

01:10

©1994 г.

ВЛИЯНИЕ ОТРАЖЕНИЙ EH_{11} -ВОЛН ОТ ТОРЦОВ УСКОРЯЮЩЕЙ СТРУКТУРЫ НА ДИНАМИКУ ПОПЕРЕЧНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКА

А.Н. Опанасенко

Построена линейная теория поперечной неустойчивости релятивистского потока заряженных частиц в однородной секции с учетом отражений от торцов аксиально-несимметричных волн. В аналитическом виде получена временная зависимость матрицы преобразования входного поперечного фазового объема в выходной. Получены зависимости инкрементов неустойчивости и пороговых токов от коэффициента отражения EH_{11} -волн, возбуждаемых пучком. Показано, что характеристики поперечной неустойчивости в ускоряющих структурах с отрицательной дисперсией синхронных с пучком аксиально-несимметричных волн существенно отличаются от аналогичных характеристик в структурах с положительной дисперсией этих волн.

1. С повышением импульсного тока и длительности пучка в ЛУЭ возрастает интенсивность вынужденного излучения электронов на частотах дефокусирующих колебаний ускоряющей структуры. В этих условиях представляет интерес разработка способов ослабления поперечной неустойчивости, основанных на идее понижения добротности аксиально-несимметричных колебаний путем вывода их энергии из области взаимодействия. Осуществлять такой вывод можно как из всего объема замедляющей структуры [1], так и из локальной области (торца секции) [2]. Эффективность применения последнего численными методами исследована в работе [3], где были получены графические зависимости критического импульсного тока заданной длительности от коэффициента нагружения a/λ_{01} и коэффициента отражения EH_{11} -волны от селективной нагрузки, установленной на торце однородной ускоряющей структуры, представляющей собой круглый диафрагмированный волновод (КДВ). Целью настоящей работы являются получение аналитической временной зависимости поперечных координат и скоростей частиц, ускоряемых в структурах с конечной отражающей способностью торцов, исследование зависимости характеристик собственных аксиально-несимметричных колебаний самосогласованной системы пучок-волна от знака дисперсии и коэффициента отражения EH_{11} -волны, а также определение пороговых токов квазинепрерывных пучков.

2. Анализ динамики развития поперечной неустойчивости был выполнен на основе модели нестационарного взаимодействия релятивистского монохроматического пучка электронов с полем плоскополяризованной дефокусирующей EH_{11} -волны [4,5]. В этой модели уравнения движения частиц и возбуждения отклоняющего поля в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\gamma(\tau, \gamma)}{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} X(\tau, \zeta) = \frac{i}{2} A(\tau + \theta \zeta, \zeta), \quad (1)$$

$$\left[\frac{\beta_g}{\theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{1Q} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right] A(\tau, \zeta) = -\sigma X(\tau - \theta \zeta, \zeta), \quad (2)$$

где $\tau = \omega t$, $\zeta = z/L$ — безразмерные координаты времени и длины соответственно; $A(\tau, \zeta) = eL^2 C(t, z) E_{\perp \text{эКВ}} / mc^2 \gamma_0 a$ — безразмерная комплексная амплитуда волны; $X(\tau, \zeta) = X_\omega(t, z) / a$ — безразмерная амплитуда поперечной модуляции пучка на частоте ω синхронной с пучком EH_{11} -волны; $\theta = \omega L / c$ и $\beta_g = v_g / c$ — набег фазы волны на длине структуры и безразмерная групповая скорость; Q — добротность структуры на частоте аксиально-несимметричного колебания;

$$\sigma = -\theta^2 e I \frac{|E_{\perp \text{эКВ}} \lambda|^2}{P} \beta_g / 8\pi^2 mc^2 \gamma_0$$

— коэффициент связи пучка с полем EH_{11} -волны; $\gamma(\tau, \zeta)$ — релятивистский фактор.

Размерные величины, используемые выше, имеют следующий смысл: t, z — эйлеровы время и продольная координата; $C(t, z) E_{\perp \text{эКВ}}$ — комплексная амплитуда поперечной составляющей силы Лоренца; $e, mc^2 \gamma_0$ — заряд и энергия инжекции электрона; c — скорость света; I — импульсный ток пучка; L — длина секции; a — радиус пролетного канала;

v_g и $\frac{|E_{\perp \text{эКВ}} \lambda|^2}{P} c$ — групповая скорость и показатель поперечного взаимодействия EH_{11} -волны соответственно [4]; $X_\omega(t, z)$ — амплитуда поперечной модуляции пучка на частоте ω ; $\lambda = 2\pi c / \omega$ — длина дефокусирующей волны.

