

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

01:03  
© 1994 г.

Журнал технической физики, т. 64, в. 4, 1994

## КИНЕТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕЛКОДИСПЕРСНОЙ ГАЗОВЗВЕСИ

М.Ю.Гладков, В.Я.Рудяк

В работе [1] выведены кинетические уравнения разреженной мелкодисперсной газовзвеси. Предполагалось, что взвешенные частицы представляют собой твердые сферические частицы радиуса  $R_0 \sim \lambda_g \sqrt{\varepsilon_g}$ , где  $\varepsilon_g = n_g r_0^3$ ,  $r_0$  — эффективный радиус молекулы несущего газа,  $n_g$  — числовая плотность газа,  $\lambda_g$  — длина свободного пробега молекул. И несущий газ, и “газ” частиц предполагались разреженными в том смысле, что  $\varepsilon_g \ll 1$ ,  $\varepsilon_p = n_p R_0^3 \ll 1$ , где  $n_p$  — числовая плотность частиц. Кроме того, плотность частиц считалась настолько малой, чтобы можно было пренебречь их взаимодействием друг с другом. Было показано, что динамика подобной газовзвеси описывается системой кинетических уравнений, радикально отличающихся от уравнений Больцмана. Интегралы столкновений газовзвеси содержат члены  $O(\varepsilon_g^{1/4})$ , описывающие многочастичные столкновения частиц с молекулами газа, и их учет принципиален, например, при вычислении коэффициентов переноса.

В настоящей работе получены кинетические уравнения такой же мелкодисперсной разреженной газовзвеси ( $R \sim \sqrt{\varepsilon_g} \lambda$ ,  $\varepsilon, \varepsilon_g \ll 1$ ) в случае, когда число частиц достаточно велико и их взаимодействие друг с другом необходимо учитывать.

Пусть газовзвесь состоит из  $n$  взвешенных частиц и  $(N - n)$  молекул несущего газа. Динамика такой системы описывается нормированной на единицу функцией распределения  $F_N$ , которая является решением уравнения Лиувилля.

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + L F_N = 0, \quad L = L_{(N-n)g} + I_{np} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^N \left( \Pi_{ij} + \Pi'_{ij} \right),$$

$$L_{(N-n)g} = \sum_{i=n+1}^N \left( \frac{\mathbf{p}_i}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} - \sum_{j>i}^N \vartheta_{ij} \right), \quad \Pi_{ij} = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j},$$

$$I_{np} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathbf{P}_i}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}_i} - \sum_{j>i}^n O_{ij} \right), \quad \Pi'_{ij} = \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \mathbf{R}_i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_i},$$

$$\vartheta_{ij} = \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right), \quad O_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \mathbf{R}_i} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}_j} \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{R}_j$  — соответственно радиус-векторы  $i$ -й молекулы и  $j$ -й частицы;  $\mathbf{p}_i$ ,  $\mathbf{P}_j$  — их импульсы;  $m$  и  $M$  — массы;  $\phi_{ij}$ ,  $U_{ij}$ ,  $\psi_{ij}$  — соответственно потенциалы взаимодействия молекул, частиц и молекул с частицами.

Введем частичные функции распределения

$$F_{sg} = V^s \int dX_1 \dots dX_n dx_{n+s+1} \dots dx_N F_N,$$

$$F_{kp} = V^k \int dX_1 \dots dX_{n-k} dx_{n+1} \dots dx_N F_N,$$

$$F_{sk} = V^{sk} \int dX_1 \dots dX_{n-k} dx_{n+s+1} \dots dx_N F_N, \quad (2)$$

так что  $F_{sg}$  —  $s$ -частичная функция распределения молекул несущего газа;  $F_{kp}$  —  $k$ -частичная функция распределения взвешенных частиц;  $F_{sk}$  —  $(s+k)$ -частичная функция распределения газозвеси,  $s$ -частичная по молекулам и  $k$ -частичная по взвешенным частицам;  $dX_i = d\mathbf{R}_i d\mathbf{P}_i$ ;  $dx_j = d\mathbf{r}_j d\mathbf{p}_j$ ;  $V$  — объем системы.

