

01;05
©1994 г.

ПРОНИКНОВЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТОКА В СВЕРХПРОВОДНИКИ В АНОМАЛЬНОМ ПРЕДЕЛЕ

А.И. Спицын

На основе точного интегрального ядра по микроскопической теории проанализирован нелокальный предельный переход для случая сверхпроводников с зеркальным отражением электронов от границы. Получены аналитические соотношения для предельных нелокальных распределений поля и плотности тока в различных видах, в том числе и в виде рядов. Проведен детальный анализ полученных распределений, в частности найдено, что на поверхности сверхпроводника производная плотности тока по нормальной к границе координате обращается в нуль. Для нулевой температуры рассчитан случай сверхпроводников в нелокальном пределе в переменном электромагнитном поле вплоть до частоты щели.

Электромагнитный отклик в сверхпроводниках на внешнее магнитное поле на основе микроскопической теории рассмотрен и вычислялся в ряде работ [1-4]. Однако конкретные вычисления, используемые при нахождении распределения магнитного поля и плотности тока внутри сверхпроводников, требуют громоздкого машинного счета. В настоящей работе на основе соотношения для точного интегрального ядра по микроскопической теории найдены строгие аналитические решения для распределения магнитного поля и плотности тока в массивных сверхпроводниках в аномальном пределе при зеркальном отражении электронов от поверхности. Найденные решения приводятся в различных представлениях. Рассмотрен также случай сверхпроводников при нулевой температуре $T = 0$ и не равной нулю частоте ω внешнего электромагнитного поля.

Связь плотности тока $j(z)$ в какой-либо точке z внутри сверхпроводника с векторным потенциалом $A(z)$ в окружающем пространстве для случая плоской границы задается интегральным соотношением

$$j(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega(|z - z'|) A(z') dz',$$

где Ω — интегральное ядро, зависящее от модуля аргумента, а координата z отсчитывается по нормали от поверхности в глубь сверхпроводника.

Распределение векторного потенциала $A(z)$, выраженное через фурье-преобразование ядра $\Omega(k)$, для зеркального отражения электронов от границы находится непосредственно из решения уравнений Максвелла и представляется в виде ($A \parallel x, H \parallel y$)

$$A(z) = -\frac{2\mu_0 H(0)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kz}{k^2 + \mu_0 \Omega(k)} dk, \quad (1)$$

где $H(0)$ — магнитное поле на поверхности сверхпроводника, μ_0 — диэлектрическая постоянная вакуума.

Фурье-образ интегрального ядра $\Omega(k)$ для статического случая возьмем в форме, приведенной в работах [1,5], и для удобства в дальнейшем представим в виде

$$\mu_0 \Omega(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n(T, l)} h[k\xi_n(T, l)]; \quad \xi_n^{-1}(T, l) = \xi_n^{-1}(T, \infty) + l^{-1},$$

$$\frac{1}{\Lambda_n(T, l)} = \frac{2a\xi_n(T, l)}{\lambda_L^2(0, \infty)[1 + (2n+1)^2 a^2]^{3/2} \xi_n(T, \infty)}; \quad a = \frac{\pi k_B T}{\Delta(T)},$$

$$\xi_n(T, \infty) = \frac{\hbar V_F}{2\Delta(T)\sqrt{1 + (2n+1)^2 a^2}}; \quad h(z) = \frac{3}{2z^3} [(1+z^2) \operatorname{arctg} z - z]. \quad (2)$$

В этих соотношениях приняты следующие обозначения: l — средняя длина свободного пробега электронов; $\Delta(T)$ — температурно-зависимая величина энергетической щели сверхпроводника, рассчитанная в [6]; $\lambda_L(0, \infty)$ — лондоновская глубина проникновения при значениях $T = 0$ и $l = \infty$; k_B — постоянная Больцмана; \hbar — постоянная планка, V_F — скорость электронов на поверхности Ферми.