Рассмотрим процесс развития неустойчивости, обусловленный наличием модуляции входных поперечных координат и скоростей частиц на частотах, близких к частоте синхронной с пучком EH_{11} -волны. В этом случае систему уравнений (1), (2) необходимо дополнить следующими граничными и начальными условиями:

$$X(\tau, 0) = X_0(\tau), \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} X(\tau, 0) = X'_0(\tau);$$

$$A(\tau, 1) = R \exp\left(2i\theta + \frac{\theta}{2Q\beta_g}\right) A(\tau - \tau_L, 0),$$

если $\beta_g < 0$;

$$A(\tau, 0) = R \exp\left(2i\theta - \frac{\theta}{2Q\beta_g}\right) A(\tau - \tau_L, 1), \quad (3)$$

если $\beta_g > 0$; $A(0, \zeta) = 0$.

Здесь R — коэффициент отражения EH_{11} -волны от селективной нагрузки, установленной на торце секции; $\tau_L = |\omega L / \beta_g c|$ — безразмерное время пробега энергии аксиально-несимметричной волны по структуре. Введение параметра R в граничные условия приводит к более общей модели поперечной неустойчивости пучка по сравнению с волноводной ($R = 0$) или резонаторной ($R = 1$), которые являются ее предельными случаями. Предположим, что за время пролета секции частицей амплитуда поля изменяется незначительно

$$\left| \frac{\Delta\omega}{2\omega} \theta \right| \ll 1,$$

где $\Delta\omega$ — ширина частотного спектра медленно меняющихся величин $X(\tau, \zeta)$ и $A(\tau, \zeta)$, и что приращение энергии на длине структуры мало

$$\frac{\gamma(\tau, \zeta)}{\gamma_0} \simeq 1.$$

Подставим амплитуду поля из (1) в (2) и, применяя преобразование Лапласа, получим уравнение для изображения амплитуды модуляции пучка

$$\left[\frac{d^3}{d\zeta^3} + \alpha(p) \frac{d^2}{d\zeta^2} + \varepsilon \right] X_p(\zeta) = 0. \quad (4)$$

При этом граничные условия (2.3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} X_p'(1) &= R \exp(2i\theta + \alpha(p)) X_p'(0), \quad \text{если } \beta_g < 0; \\ X_p'(0) &= R \exp(2i\theta - \alpha(p)) X_p'(1), \quad \text{если } \beta_g > 0; \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\alpha(p) = \frac{\theta}{\beta_g} \left(\frac{1}{2Q} + p \right), \quad \varepsilon = -\frac{i\sigma}{2} \frac{\theta}{\beta_g}$$

— приведенный ток пучка.

Подчинив решения уравнения (4) граничным условиям (5), построим матрицу преобразования лапласовских изображений входных поперечных амплитуд отклонения и скорости пучка $\mathbf{y}_p(0) = (X_p(0), X_p'(0))$ в выходные $\mathbf{y}_p(1) = (X_p(1), X_p'(1))$

$$\mathbf{y}_p(1) = \left[\hat{U}(p, 1) - \varepsilon g_{\mp}(p) \hat{G}(p, 1) \right] \mathbf{y}_p(0), \quad (6)$$

где

$$\hat{U}(p, 1) = \begin{bmatrix} f_p''(1) + \alpha(p) f_p'(1) & f_p'(1) + \alpha(p) f_p(1) \\ -\varepsilon f_p(1) & f_p''(1) + \alpha(p) f_p'(1) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\hat{G}(p, 1) = \begin{bmatrix} f_p'(1) f_p(1) & f_p(1) f_p'(1) \\ f_p'(1) f_p'(1) & f_p'(1) f_p(1) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$g_{-}(p) = \frac{1}{R \exp(2i\theta + \alpha(p)) - f_p''(1)}, \quad \text{если } \beta_g < 0; \quad (9)$$

$$g_+(p) = \frac{R \exp(2i\theta - \alpha(p))}{1 - R \exp(2i\theta - \alpha(p))f_p''(1)}, \quad \text{если } \beta_g > 0. \quad (10)$$

Функция $f_p(\zeta)$ и ее производные являются общими решениями уравнения (4)

$$f_p(\zeta) = \sum_{k=1}^3 \frac{\exp(q_k \zeta)}{q_k(3q_k + 2\alpha(p))}, \quad f_p'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} f_p(\zeta), \quad f_p''(\zeta) = \frac{d^2}{d\zeta^2} f_p(\zeta), \quad (11)$$

где q_k — корни характеристического уравнения $q^3 + \alpha(p)q^2 + \varepsilon = 0$.

