

01

©1994 г.

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО ВРЕМЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРОЦЕССА

Д.А.Грибков, В.В.Грибкова, Ю.А.Кравцов, Ю.И.Кузнецов, А.Г.Ржанов

Рассматриваются принципы восстановления обыкновенных дифференциальных уравнений автостохастических систем по временной реализации одной динамической переменной при наличии аддитивных шумов. Предлагается метод выявления скрытых динамических переменных и построения оптимального базиса для восстановления дифференциальных уравнений в заданном классе. На примере автостохастических систем Лоренца и Ресслера решается задача восстановления дифференциальных уравнений и предсказания на их основе временной эволюции этих систем. Показано, что предложенный метод обеспечивает удовлетворительную предсказуемость на интервалах времени, существенно превышающих характерное время автокорреляции наблюдаемого процесса.

Введение

Решение обратных задач нелинейной динамики относится к числу фундаментальных проблем современной науки. Вопрос о выявлении динамических свойств систем по экспериментальным данным уже давно привлекает внимание исследователей. Например, в работах [1-6] рассмотрены различные аспекты обратных задач нелинейной динамики. Среди этих задач особое значение имеет восстановление дифференциальных уравнений динамической системы по наблюдаемым временным рядам. Привлекают внимание три аспекта решения этой проблемы. Во-первых, восстановление системы дифференциальных уравнений делает возможным предсказание поведения динамической системы на временах, превышающих характерное время автокорреляции исследуемого экспериментального процесса. Другой аспект заключается в возможности сочетать формальную процедуру восстановления дифференциальных уравнений с физическим осмыслением восстановленных переменных и нелинейностей исследуемой системы. Наконец, в-третьих, восстановление системы дифференциальных уравнений позволяет провести имитационный анализ эволюции свойств системы при изменении ее параметров.

Степень сложности решения задачи восстановления дифференциальных уравнений определяется не только типом исследуемой системы и уровнем шумов, но и количеством независимых переменных, доступных наблюдению.

Восстановление дифференциальных уравнений по трем наблюдаемым переменным было осуществлено в работе [6] для ряда систем 3-го порядка. В отличие от [6] мы делаем попытку восстановить дифференциальные уравнения только по одной наблюдаемой переменной. Предлагаемая нами методика позволяет выявлять скрытые переменные динамической системы в форме, удобной для восстановления дифференциальных уравнений в определенном классе.

Целью данной работы являются решение задачи восстановления структуры динамической системы в заданном классе обыкновенных дифференциальных уравнений по одной временной реализации ее динамической переменной и предсказание поведения исследуемой системы в будущем.

Вполне однозначное решение такого рода обратной задачи возможно для некоторых классов динамических систем. Важным фактором является топологическая "уникальность" фазовых траекторий системы. Этому условию удовлетворяют динамические системы с хаосом в силу существования в их фазовом пространстве странного аттрактора того или иного типа. В этом случае фазовая траектория пронизывает обширную часть фазового пространства и поэтому содержит в себе значительно бóльшую информацию о системе по сравнению с регулярными аттракторами типа предельного цикла. Однако если речь идет о предсказании поведения динамической системы, то следует отметить, что для регулярных периодических процессов задача предсказания значительно проще, так как в этом случае время предсказания ограничивается действием внешнего шума, который в ряде случаев можно исключить фильтрацией. Для хаотических систем ситуация значительно сложнее, так как сама система обладает свойством локальной неустойчивости.

О структуре настоящей работы. В разделах 1 и 2 описаны используемые нами методы. В разделе 3 представлены результаты восстановления дифференциальных уравнений двух модельных автостохастических систем 3-го порядка и предсказания их поведения при различных уровнях шума. Наконец, в разделе 4 дается сравнительная оценка возможного времени предсказания, полученного на основе восстановленных дифференциальных уравнений с временем предсказания, вычисленным по методу нелинейной авторегрессии.

Рассмотрим наблюдаемый процесс $y(t)$ как совокупность динамического сигнала $x(t)$ и аддитивного шума $x(t)$, записанных в виде дискретного временного ряда:

$$y_i = x_i + \xi_i,$$

где $i = 1, \dots, N$; $y_i = y(t_i)$; $x_i = x(t_i)$; $\xi = \xi(t_i)$.