Следуя Халбриггеру [1], под длиной когерентности ξ_F будем понимать величину ξ_n при значении индекса n , равного нулю,

$$\xi_F^{-1}(T, l) = \xi_F^{-1}(T, \infty) + l^{-1}. \quad (3)$$

Эта величина определяет “радиус действия” функции Грина и убывание первого члена разложения в ряд интегрального ядра в реальном пространстве $\Omega(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi_n)$. Она связана с длиной когерентности по БКШ соотношением

$$\xi_F(0, \infty) = \frac{\pi}{2} \xi_{\text{БКШ}}.$$

Параметр лондоновской глубины проникновения $\lambda_L(T, l)$ определяется значением ядра Ω при $k = 0$

$$\frac{1}{\lambda_L^2(T, l)} = \mu_0 \Omega(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n(T, l)}. \quad (4)$$

Для более четкого понимания предельных переходов рассмотрим отдельно локальный и нелокальный пределы. В соотношении (1) заменим переменную на $u = k\lambda_L$, тогда (1) переписывается в виде

$$A(W) = \frac{-2\mu_0 H(0)}{\pi} \lambda_L \int_0^{\infty} \left[u^2 + \lambda_L^2 \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda_n^{-1} h\left(u \frac{\xi_n}{\lambda_L}\right) \right]^{-1} \cos(Wu) du, \quad (5)$$

где $W = z/\lambda_L$.

Отношение ξ_n/λ_L представим в виде

$$\gamma^{-1}(T, l) \beta_n \left(1 + \xi_F(T, \infty)/l\right) \left(1 + \beta_n \xi_F(T, \infty)/l\right)^{-1},$$

где

$$\gamma(T, l) = \lambda_L(T, l)/\xi_F(T, l), \quad \beta_n = \left[(1 + a^2) / (1 + (2n + 1)^2 a^2) \right]^{1/2}.$$

Рассматривая интеграл в соотношении (5) как функцию параметра γ , при фиксированных значениях T и W перейдем к пределу $\gamma^{-1} \rightarrow 0$. Предельный переход возможен под знаком интеграла и с учетом соотношения (4), и $h(0) = 1$ приводит к значению интеграла $\int_0^{\infty} (u^2 + 1)^{-1} \times \cos(Wu) du = \pi \exp(-W)/2$. Предельное распределение поля, которое получается при таком предельном переходе, соответствует экспоненциальному затуханию $A(z) = -\mu_0 H(0) \exp(-z/\lambda_L)$, что эквивалентно локальной связи поля и тока. Параметр λ_L в этом случае представляет глубину проникновения магнитного поля $\lambda = [H(0)]^{-1} \int_0^{\infty} H(z) dz$.

Стремление величины $\gamma^{-1} \rightarrow 0$ в рассматриваемом случае эквивалентно стремлению $\xi_F \rightarrow 0$ при произвольном, но фиксированном значении глубины проникновения λ_L .

Перейдем к рассмотрению противоположного случая. В интеграле (1) сделаем замену переменной $u = k\tilde{\lambda}$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_L^2 \xi_F)^{1/3}$, и подынтегральное выражение представим в виде

$$\tilde{\lambda} u \cos(\tilde{W}u) \left[u^3 + \tilde{\lambda}^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n(T, \infty) \xi_n(T, \infty)} \tilde{h}\left(k \frac{\xi_n}{\tilde{\lambda}}\right) \right]^{-1},$$

где $\tilde{W} = z/\tilde{\lambda}$, а функция $\tilde{h}(z) = zh(z)$ определена и непрерывна в точке $z = +\infty$ и принимает значение $3\pi/4$.