Интегрируя (1) по фазовым переменным молекул и частиц, получим цепочку кинетических уравнений для функций (2), два первых уравнения которой имеют вид

$$\frac{\partial F_{1g}}{\partial t} + L_{1g} F_{1g} = n_g \int dx_{n+2} \vartheta_{n+1, n+2} F_{2g} + n_p \int dX_n \prod_{n, n+1} F_{11}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial F_{1p}}{\partial t} + L_{1p} F_{1p} = n_p \int dX_{n-1} O_{n-1, n} F_{2p} + n_g \int dx_{n+1} \prod'_{n, n+1} F_{11}. \quad (4)$$

Эти уравнения не замкнуты относительно функций  $F_{1g}$  и  $F_{1p}$ . Для вывода одночастичных кинетических уравнений надо определить функции  $F_{2g}$ ,  $F_{2p}$ ,  $F_{11}$ . При получении уравнений для этих функций следует пренебречь членами порядка  $\varepsilon_g$ ,  $\varepsilon_p$  и меньше. Однако наряду с такими цепочка содержит и члены порядка  $\varepsilon_g^{1/4}$ ,  $\varepsilon_g^{1/2}$ ,  $\varepsilon_g^{3/4}$ . В настоящей работе, так же как в [1], мы ограничимся учетом поправок порядка  $\varepsilon_g^{1/4}$ . Тогда можно показать, что функции  $F_{2g}$ ,  $F_{2p}$ ,  $F_{11}$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial F_{2g}}{\partial t} + L_{2g} F_{2g} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial F_{2p}}{\partial t} + L_{2p} F_{2p} = n_g \sum_{i=n-1}^n \int dx_{n+1} \prod'_{i, n+1} F_{12}, \quad (5b)$$

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial t} + L_{1g}F_{11} - \prod_{n,n+1} F_{11} = n_g \int dx_{n+2} \int dx_{n+2} \prod'_{n,n+2} F_{21}, \quad (5c)$$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial t} + \frac{p_{n+1}}{m} \frac{\partial F_{12}}{\partial \mathbf{r}_{n+1}} - \sum_{i=n-1}^n \prod_{i,n+1} F_{12} = 0. \quad (5d)$$

Чтобы построить решение уравнений (5), необходимо задать соответствующие начальные условия. В настоящей работе мы не будем исследовать системы с сильной статистической связью. В этом случае в системе имеют место только коротковолновые (или мелкомасштабные корреляции). Мелкомасштабными здесь мы, следуя [2], называем корреляции, характерный масштаб которых меньше или порядка физически бесконечно малого для данной среды масштаба. В разреженном и умеренно плотном газе бесструктурных молекул характерный масштаб мелкомасштабных корреляций порядка  $r_c \leq r_p \ll \lambda_g$  [2], где  $r_p$  — бесконечно малый масштаб для разреженного или умеренно плотного газа. В силу выполнения этого условия мы и можем использовать условия полного ослабления начальных корреляций.

В рассматриваемой разреженной газовой смеси максимальный масштаб физически бесконечно малой длины равен  $r_p \leq \lambda_g \varepsilon_g^{1/4}$ . Поскольку газовая смесь предполагается разреженной и  $\varepsilon_g \ll 1$ , то мелкомасштабные корреляции также затухают. Таким образом, при решении кинетических уравнений (5) можно, как и в случае обычного разреженного или умеренно плотного газов, использовать условия полного ослабления корреляций. Именно такие условия применялись в [1] при решении уравнений (5a) и (5c) и было найдено, что

$$F_{2g}(t) = S_{-\tau}^{(2)} F_{1g}(t) F_{1g}(t), \quad (6a)$$

$$F_{11}(t) = \Omega_{-\tau}^{(n,n+1)} F_{1p}(t) F_{1g}(t) + n_g \int_0^\tau d\tau_1 \int dx_{n+2} \Omega_{-\tau_1}^{(n,n+1)} \prod'_{n,n+2} \prod_{i=n+1}^{n+2} \Omega_{-(\tau-\tau_1)}^{(ni)} F_{1p} F_{1g} F_{1g},$$

$$S_{-\tau}^{(2)} \equiv S_{-\tau}^{(n+1,n+2)} = \exp\{\tau \vartheta_{n+1,n+2}\}, \quad \Omega_{-\tau}^{(ni)} = \exp\left\{\tau \prod_{ni}\right\}. \quad (6b)$$

Уравнение (5d) интегрируется сразу, после чего находим решение уравнения (5b)

$$F_{2p}(t) = C_{-\tau}^{(2)} F_{1p}(t) F_{1p}(t) + n_g \sum_{i=n-1}^n \int_0^\tau d\tau_1 \int dx_{n+1} C_{-\tau_1}^{(2)} \prod'_{i,n+1} \prod_{j=n-1}^n \Omega_{-(\tau-\tau_1)}^{(i,n+1)} F_{1p} F_{1p} F_{1g},$$

$$C_{-\tau}^{(2)} = \exp\{\tau O_{n-1,n}\}. \quad (6c)$$

Решения (6) позволяют замкнуть систему кинетических уравнений (3), (4), которая, таким образом, приобретает вид

$$\frac{\partial F_{1g}}{\partial t} + L_{1g}F_{1g} = B_{gg} + B_{gp} + J_{gp},$$

$$\frac{\partial F_{1p}}{\partial t} + L_{1p}F_{1p} = B_{pp} + J_{pp} + B_{pg} + J_{pg}. \quad (7)$$