Тем самым в настоящей работе мы налагаем существенное ограничение на тип флуктуационных процессов, происходящих в исследуемой системе.

1. Фильтрация шумовой компоненты исследуемого процесса

Для достаточно точного восстановления системы дифференциальных уравнений необходимо выделить из исследуемого процесса чисто динамическую компоненту (если таковая присутствует). В связи с этим особое место при решении задачи восстановления дифференциальных уравнений занимают методы фильтрации шума.

Наряду со спектральными методами фильтрации, получившими широкое распространение, мы используем два других достаточно эффективных, но менее известных метода ликвидации шумовой компоненты процесса, краткое описание которых мы приводим.

Первый из используемых нами способов фильтрации шума базируется на методе, описанном в [7].

Рассмотрим функционал вида:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N [\alpha(x_i - x_{i-1})^2 + \xi_i^2], \quad (1)$$

где α — весовой коэффициент.

Минимум этого функционала достигается при минимальном уровне шума ξ_i и минимальной разности $x_i - x_{i-1}$, т.е. выделяется динамическая компонента процесса с максимальным временем автокорреляции. Из условия минимума функционала (1) получаем линейную систему уравнений:

$$\alpha Dy = \hat{M}(\alpha)\xi, \quad (2)$$

где

$$Dy = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{N-1} - y_N \end{pmatrix}; \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix};$$

$$\hat{M}(\alpha) = \begin{pmatrix} -(1+\alpha) & \alpha & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \alpha & -(1+2\alpha) & \alpha & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & -(1+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha & -(1+\alpha) \end{pmatrix}$$

В результате решения системы (2) находим N отсчетов шумовой компоненты ξ_i . Частично очищенный от шума сигнал определяется выражением

$$y_i^{cor} = y_i - \xi_i. \quad (3)$$

Подставляя y_i^{cor} в систему уравнений (2) и решая ее относительно ξ , с учетом (3) мы находим новое значение y_i^{cor} .

Последовательное n -кратное применение процедуры (2), (3) к наблюдаемому процессу позволяет достаточно хорошо очистить исходный сигнал от аддитивного шума. Выбор фактора α определяется из компромисса между количеством шагов фильтрации и степенью искажения динамической компоненты сигнала при фильтрации.

Второй способ редукции шумовой компоненты, применяемый нами, — это SVD (single value decomposition)-фильтрация с использованием винеровского фильтра для собственных значений ковариационной матрицы [8]. Этот метод удобно применять после описанного выше для уточнения собственных значений и собственных векторов ковариационной матрицы исследуемого процесса (раздел 2). С учетом шума собственные значения ковариационной матрицы записываются в виде

$$\beta_j = \beta_j^x + \beta_j^\xi, \quad (j = 1, \dots, m),$$

где β_j^x — собственные значения в отсутствие шума, β_j^ξ — вклад в собственные значения шумовой компоненты процесса.

Составим проекционную матрицу вида

$$P_{ik} = \sum_{j=1}^m \left(1 - \frac{\beta_j^\xi}{\beta_j}\right) \mu_{ji} \mu_{jk}, \quad (4)$$

где μ_{ji}, μ_{jk} — компоненты собственных векторов ковариационной матрицы.

Следуя [8], для фильтруемого сигнала получим следующее выражение

$$y_i^{cor} = \sum_{k=1}^m y_k \frac{1}{m+1} \sum_{n=i-m}^i P_{i-n, k-n}, \quad (5)$$

где y_i^{cor} стремится к x_i при последовательном применении процедур (4), (5).

2. Методы определения скрытых переменных и восстановления дифференциальных уравнений динамической системы по одной реализации

Предположим, что после фильтрации шумовой компоненты исследуемого процесса мы имеем чисто динамическую составляющую $x(t)$. Следующим шагом в восстановлении дифференциальных уравнений являются 1) определение размерности пространства вложения и построение ортонормированного базиса независимых переменных по методу, изложенному в работе [9]; 2) выявление скрытых динамических переменных, построение оптимального базиса и формы восстановления дифференциальных уравнений.