Отношение величин $\tilde{\lambda}(T, l)/\xi_F(T, l) = \gamma^{2/3}$. Сделаем предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ при фиксированном $\tilde{W} = z/\tilde{\lambda}$. Так как величина $\tilde{\lambda}$ пропорциональна глубине проникновения в нелокальном пределе (см., например, [7]), то этот предельный переход, как и в первом случае, соответствует фиксированному значению глубины проникновения и $\xi_F \rightarrow \infty$. По общим теоремам анализа [8] такой предельный переход

возможен под знаком интеграла и предельное распределение поля, получающееся при этом, назовем предельным нелокальным распределением. Рассмотренный предел соответствует случаю, проанализированному в работе [3], где найдены поверхностные сопротивления и реактанс в данном пределе. В результате предельного перехода получим

$$A(\tilde{W}) = -\frac{2\mu_0 H(0)}{\pi} \tilde{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{u \cos(\tilde{W}u) du}{u^3 + \tilde{\lambda}^3 c^3},$$

где

$$c^3 = \frac{3\pi}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n(T, \infty) \xi_n(T, \infty)}.$$

После замены переменной $v = u/(c\tilde{\lambda})$ для предельного нелокального распределения найдем

$$A(W) = -\frac{2\mu_0 H(0)}{\pi c} \int_0^{\infty} \frac{v \cos(Wv) dv}{v^3 + 1}, \quad (6)$$

где $W = cz$.

Подставляя в выражение для c величины $\Lambda_n(T, \infty)$ и $\xi_n(T, \infty)$ из (2), найдем для него простое соотношение

$$c^3 = \frac{3\pi^2}{8} \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \operatorname{th} \left[\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right] [\lambda_L^2(0, \infty) \xi_F(0, \infty)]^{-1}.$$

При вычислении величины c использовалась формула для свертки суммы по n , приведенная в [9, с. 688].

Глубина проникновения статического магнитного поля $\lambda = -A(0)/(\mu_0 \dot{H}(0))$ в рассматриваемом пределе получается непосредственно из соотношения (6), если учесть значение интеграла

$$\int_0^{\infty} (v^3 + 1)^{-1} v dv = 2\pi \cdot 3^{-3/2}$$

$$\lambda = \frac{4}{3\sqrt{3}c} = \left[\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} \operatorname{cth} \frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right]^{1/3} \lambda(0, \infty), \quad (7)$$

где $\lambda(0, \infty)$ — глубина проникновения при нулевой температуре и длине свободного пробега $l = \infty$, равная $\lambda(0, \infty) = 8 \cdot 3^{-11/6} \pi^{-2/3} \times [\lambda_L^2(0, \infty) \xi_F(0, \infty)]^{1/3}$.

Для T , близких к нулю, соотношение (7) сводится к соотношению, приведенному в работе [1],

$$\lambda(T)/\lambda(0, \infty) - 1 = \frac{2}{3} \exp[-\Delta(0)/k_B T].$$

Отметим, что в рассматриваемом пределе коэффициенты C и глубины проникновения $\lambda(T)$ не зависят от величины свободного пробега l [10].

Интеграл, стоящий в (6), можно взять в терминах специальных функций. Для этого коэффициент перед $\cos(Wv)$ представляется в виде разложения на простые дроби

$$v(v^3 + 1)^{-1} = -\frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 \frac{1}{v_s(v + v_s)},$$

где v_s — корни уравнения $v_s^3 = 1$ в комплексной плоскости (v)

$$v_s = \left(1, \exp\left(\pm i \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

и используются значения интегралов [9, с. 392], записанные в виде

$$\int_0^{\infty} (v + v_s)^{-1} \cos(Wv) dv = \frac{1}{2} \left[e^{iWv_s} E_1(iWv_s) + e^{-iWv_s} E_1(-iWv_s) \right],$$

где $\arg v_s$ в комплексной плоскости (v) должен выбираться в пределах $|\arg v_s| < \pi$, i — мнимая единица, $E_1(z) = \int_z^{\infty} t^{-1} \exp(-t) dt$ — интегральная показательная функция [11].