Получение временной зависимости выходных параметров пучка требует нахождения особых точек на комплексной плоскости (p), которые являются нулями знаменателей в выражениях (9), (10). Отсюда вытекает, что слагаемое $\varepsilon g_{\mp}(p)\hat{G}(p, 1)$ в матрице преобразования (6) описывает раскачку частиц на собственных частотах самосогласованной системы пучок-волна. Полагая знаменатели в (9) и (10) равными нулю, получаем уравнения спектра частот собственных аксиально-несимметричных колебаний пучка

$$R \exp(2i\theta + \alpha(p)) - f_p''(1) = 0, \quad \text{если } \beta_g < 0; \quad (12)$$

$$1 - R \exp(2i\theta - \alpha(p))f_p''(1) = 0, \quad \text{если } \beta_g > 0. \quad (13)$$

Определив из (12), (13) собственные значения P_r и произведя обратное преобразование Лапласа выражение (6), для случая гармонической модуляции входных параметров ($X_0(\tau) = X_0 \exp(i\Omega\tau)$, $X_0'(\tau) = X_0' \exp(i\Omega\tau)$) получим следующую временную зависимость поперечных координат и скоростей пучка на выходе структуры $y(\tau, 1) = (X(\tau, 1), X'(\tau, 1))$:

$$y(\tau, 1) = \left\{ \exp(i\Omega\tau) \left[\hat{U}(i\Omega, 1) - \varepsilon g_{\mp}(i\Omega)\hat{G}(i\Omega, 1) \right] - \varepsilon \sum_r \frac{\exp(p_r \tau)}{(p_r - i\Omega)a_{\mp}(p_r)} \hat{G}(p_r, 1) \right\} y_0, \quad (14)$$

где

$$a_-(p_r) = \frac{\theta}{\beta} \left[2 \sum_{k=1}^3 \frac{q_k(p_r) \exp(q_k(p_r))}{3q_k(p_r) + 2\alpha(p_r)} \left(1 + \frac{q_k(p_r)}{2} + \frac{\alpha(p_r)}{3q_k(p_r) + 2\alpha(p_r)} \right) + R \exp(2i\theta - \alpha(p_r)) \right], \quad (15)$$

если $\beta_g < 0$;

$$a_+(p_r) = 2 \frac{\theta}{\beta_g} \sum_{k=1}^3 \frac{q_k(p_r) \exp(q_k(p_r))}{(3q_k(p_r) + 2\alpha(p_r))^2} \left(1 + q_k(p_r) + \alpha(p_r) + \frac{\alpha(p_r)}{3q_k(p_r) + 2\alpha(p_r)} \right),$$

если $\beta_g > 0$;

$$y_0 = (X_0, X_0'). \quad (16)$$

3. Основной вклад в развитие поперечной неустойчивости вносит собственное колебание, имеющее максимальный инкремент $\text{Re}(p_r) \max(r=1)$. Поэтому для количественной оценки поперечных размеров квазинепрерывных пучков достаточно ограничиться первым членом ряда в выражении (14). Показатель роста неустойчивости $\text{Re}(p_1)$ численно находится из уравнений (12), (13). На рис. 1 представлены семейства зависимостей $\text{Re}(p_1)$ от коэффициента отражения R при различных отношениях тока к энергии I/W [А/МэВ] ($W = mc^2\gamma_0$). В качестве ускоряющей структуры был рассмотрен КДВ [6] со следующими параметрами: длина $L = 60$ см, рабочий тип колебаний $\pi/2$, $a/b = 0.35$ и 0.50 (рис. 1, штриховая и сплошная линии соответственно). Видно, что зависимость инкремента в области $\text{Re}(p_1) > 14.0 \cdot 10^{-4}$ для структур с $\beta_g < 0$ ($a/b = 0.35$) практически не проявляется. Это объясняется тем, что при увеличении инкремента отношение амплитуды поля собственных колебаний на выходе структуры к входной амплитуде экспоненциально убывает

$$\left| \frac{f_p''(1)}{f_p''(0)} \right| = R \exp \left[\frac{\theta}{\beta_g} \left(\frac{1}{2Q} + \text{Re}(p) \right) \right], \quad (17)$$

т.е. уменьшается относительный вклад отраженного сигнала в суммарное поле из-за задержки его в цепи обратной связи в течение времени τ_L . Поэтому, как видно из графических зависимостей $\text{Re}(p_1)$ от отношения тока к энергии пучка (рис. 2, $a/b = 0.35$), начиная с $I/W > 1.0$, для оценки критических токов можно использовать модель, не учитывающую отраженных синхронных с пучком EH_{11} -волн [4].