Рассмотрим общий случай, когда размерность системы равна N . Зададим размерность пространства вложения, равную $n > N$. Выберем n переменных, определяемых по заданной реализации исходного процесса через характерное время дискретизации τ : $x_{1k} = x(t_k)$,

$x_{2k} = x(t_k + \tau), \dots, x_{nk} = x(t_k + n\tau)$. Тем самым мы определяем вектор состояния \mathbf{x}_k динамической системы в момент времени t_k . Собственные векторы \mathbf{S}_i ($i = 1, \dots, n$) ковариационной матрицы \hat{C} определяются из следующей системы однородных уравнений

$$(\hat{C} - \beta_i \hat{E})\mathbf{S}_i = 0,$$

где

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} \mu_{i1} \\ \vdots \\ \mu_{in} \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{kk} = \sum_{j=0}^n x^2(t_k + j\tau), \quad \sigma_{kl} = \sigma_{lk} = \sum_{j=0}^n x(t_k + j\tau)x(t_l + j\tau),$$

$\mu_{i1}, \dots, \mu_{in}$ — координаты i -го собственного вектора, β_i — i -ое собственное значение, \hat{E} — единичная матрица.

Первые N векторов \mathbf{S}_i составляют базис для новых переменных. Переход к ним осуществляется с помощью выражения

$$z_{ik} = \frac{\mathbf{x}_k \mathbf{S}_i}{|\mathbf{S}_i|}.$$

Используя при $\tau \rightarrow 0$ разложение переменных x_{jk} ($j = 2, \dots, n$) в ряд Тейлора, с точностью до $O(\tau^N)$ получим

$$z_{ik} = \sum_{m=1}^N \left[\frac{d^{(m-1)}}{dt_k^{(m-1)}} x_{1k} \right] u_{im}, \quad (6)$$

где $u_{im} = \sum_{j=1}^n c_{imj} \mu_{ij}$ — координаты новых базисных векторов \mathbf{S}'_i , число которых равно размерности системы N ; c_{imj} — константы.

Выберем в качестве новых переменных величины

$$x'_{mk} = \frac{d^{(m-1)}}{dt_k^{(m-1)}} x_{1k}. \quad (7)$$

В соответствии с выражением (6) переход к новым переменным x'_{mk} осуществляется в результате решения следующей системы уравнений

$$\mathbf{X}'_k \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Z}_k, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{X}'_k = \begin{pmatrix} x'_{1k} \\ \vdots \\ x'_{Nk} \end{pmatrix}; \quad \hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N1} & \dots & u_{NN} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} z_{1k} \\ \vdots \\ z_{Nk} \end{pmatrix}.$$

Решение (8) имеет вид

$$\mathbf{X}'_k = \hat{\mathbf{R}}^{-1} \mathbf{Z}_k. \quad (9)$$

Варьируя размерность пространства вложения n , мы изменяем ориентацию векторов \mathbf{S}'_i , что позволяет значительно уменьшить действие шумов и влияние ошибки усечения ряда Тейлора.

Для системы 3-го порядка, используя выражение (9) и выбирая размерность пространства вложения $n \geq 5$, получим

$$x'_{1k} = c_1 z_{1k}, \quad x'_{2k} = c_2 z_{2k}, \quad x'_{3k} = c_3 z_{1k} + c_4 z_{3k},$$

где c_i ($i = 1, \dots, 4$) — константы.

В соответствии с (7) имеем

$$x'_{1k} = \dot{x}_{1k}, \quad x'_{2k} = \dot{x}_{2k}, \quad x'_{3k} = \ddot{x}_{1k}. \quad (10)$$

При восстановлении системы дифференциальных уравнений ограничимся обыкновенными дифференциальными уравнениями с полиномиальными нелинейностями, которые описывают достаточно широкий класс динамических систем. В соответствии с видом выражения для новых переменных (10) будем искать систему уравнений в следующей форме (штрихи и индекс k у новых переменных опущены)

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = \frac{F(x_1, x_2, x_3)}{f(x_i)}, \quad (11)$$

где $F(x_1, x_2, x_3)$ — полином M -й степени от переменных x_1, x_2, x_3 ; $f(x_i)$ — одна из функций вида $1; x_i; x_i^2; x_i x_j; i, j = 1, 2, 3$.

Задача восстановления численных значений коэффициентов функций F и f последнего уравнения системы (11) сводится к поиску минимума функционала

$$\Phi = \sum_{k=1}^N [f_k \dot{x}_{3k} - F_k]^2, \quad (12)$$

где f_k, F_k — значения функций f и F в момент времени t_k .