В результате соотношение для векторного потенциала находится в виде

$$A(W) = -\frac{1}{6} B \sum_{s=1}^3 \frac{1}{v_s} \left[e^{iWv_s} E_1(iWv_s) + e^{-iWv_s} E_1(-iWv_s) \right], \quad (8)$$

где $B = -2(\pi c)^{-1} \mu_0 H(0)$.

Аргументы чисел $(\pm iWv_s)$ для части v_s выходят за пределы $(-\pi, +\pi)$. Если выделить главные значения функций $E_1(z)$, определяемые условием $|\arg z| < \pi$, то соотношение (8) с учетом $|\arg v_s| < \pi$ можно переписать в виде

$$A(W) = B \left\{ \frac{2\pi}{3} e^{-\frac{W\sqrt{3}}{2}} \cos\left(\frac{W}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{6} \sum_{s=1}^3 v_s^{-1} \left[E_1(iWv_s) e^{iWv_s} + E_1(-iWv_s) e^{-iWv_s} \right] \right\}. \quad (9)$$

Значения $E_1(z)$ ($|\arg z| < \pi$) как функции комплексного переменного затабулированы, например, в [11]. Первый член в соотношении (9) представляет вклад от полюсов знаменателя в (6) и соответственно вклады от предельных положений полюсов знаменателя при $\gamma \rightarrow 0$ в

общем соотношении (1). Этот вклад выделяется при замене в числителе (6)

$$\cos(Wv) = \frac{1}{2} \left[\exp(iWv_s) + \exp(-iWv_s) \right]$$

изменением переменной интегрирования на iv и переходе к интегрированию по действительной оси с учетом полюсов по теореме о вычетах. По формулам

$$H = \mu_0^{-1} \frac{\partial A}{\partial z}, \quad j = -\mu_0^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

можно получить соответствующие соотношения для магнитного поля и плотности тока. Каждое дифференцирование по z , например, соотношения (9) при этом сводится к умножению всего соотношения на $(-c)$, изменению фазы аргумента косинуса на $-(\pi/6)$, умножению каждого члена суммы на iv_s и изменению знака перед $\exp(iWv_s)$.

Решение (8) можно представить в виде ряда, удобного для анализа полей и токов вблизи поверхности. Подставляя в (8) разложения в ряды функций $E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n!n)^{-1} z^n$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} z^n$ ($\gamma = 0.5772$ — постоянная Эйлера) [11] и проводя суммирование по s с учетом

$$\frac{1}{3} \sum_{s=1}^3 v_s^n = \begin{cases} 1 & n = 3m, \\ 0 & n \neq 3m, (m = 0, \pm 1, \dots), \end{cases}$$

получим

$$A(W) = B \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{W^{6l}}{(6l)!} - \frac{\pi}{2} \frac{W^{6l+1}}{(6l+1)!} + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \frac{W^{6l+2}}{(6l+2)!} + \frac{W^{6l+4}}{(6l+4)!} \left(\ln W + \gamma - \sum_{k=1}^{6l+4} \frac{1}{k} \right) \right]. \quad (10)$$

Суммирование по s от произведений первых двух членов разложения $E_1(z)$ в ряд $-\gamma$ и $-\ln z = -(\ln |z| + i \arg z)$ на степени экспоненты проводится довольно просто; при суммировании произведений остальных членов разложения $E_1(z)$ на степени экспоненты получается промежуточная двойная сумма

$$\sum_{n=0, k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k} W^{6l+4}}{n! k! k},$$

где $n + k = 6l + 4$, $l = 0, 1, 2, \dots$, которая с помощью соотношения

$$\sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{(p-k)! k! k} = \frac{-1}{p!} \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^k}{(p-k)! k! k} = \frac{-1}{p!} \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$$