Следует отметить, что учет отражений аксиально-несимметричных волн в области $0.3 < I/W < 1.0$ ($\theta = 15.51\pi$) приводит к некоторому

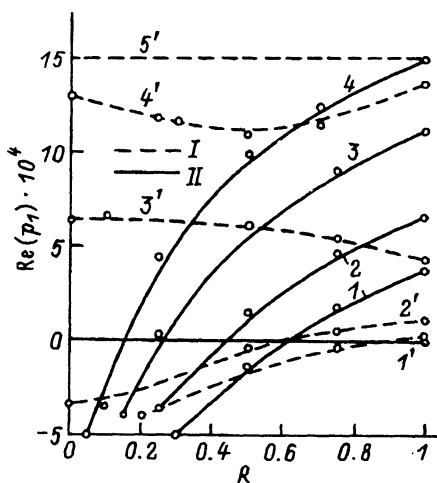


Рис. 1.
 $I - a/b = 0.35$; I/W : $1' - 0.1$, $2' - 0.2$,
 $3' - 0.5$, $4' - 0.75$, $5' - 1.0$; $II - a/b =$
 $= 0.50$; I/W : $1 - 1.5$, $2 - 3$, $3 - 6$, $4 -$
 10 .

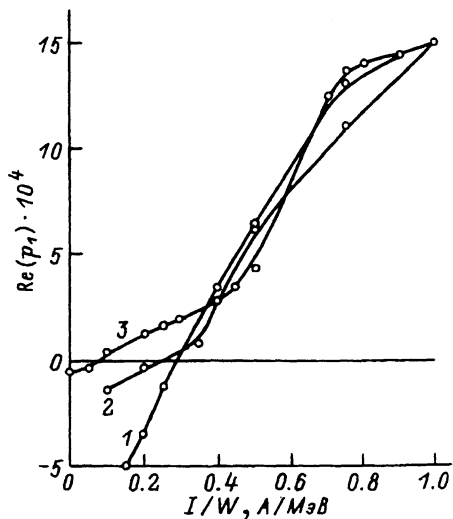


Рис. 2.
 $a/b = 0.35$, $R = 0(1)$, $0.5(2)$, $1.0(3)$.

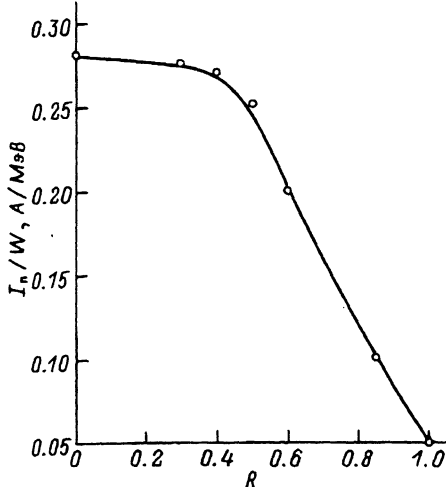


Рис. 3. $a/b = 0.35$.

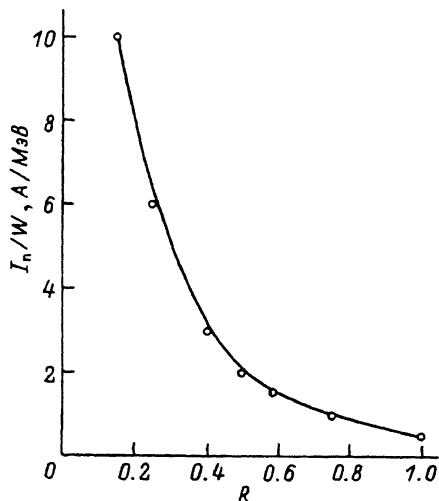


Рис. 4. $a/b = 0.50$.

спад $\text{Re}(p_1)$ (рис. 2), вызванному уменьшением амплитуды суммарного поля вследствие когерентного гашения отраженных волн с волнами, возбуждающимися в структуре. Эти особенности собственных колебаний в несогласованных структурах с $\beta_g < 0$ можно использовать для повышения критических токов и их длительностей.