Из условия минимума функционала (12) мы получим систему линейных уравнений вида

$$\hat{\mathbf{X}}_F^T D \mathbf{x} = \hat{\mathbf{X}}_F^T \hat{\mathbf{X}}_F \mathbf{A}, \quad (13)$$

где

$$D \mathbf{x} = \begin{pmatrix} f_1 \dot{x}_{31} \\ \vdots \\ f_N \dot{x}_{3N} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{X}}_F = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{11}^2 & (x_{11}x_{21}) \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1N} & x_{2N} & x_{3N} & x_{1N}^2 & (x_{1N}x_{2N}) \dots \end{pmatrix},$$

A — вектор коэффициентов полинома F , \hat{X}_F — матрица значений членов полинома F , взятых в моменты времени от t_1 до t_N .

Решая систему (13), найдем значения коэффициентов A_j полинома $F(x_1, x_2, x_3)$ и тем самым определим конкретный вид системы уравнений (11).

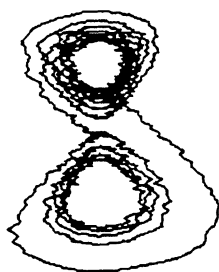
3. Численный пример восстановления дифференциальных уравнений и предсказание временной эволюции автостохастических систем

Численный эксперимент проводился на примере двух известных автостохастических систем, исходные уравнения которых имеют следующий вид: система Лоренца

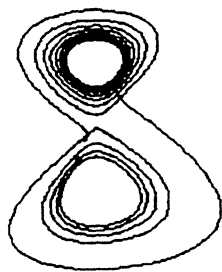
$$\dot{x} = -\sigma(x - y), \quad \dot{y} = \tau x - yxz, \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (14)$$

система Ресслера

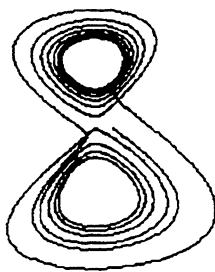
$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = a + (x - c)z. \quad (15)$$



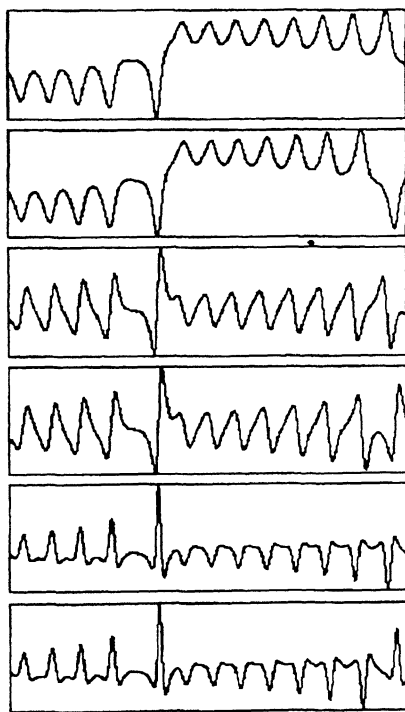
a)



b)



c)



a)

b)

c)

d)

e)

f)

Рис. 1. Фазовые траектории системы Лоренца.

a — исходная до фильтрации шумовой компоненты (шум 1%), b — после фильтрации, c — после интегрирования восстановленных дифференциальных уравнений.

Рис. 2. Временные реализации системы Лоренца.

a, b — исходная отфильтрованная и предсказанная реализации переменной $x(t)$; c, d — то же для первой производной $\dot{x}(t)$; e, f — то же для второй производной $\ddot{x}(t)$.

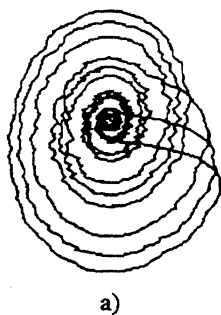
Параметры систем были выбраны следующими: $\sigma = 10$, $r = 45$, $b = 8/3$, $a = 0.2$, $c = 10$. При восстановлении системы Лоренца использовалась временная реализация переменной $x(t)$ длиной в 5000 точек, полученная при шаге интегрирования 10^{-2} . Для системы Ресслера использовалась реализация переменной $y(t)$ длиной также в 5000 точек, полученная с шагом $5 \cdot 10^{-2}$. Интегрирование систем (14), (15) осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. К каждой из реализаций добавлялся широкополосный шум вида

$$\xi(t) = A_0 \cdot \delta(t) \cdot \cos(p(t)),$$

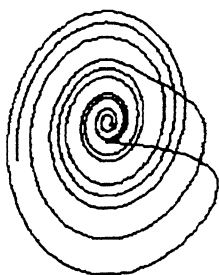
где $\delta(t)$ и $p(t)$ — случайные величины, нормально распределенные в интервалах от 0 до 1 и от 0 до 2π соответственно.