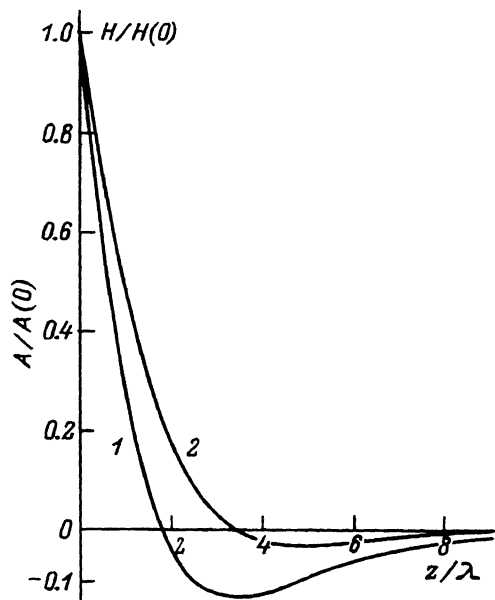


Рис. 1.

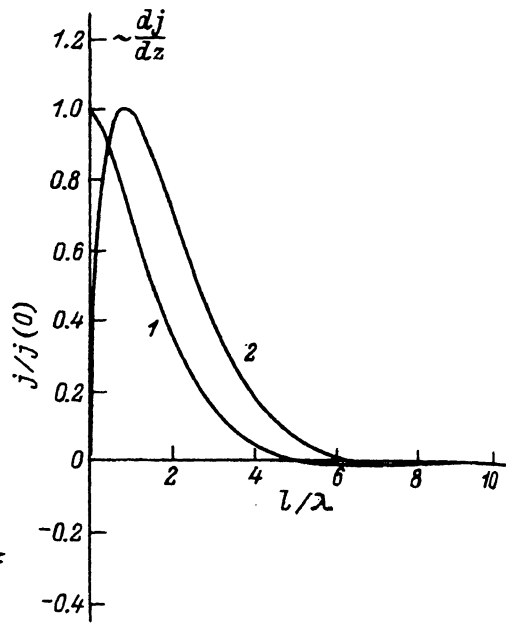


Рис. 2.

[⁹, с. 612] приводится к части последнего члена в (10). Ряд (10) и получающиеся почленным дифференцированием ряды для $H(w)$ и $j(W)$ сходятся для всех значений $W > 0$. Для расчетов удобна и другая форма представления решения, получающаяся из (8), если при суммировании по индексу s при перемножении членов $-\nu$ и $-\ln z$ оставить неизменной экспоненту

$$A(W) = B \left[\frac{1}{3}(\nu + \ln W) \sum_{s=1}^3 \frac{\cos(Wv_s)}{v_s} - \frac{\pi}{6} \sum_{s=1}^3 \frac{\sin(Wv_s)}{v_s} + \frac{i}{3} \sum_{s=1}^3 \frac{\arg v_s \cos(Wv_s)}{v_s} - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\sum_{k=1}^{6l+4} \frac{1}{k} \right) \frac{W^{6l+4}}{(6l+4)!} \right]. \quad (11)$$

На основе приведенных соотношений (8)–(11) на рис. 1 и 2 построены зависимости величин $A(z/\lambda)/A(0)$ (рис. 1, кривая 1) $H(z/\lambda)/H(0)$ (кривая 2) и $j(z/\lambda)/j(0)$ (кривая 1 на рис. 2), верные при всех температурах, для которых выполняются условия предельного перехода. Из всех трех графиков следует обращение знака соответствующей величины на определенной глубине. Точки z_0 , где обращаются в нуль эти величины, равны соответственно $z_{A0}/\lambda = 1.81$, $z_{H0}/\lambda = 3.41$, $z_{j0}/\lambda = 4.93$, а точки, где эти величины достигают минимума, $z_{A \min}/\lambda = 3.41$, $z_{H \min}/\lambda = 4.93$, $z_{j \min}/\lambda = 6.40$ при значениях соответственно 13.4, 3.2 и 1.5% от значений этих величин на границе сверхпроводника. Если представить $z_{0 \min}/\lambda_L$ как функции γ , то эти зависимости превосходно согласуются с предельными зависимостями и величинами, приведенными в [1] (рис. 2 и 3) для различных температур и полученными на основе использования трудоемкого машинного счета.

