результат содержимого матрицы R' в зависимости от номера итерации при

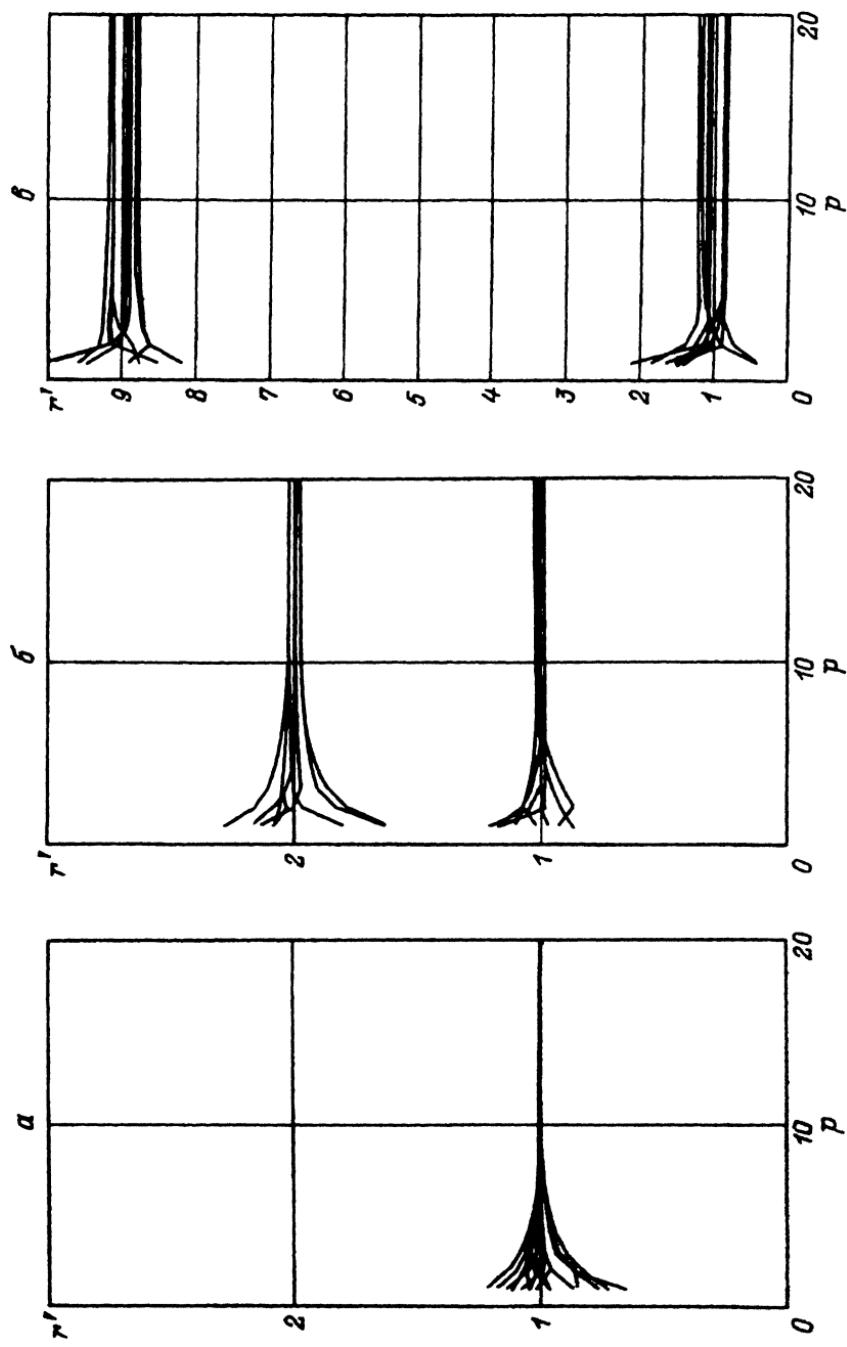


Рис. 5. Результаты расчета зависимости содержимости каждой ячейки матрицы R' от номера итерации R' при цифровом моделировании.

a — при однородной модели слоя с $r_1 = 1$, b — при неоднородной модели слоя с $r_1 = r_2 = 2$, c — при неоднородной модели слоя с $r_1 = r_2 = 9$.