Дифференциальные уравнения для каждой из систем восстанавливались в виде (11).

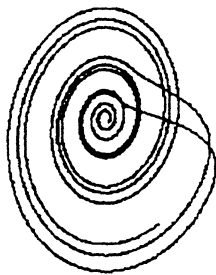
Результаты численного эксперимента показали следующее. После фильтрации аддитивного шума с относительной среднеквадратичной амплитудой в 1% относительная ошибка найденных значений коэффициентов при нелинейностях составляет в среднем 0.02% для каждой из исследуемых систем. При уровне шума в 40% ошибка возрастает до 1-5%.



a)



b)



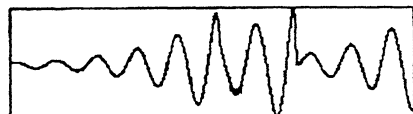
c)



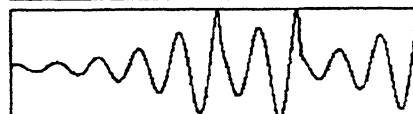
a)



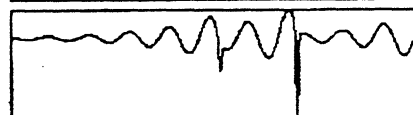
b)



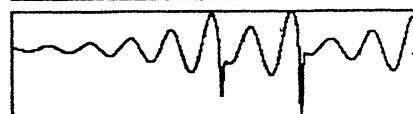
c)



d)



e)



f)

Рис. 3. Фазовые траектории системы Ресслера.

a-c — то же, что и на рис. 1.

Рис. 4. Временные реализации системы Ресслера.

a-f — то же, что и на рис. 2.

На рис. 1 и 3 показаны фазовые траектории систем Лоренца и Ресслера соответственно: *a* — траектория без фильтрации шумовой компоненты (уровень шума 1%); *b* — траектория, полученная после 10-кратной фильтрации по методу (2) и 2-кратной по методу (4), (5); *c* — траектория, полученная в результате интегрирования восстановленных дифференциальных уравнений.

На рис. 2 и 4 приведены результаты предсказания временной эволюции динамических переменных систем Лоренца и Ресслера соответственно: *a* — временная реализация исходной динамической переменной после фильтрации шума; *b* — временная реализация динамической переменной, полученная после интегрирования восстановленной системы дифференциальных уравнений с начальными данными, соответствующими исходной реализации.

На рис. 2 и 4, *c-f* приведены временные реализации первых двух производных предсказываемой и восстановленной переменных.

Из проведенного анализа следует, что восстановленные системы не только топологически эквивалентны исходным, но и локально описывают поведение фазовой траектории. Следует также отметить, что восстановленные уравнения глобально устойчивы, т.е. удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x_i} < 0.$$