Проанализируем предельное нелокальное распределение плотности электрического тока вблизи границы сверхпроводника. Для этого воспользуемся разложением (10) и соотношением

$$j = -\mu_0^{-1} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0^{-1} c^2 \frac{\partial^2 A}{\partial W^2}.$$

Выделяя четыре первых члена разложения (10) при $l = 0$ и дифференцируя дважды по W , получим соотношение для величины плотности тока у границы

$$j(W) \approx -\mu_0^{-1} B c^2 \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3} + \frac{W^2}{2} (\ln W + \gamma - \frac{3}{2})} \right].$$

Из этого соотношения видно следующее. Первая производная

$$\frac{dj}{dz} \sim W (\ln W + \gamma - 1)$$

в нелокальном пределе на поверхности сверхпроводника обращается в нуль, в то время как вторая производная

$$\frac{\partial^2 j}{\partial z^2} \sim \ln W + \gamma$$

при этом обращается в бесконечность. Таким образом, в нелокальном пределе величина плотности тока удовлетворяет специфическим условиям $j|_{z=\infty} = 0$, $\partial j / \partial z|_{z=0} = 0$, что является следствием чисто нелокального влияния. Зависимость величины, пропорциональной dj/dz , выбранной таким образом, чтобы в максимуме она обращалась в единицу, от z/λ приведена на рис. 2 (кривая 2). Эта зависимость по сравнению с предыдущей имеет дополнительный максимум, положение которого приближенно определяется из условия

$$\frac{d^2 j}{dz^2} \sim \ln W + \gamma = 0, \quad W_{\max} \approx \exp(-\gamma).$$

Подстановкой в соотношение (8) асимптотического разложения функции

$$E_1(z) \sim z^{-1} e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{z^n} \quad [11]$$

и суммированием по индексу z находим асимптотическое разложение векторного потенциала

$$A(W) \sim -B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(6k+1)!}{W^{6k+2}}. \quad (12)$$

Соответствующие разложения для величин H и j получаются однократным и двукратным дифференцированием соотношения (12) по

координате z . На расстоянии $z/\lambda \approx 13$ отклонение суммы в (9) от первого члена асимптотического разложения (12) составляет $\sim 0.4\%$, для магнитного поля и плотности тока соответственно 1.3 и 3.5 %.

Распределение магнитного поля для приближения пиппардовского ядра рассчитывалось Дрангейтом и Соммерхалдером [12] в связи с изменением знака магнитного поля, а расчет для точного микроскопического ядра для конкретного значения $\gamma = 0.007$ и $T = 0.5 T_c$ выполнен в [1]. Сравнение этих расчетных данных, приведенных графически, с вышеприведенными результатами по распределению статического магнитного поля выявляет совпадение в пределах $\sim 10\%$ вплоть до значений $z/\lambda \sim 11 - 12$. На больших расстояниях от границы сверхпроводника $z \gg \xi_F$ для конечного значения γ затухание поля отклоняется от асимптотики (12) и становится $\sim \exp(-z/\xi_F)$.

Вышеприведенное рассмотрение расширяется на случай сверхпроводника в переменном электромагнитном поле при нулевой температуре. Основываясь на соотношении для фурье-образа точного интегрального ядра по микроскопической теории в форме, данной Халбриттером [5], путем несложных преобразований соотношение для него при $T = 0$ можно привести к виду (суммирование по n при $a \rightarrow 0$ при этом заменяется на интегрирование)