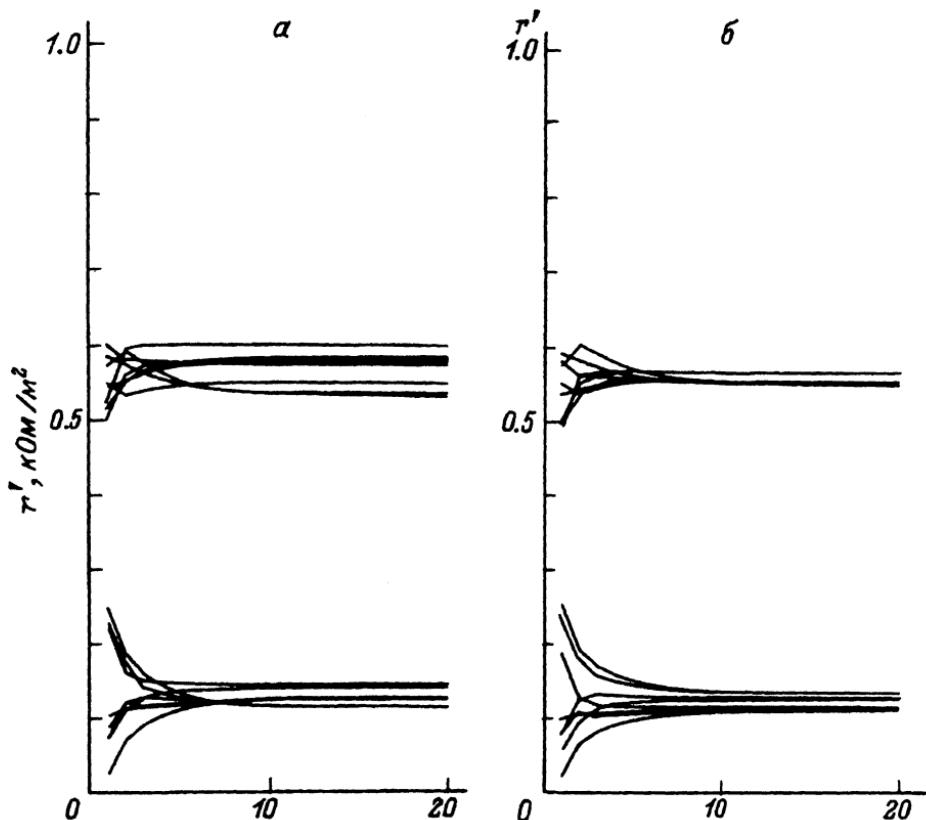


Рис. 6. Результаты расчета зависимости содержания каждой ячейки матрицы R' от номера итерации p .

a — при моделировании резисторным полем (рис. 9), *b* — при цифровом моделировании ($r_1 = 0.12$, $r_2 = 0.56$).

цифровом моделировании для модели токопроводящего слоя с двумя зонами, одна с $r_1 = 0.12$, другая с $r_2 = 0.56$. Оба графика получены для начального значения $r'^{(0)}$, равного 0.5. Результаты расчета содержимого матрицы R' 50-й итерации для обоих методов моделирования представлены в табл. 3, 4. Из этих графиков и таблиц видно, что алгоритм реконструкции по измеренным значениям токов четко выделяет

Таблица 3. Результаты расчета содержимого матрицы $R'(p = 50)$ при моделировании резисторным полем

l	k			
	1	2	3	4
1	0.53	0.60	0.12	0.11
2	0.58	0.57	0.12	0.12
3	0.58	0.55	0.14	0.13
4	0.53	0.58	0.14	0.11

Таблица 4. Результаты расчета содержимого матрицы $R'(p = 50)$ при численном моделировании ($r_1 \neq 0.12$, $r_2 = 0.56$)

l	k			
	1	2	3	4
1	0.55	0.57	0.11	0.13
2	0.57	0.56	0.13	0.11
3	0.57	0.56	0.12	0.11
4	0.55	0.57	0.11	0.13

Таблица 5. Результаты расчета средних значений зон и их разброс

Сопротивление квадрата зоны, $\text{k}\Omega/\text{м}^2$	Численное моделирование		Моделирование резисторным полем	
	среднее значение, $\text{k}\Omega/\text{м}^2$	разброс значений	среднее значение, $\text{k}\Omega/\text{м}^2$	разброс значений
0.560	0.560	$\pm 1.5\%$	0.564	$\pm 7\%$
0.120	0.120	$\pm 10\%$	0.124	$\pm 12\%$

зоны с сопротивлением 0.56 и $0.12 \text{ к}\Omega/\text{м}^2$ и разброс получаемых значений незначительно превышает разброс значений, рассчитанных по цифровому моделированию для тех же значений сопротивлений зон. Результаты расчета средних значений зон и разброс рассчитанных значений сведены в табл. 5.

Заключение

Полученные результаты исследования предложенной методики показывают принципиальную возможность расчета распределения электрического сопротивления из результатов измерения токов на краях токопроводящих слоев.

При практическом применении метода на реальных токопроводящих слоях важное значение приобретают свойства электродов. Для упрощения обработки результатов измерения электроды должны быть одинаковыми и распределены равномерно. Электроды должны также создавать омический контакт с сопротивлением на много раз меньше измеряемого сопротивления на линии соединения электрода источника с электродом приемника.

Разрешающая способность метода оценивается количеством элизов, на которые разделяется изображение исследуемого слоя, т.е. величиной N^2 . Очевидно, что эта величина зависит от количества электродов n . Число элизов определяется из условия, учитывающего то, что через каждый элиз проходило не меньше одной линии, соединяющей источник с приемником. Это условие выполняется, если количество элизов рассчитывается по следующей формуле: $N^2 \leq (n(n-1))/2$.

Точность конечных результатов зависит от точности измерения токов и от точности расчета длии отрезков. Поэтому следует очень аккуратно формировать содержание матриц R , измеренных данных, и длии отрезков D .

И так, предложен способ, дополняющий известные методы определения электрического сопротивления токопроводящих слоев, который может быть использован для визуализации распределения электрического сопротивления при помощи электронной реконструктивной томографии твердого тела.

Автор выражает благодарность научным сотрудникам А. Урбене и В. Филипавичусу за оказанную помощь при выполнении этой работы.

Список литературы

- [1] Павлов Л.П. Методы измерения параметров полупроводниковых материалов. М: Высшая школа, 1987.
- [2] Жилинскас П.Ю., Урбуче А. // Физическая электроника. Каунас, 1987. С. 101.
- [3] Жилинскас П.Ю., Урбуче А. // Физическая электроника. Каунас, 1989. С. 36.
- [4] Хермен Г. Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии. М.: Мир, 1983.

Вильнюсский университет

Поступило в Редакцию
12 марта 1993 г.