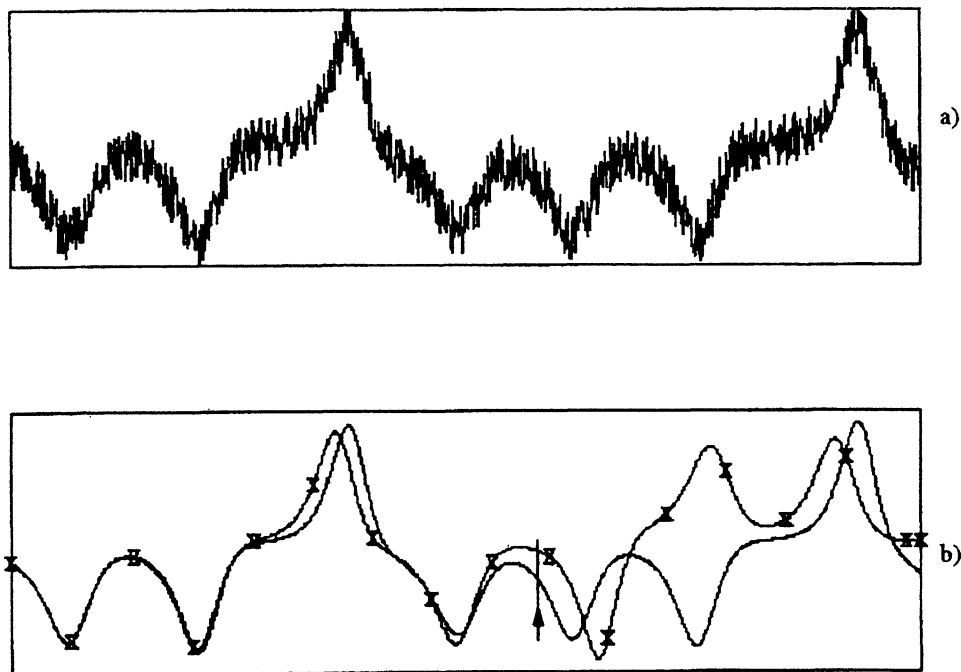


Рис. 5.

a — реализация переменной $x(t)$ системы Лоренца с шумом 40%; *b* — результат предсказания переменной $x(t)$ системы Лоренца по восстановленным уравнениям: сплошная линия — реализация после фильтрации; линия со значками — результат интегрирования восстановленных уравнений.

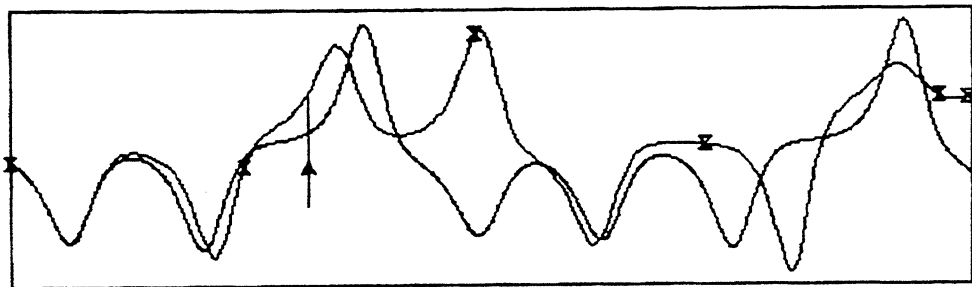


Рис. 6. Результат предсказания переменной $x(t)$ системы Лоренца (шум 40%) по авторегрессионному алгоритму.

Указанные факторы являются критерием качества восстановления уравнений для любой динамической системы.

На рис. 5, *a-b* показан результат фильтрации фазовой траектории системы Лоренца при уровне шума в 40%. Была применена 150-кратная фильтрация по методу (2) и 2-кратная по методу (4), (5). На рис. 6, *a* показана исходная реализация переменной x системы Лоренца при уровне шума в 40%, на рис. 6, *b* приведен результат предсказания временной эволюции переменной x после фильтрации шума. Сплошной линией показана временная реализация переменной x после фильтрации. Линией с маркерами отмечена реализация той же переменной, полученная после интегрирования восстановленной системы дифференциальных уравнений. Стрелкой отмечено время, которое соответствует ошибке предсказания не более 20% по амплитуде. Это время больше характерного времени автокорреляции наблюдаемого процесса, что соответствует [10].

4. Сравнительный анализ времени предсказания, полученного на основе восстановленных дифференциальных уравнений и при использовании метода нелинейной авторегрессии

Исследования показали, что при достаточно малых уровнях шума (не более 5% по амплитуде) время предсказания эволюции автостochasticкой системы при заданной ошибке предсказания в 5–10 раз превышает аналогичное время, полученное на основе метода нелинейной авторегрессии, и более чем в 10 раз характерное время автокорреляции исследуемого процесса. При больших уровнях шума (от 20% и выше) время предсказания существенно уменьшается и превышает время предсказания, полученное на основе метода нелинейной авторегрессии в лучшем случае в 2 раза. На рис. 6 приведен результат предсказания временной эволюции системы Лоренца по переменной x , полученный при уровне шума в 40%, с помощью авторегрессионной формулы

$$x_{n+1} = g(x_n, \dots, x_{n-l}), \quad (16)$$

где $g(x_n, \dots, x_{n-l})$ — полином m -й степени от переменных X_n, \dots, x_{n-l} .