$$\mu_0 \Omega(k) = \frac{1}{2k [\tilde{\lambda}(0, \infty)]^3} \operatorname{Re} \int_{i\bar{\omega}/2}^{i\bar{\omega}/2 + \infty} \left[1 + \frac{1 - (x^2 + \bar{\omega}^2/4)}{\sqrt{[x^2 + (1 + \bar{\omega}/2)^2] [x^2 + (1 - \bar{\omega}/2)^2]}} \right] \times$$

$$\times \tilde{h}[k\xi(x, \bar{\omega}, l)] dx; \quad \xi^{-1}(x, \bar{\omega}, l) = l^{-1} + \xi^{-1}(x, \bar{\omega}, \infty), \quad (13)$$

$$\xi(x, \bar{\omega}, \infty) = \frac{2\xi_F(0, \infty)}{\sqrt{1 + (x + i\frac{\bar{\omega}}{2})^2} + \sqrt{1 + (x - i\frac{\bar{\omega}}{2})^2}}, \quad (14)$$

где $\bar{\omega} = \hbar\omega/\Delta(0) < 2$, $\xi_F(0, \infty)$, $\tilde{\lambda}(0, \infty)$, $\tilde{h}(z) = zh(z)$ — величины, определенные ранее.

Если подынтегральное выражение ядра (13) рассматривать как функцию комплексного переменного x , то вследствие ее аналитичности в правой полуплоскости $\operatorname{Re} x > 0$ и убывания $\sim 1/x^2$ при больших значениях x интегрирование можно проводить по части мнимой оси от $i\bar{\omega}/2$ до 0 и по действительной в пределах от 0 до ∞ . Для случая $\bar{\omega} < 1$ интегральное ядро получается из соотношения (13) просто заменой пределов интегрирования от 0 до 1. Аналогично предыдущей процедуре предельного перехода при $\gamma \rightarrow 0$ для случая $\bar{\omega} < 1$ получаем в результате то же самое соотношение (6), но формула для коэффициента c имеет вид

$$c^3(\bar{\omega}) = \frac{3\pi}{8 [\tilde{\lambda}(0, \infty)]^3} \int_0^{\infty} \left[1 + \frac{1 - (x^2 + \frac{\bar{\omega}^2}{4})}{\sqrt{[x^2 + (1 + \frac{\bar{\omega}}{2})^2] [x^2 + (1 - \frac{\bar{\omega}}{2})^2]}} \right] dx. \quad (15)$$

Отношение величин $\alpha = [c(\bar{\omega})/c(0)]^3$, а значит, и отношение кубов глубин проникновения $[\lambda(0)/\lambda(\bar{\omega})]^3$ будет равно интегралу в правой части (15), деленному на π . Этот интеграл выражается через полные эллиптические интегралы I и II рода $K(k)$ и $E(k)$ [13]

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{\bar{\omega}}{2}\right) K(k) + \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right) E(k) \right] = \frac{2}{\pi(1+k_1)} [k_1 K(k) + E(k)], \quad (16)$$

где аргумент эллиптических интегралов $k = \sqrt{2\bar{\omega}/(1+\bar{\omega}/2)}$, а $k_1 = \sqrt{1-k^2} = (2-\bar{\omega})/(2+\bar{\omega})$.

Подставляя в (16) разложение по k эллиптических интегралов $K(k)$ и $E(k)$ до k^8 включительно [13], найдем для α с точностью до ω^6 соотношение

$$\alpha = 1 - 2^{-4}\bar{\omega}^2 - 3 \cdot 2^{-10}\bar{\omega}^4. \quad (17)$$

Отличие величины α , вычисленной по данному соотношению, от данных точного счета по формуле (16) составляет не более 0.3% в пределах изменения $\bar{\omega}$ от 0 до 1.