В области $I/W < 0.3$ определяющими становятся потери, связанные с излучением через торцы секции энергии колебаний, собственные значения которых при стремлении тока к нулю стремятся к следующей асимптотике:

$$p_r = -\frac{1}{2Q} - \frac{\beta_g}{2Q} \ln R - i \frac{\beta_g}{\theta} (\theta + \pi r). \quad (18)$$

Существенной характеристикой ускоряющей структуры является значение порогового тока (I_n),¹ выше которого пучок становится неустойчив. На рис. 3 представлена зависимость I_n/W от параметра R для секции с $a/b = 0.35$, из которой следует, что достаточно неполного согласования секции ($R = 0.4$), чтобы увеличить пороговый ток в 5.6 раз.

В структурах с положительной дисперсией, согласованных на частотах синхронных с пучком EH_{11} -волн ($R \cong 0$), нет ограничения на величину I_n , вызываемого неустойчивостью собственных колебаний, так как при $R \rightarrow 0$ в системе пучок-волна исчезает обратная связь и генерация колебаний срывается. В этом случае, как следует из выражения (14) (первое слагаемое), ток ограничивается за счет усиления вынужденных колебаний входных поперечных параметров пучка.

Зависимости инкремента $\text{Re}(p_1)$ основного собственного колебания от коэффициента R для структуры с $\beta_g > 0$ приведены на рис. 1 сплошными линиями ($a/b = 0.5$). В области больших приведенных токов (где выполнено сильное неравенство $|\varepsilon| \gg |\alpha(p)|^3$) имеет место следующая

¹ Пороговым называем ток (I_n), при котором $\text{Re}(p_r) \text{max} = 0$.

$$\text{Re}(p_1) = -\frac{1}{2Q} + \frac{\beta_g}{\theta} \left(\ln \frac{R}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} |\varepsilon|^{1/3} \right). \quad (19)$$

Из этого выражения при $\text{Re}(p_1) = 0$ следует асимптотическая зависимость приведенного порогового тока от коэффициента отражения

$$|\varepsilon|_{\text{п}} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\theta}{2Q\beta_g - \ln \frac{R}{3}} \right) \right)^3, \quad (20)$$

которой соответствует в области малых коэффициентов отражений ($P < 0.2$) графическая зависимость $I_{\text{п}}/W$ от R , представленная на рис. 4, полученная путем численного решения уравнения спектра (13). Видно, что при уменьшении коэффициента R от 1 до 0.15 значение порогового тока возрастает в 20 раз.

4. В заключение сформулируем результаты и выводы.

Использование волноводной модели в описании взаимодействия длинноимпульсного пучка с аксиально-несимметричной модой колебания дало возможность получить аналитические временные зависимости поперечных фазовых координат частиц на выходе структуры.

Отличительная особенность структур с положительной дисперсией синхронных EH_{11} -волн по сравнению с аналогичными структурами, имеющими отрицательную дисперсию, заключается в возможности значительного повышения пороговых и критических токов за счет применения селективной нагрузки.

Для структур с $\beta_g < 0$ при определенных фазовых набегах θ синхронной EH_{11} -волны существует такой диапазон токов, при которых учет отражений приводит к уменьшению инкремента поперечной неустойчивости.

Автор выражает благодарность Н.И. Айзацкому за постановку задачи и В.И. Курилко за ценные замечания и обсуждение результатов работы.

Список литературы

- [1] Deruyter H., Hong H.A., Lizin A.N. et al. // Proc. 1989 IEEE Particle Accelerator Conf. New York, 1989. Vol. 1. P. 156-158.
- [2] Vetter A.M., Adamski J.L., Gallagher W.J. // Proc. 1987. IEEE Particle Accelerator Conf. New York, 1987. Vol. 2. P. 1019-1021.
- [3] Айзацкий Н.И., Опанасенко А.Н. // Тез. докл. XII Всесоюз. совещания по ускорителям заряженных частиц. М., 1990. С. 83. Вопросы атомной науки и техники. Сер. Техника физического эксперимента. Харьков, 1991. Вып. 3(21). С. 40-42.
- [4] Буриштейн Э.Л., Воскресенский Г.В. Линейные ускорители электронов с интенсивными пучками. М.: Атомиздат, 1970. С. 192.
- [5] Айзацкий Н.И. // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 8. С. 1532-1537.
- [6] Вальднер О.А., Собенин Н.П., Зеверев Б.В., Шедрин И.С. Справочник по диафрагмированным волноводам. М.: Атомиздат, 1970. С. 376.