Для представленного на рис. 6 случая $m = 4, l = 3$. При сравнении рис. 6 с рис. 5, *b* видно, что время предсказания, полученное на

основе интегрирования восстановленных дифференциальных уравнений, почти в 2 раза превышает время предсказания, полученное по авторегрессионному алгоритму (16).

Следует отметить, что при больших уровнях шума многократная фильтрация по методу (2) приводит к искажению исходного сигнала, что в свою очередь вносит ошибку в определение коэффициентов дифференциальных уравнений и тем самым меняет поведение динамической системы. Поскольку характерное время τ_c расщепления корреляций для автостохастических систем 3-го порядка обратно пропорционально максимальному ляпуновскому показателю λ^+ , то можно показать, что для точно восстановленных дифференциальных уравнений выполняется соотношение вида [10]

$$\tau_{pred} \sim \tau_c \ln \left(\frac{\langle y_s^2 \rangle}{\sigma_\xi^2} \right),$$

где τ_{pred} — время предсказания, $\langle y_s^2 \rangle$ — характерный размер аттрактора, σ_ξ^2 — квадрат дисперсии шума.

При искажении сигнала после фильтрации шума коэффициенты при нелинейностях определяются с ошибками, которые приводят к отклонению λ^+ от истинного значения. Если учесть, что $\lambda^+ = \lambda(A_1, \dots, A_m)$, где A_i — коэффициенты системы дифференциальных уравнений, то максимальное отклонение $\Delta\lambda^+$ от истинного значения λ^+ определяется выражением

$$\Delta\lambda^+ = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} \right| \delta A_i,$$

и время предсказания при наличии аддитивных шумов можно оценить следующим образом

$$\tau_{pr} \sim \frac{\tau_c}{1 + \tau_c \sum_{n=1}^n \left| \frac{\partial \lambda}{\partial A_i} \right| \delta A_i} \ln \left(\frac{\langle y_s^2 \rangle}{\sigma_\xi^2} \right).$$

Варьируя коэффициенты A_i восстановленной системы, можно значительно увеличить время предсказания даже при больших уровнях аддитивного шума. Для авторегрессионных методов этот подход неприменим в силу присутствия дополнительных, несуществующих в реальной системе нелинейностей. Поэтому нелинейная авторегрессия дает практически одно и то же время предсказания для процесса без шума и для процесса после фильтрации шума. Также следует отметить, что при авторегрессионном подходе невозможен имитационный анализ процессов в системе.

Заключение

В настоящей работе предложены принципы и показана возможность восстановления в заданном классе дифференциальных уравнений динамической системы по временной реализации одной переменной при

наличии аддитивных шумов. Установлено, что время предсказания временной эволюции автостохастической системы в присутствии шума, полученное на основе восстановленных дифференциальных уравнений, превышает время предсказания, найденное стандартным методом нелинейной авторегрессии.

Авторы выражают благодарность О.Я.Бутковскому, О.Л.Аносову и Дж.Б.Кадтке за помощь и полезные дискуссии.

Список литературы

- [1] *Неймарк Ю.И.* и др. Распознавание образов и медицинская диагностика. М.: Наука, 1972.
- [2] *Landa P., Rosenblum M.* // Physica D. 1991. Vol. 48. P. 232.
- [3] *Klimontovich Yu.L.* // Preprint IPCM-92-9E. Lviv, 1992.
- [4] *Breeden J., Hubler A.* // Phys. Rev. A. 1990. Vol. 42. N 10. P. 5817.
- [5] *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А.* // ПЭ. 1992. Т. 37. № 3. С. 467.
- [6] *Brush J.S., Kadtko J.B.* // Proc. ICASSP-92. San Francisco, 1992. P. 321-325.
- [7] *Teodorescu D.* // Int. J. Control. 1989. Vol. 50. N 5. P. 1577.
- [8] *Grassberger P., Hegger R., Kantz H. et al.* // Preprint Phys. Depart. Univ. of Wuppertal. Germany, 1992.
- [9] *Broomhead D.S., King G.P.* // Physica D. 1986. Vol. 20. N 2. P. 217.
- [10] *Кравцов Ю.А.* // УФН. 1989. Т. 158. № 5. С. 93.

Московский университет
им. М.В.Ломоносова

Поступило в Редакцию
14 июля 1993 г.