При значениях частоты $1 < \bar{\omega} < 2$ в ядро (13) вносит вклад интегрирование и по части мнимой оси в пределах

$$i\bar{\omega}/2 - i\left(1 - \frac{\bar{\omega}}{2}\right).$$

С учетом замены переменной в интеграле (14) на $y = -ix$ и с учетом выбора ветвей корней

$$\left| \arg \sqrt{x^2 + \left(1 \pm \frac{\bar{\omega}}{2}\right)^2} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} x > 0$$

в результате предельного перехода $\gamma \rightarrow 0$ в соотношении для c^3 появляется дополнительный член, который можно представить в виде

$$-\frac{3\pi}{8[\tilde{\lambda}(0, \infty)]^3} \int_{1-\bar{\omega}/2}^{\bar{\omega}/2} \frac{1+y^2 - \frac{1}{4}\bar{\omega}^2}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right)^2 - y^2\right] \left[y^2 - \left(1 - \frac{\bar{\omega}}{2}\right)^2\right]}} dy.$$

Интеграл в пределах от $1 - \bar{\omega}/2$ до $\bar{\omega}/2$ в этом соотношении берется через неполные эллиптические интегралы $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, и окончательно при $1 < \bar{\omega} < 2$ для величины $\alpha(\bar{\omega})$ получим

$$\alpha(\bar{\omega}) = \frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{\bar{\omega}}{2}\right) F(\varphi, k) + \left(1 + \frac{\bar{\omega}}{2}\right) E(\varphi, k) \right],$$

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{1+\bar{\omega}}{2\bar{\omega}}}, \quad k = \sqrt{\frac{2\bar{\omega}}{1+\frac{\bar{\omega}}{2}}}. \quad (18)$$

Таким образом, можно констатировать, что в нелокальном пределе при $T = 0$ для случая гармонически изменяющегося во времени электромагнитного поля графики на рис. 1 и 2 остаются верными, но представляют зависимости амплитуд соответствующих величин от $z/\lambda(\bar{\omega})$, где $\lambda(\bar{\omega})$ — скин-глубина проникновения для частоты $\bar{\omega}$. Зависимость амплитуды электрического поля $E(z/\lambda)/E(0)$ вследствие соотношения $E(z) = -i\omega A(z)$ совпадает с зависимостью $A(z/\lambda)/A(0)$ на рис. 1. В работе [14] на основе как раз такого распределения электромагнитного поля рассмотрены детали переброса энергии из областей сверхпроводника в другие посредством нелокального влияния из-за электрон-фононного взаимодействия и запасаения ее в энергии магнитного поля и кинетической энергии носителей тока.

Список литературы

- [1] Halbritter J. // Z. Physik. 1971. Vol. 243. N 3. P. 201–219.
- [2] Miller P.B. // Phys. Rev. 1960. Vol. 118. N 4. P. 928–934.
- [3] Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Халатников И.М. // ЖЭТФ. 1958. Т. 35. Вып. 1. С. 265–275.
- [4] Mattis D.C., Bardeen J. // Phys. Rev. 1958. Vol. 111. N 2. P. 412–417.
- [5] Менде Ф.Ф., Спицын А.И. Поверхностный импеданс сверхпроводников. Киев: Наукова думка, 1985, 240 с.
- [6] Mühlischlegel B. // Z. Phys. 1959. Vol. 155. N 3. P. 313–327.
- [7] Линтон Э. Сверхпроводимость. М.: Мир, 1971. 262 с.
- [8] Физтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1966. Т. II. 800 с.
- [9] Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 729 с.
- [10] Raychaudhuri A.K., Egloff C., Rinderer L. // J. Low Temp. Phys. 1983. Vol. 53. N 4. P. 513–561.
- [11] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 831 с.
- [12] Drangeid K.E., Sommerhalder R. // Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 8. N 12. P. 467–469.
- [13] Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. М.: Физматгиз, 1959. 420 с.
- [14] Спицын А.И., Менде Ф.Ф., Скугаревский А.В. // РиЭ. 1982. Т. 27. № 4. С. 770–775.

Харьковский институт радиоэлектроники
им.М.К. Янгеля

Поступило в Редакцию
3 августа 1993 г.