Здесь интегралы столкновений, обозначенные буквой  $B$ , имеют обычный больцмановский вид, а

$$J_{gp} = n_p n_g \int_0^\tau d\tau_1 \int dX_n \int dx_{n+2} \prod_{n,n+1} \Omega_{-\tau_1}^{(n,n+1)} \prod'_{n,n+2} \times$$

$$\times \prod_{i=n+1}^{n+2} \Omega_{-(\tau-\tau_1)}^{(ni)} F_{1p} F_{1g} F_{1g},$$

$$J_{pg} = n_g^2 \int_0^\tau d\tau_1 \int dx_{n+1} \int dx_{n+2} \prod'_{n,n+1} \Omega_{-\tau_1}^{(n,n+1)} \prod'_{n,n+2} \times$$

$$\times \prod_{i=n+1}^{n+2} \Omega_{-(\tau-\tau_1)}^{(ni)} F_{1p} F_{1g} F_{1g},$$

$$J_{pp} = n_p n_g \sum_{i=n-1}^n \int_0^\tau d\tau_1 \int dX_{n-1} \int dx_{n=1} O_{n+1,n} C_{-\tau_1}^{(2)} \prod'_{i,n+1} \times$$

$$\times \prod_{j=n-1}^n \Omega_{-(\tau-\tau_1)}^{(j,n+1)} F_{1p} F_{1p} F_{1g}.$$

Интегралы столкновений  $J_{gp}$  и  $J_{pg}$  определяют, таким образом, поправки порядка  $\varepsilon_g^{1/4}$  к соответствующим больцмановским. Ими можно пренебречь, когда несущий газ является ультраразреженным, т.е. когда вириальный параметр  $\varepsilon_g \leq 10^{-8}$ . Во всех остальных случаях учет этих многочастичных (трехчастичных) интегралов необходим. В умеренно разреженной суспензии, когда  $\varepsilon_g \sim 10^{-4}$ , интегралы столкновений  $J_{pg}$  и  $J_{gp}$  будут определять поправки к диссипативным характеристикам газа в десятки процентов. С другой стороны, вклад столкновений в недиссипативные характеристики газозвеси порядка  $\varepsilon_g^{1/2}$ , ими почти всегда можно пренебречь.

Простые оценки далее показывают, что  $B_{pp}/J_{pp} \sim I/n_g R_0^3 \sim \sqrt{\varepsilon_g} \ll 1$ . Таким образом, больцмановский интеграл парных столкновений частиц  $B_{pp}$  много меньше трехчастичного интеграла столкновений  $J_{pp}$ .

Это означает, что канал взаимодействия частиц через среду посредством "обмена" молекулой газа оказывается значительно более эффективным, нежели прямые столкновения.

Следует отметить, однако, что указанный механизм обуславливает сравнительно слабое взаимодействие частиц, поскольку  $J_{pp} \sim n_p/n_g \sqrt{\varepsilon_g} \ll \sqrt{\varepsilon_g}$ . Поэтому обычно в правой части уравнения (7) достаточно сохранить последние два члена.

В заключении подчеркнем еще раз, что система уравнений Больцмана применима для описания переноса лишь в ультраразреженной газовой среде. Использование же уравнений Больцмана для описания динамики умеренно разреженной газовой среды будет приводить как к количественно, так и к качественно неверным результатам.

Авторы признательны фонду Собора, при финансовой поддержке которого осуществлена эта работа.

### Список литературы

- [1] Рудяк В.Я. // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. Вып. 20.  
[2] Климонтович Ю.Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.

Новосибирский инженерно-строительный институт

Поступило в Редакцию  
24 марта 1993 г.

01;10;12  
© 1994 г.

Журнал технической физики, т. 64, в. 4, 1994

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТОНКОЙ СТРУКТУРЫ СПЕКТРА БЕЗ ИЗМЕРЕНИЯ АППАРАТНОЙ ФУНКЦИИ СПЕКТРОМЕТРА

В.А. Горелик

1. Восстановление тонкой структуры спектра сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$$u(E_0) = \int_{-\infty}^{\infty} K(E - E_0) \cdot z(E) \cdot dE, \quad (1)$$

где  $z(E)$  — истинный,  $u(E_0)$  — регистрируемый спектры,  $K(E - E_0)$  — аппаратная функция спектрометра [1].

Традиционный подход к решению этой задачи состоит в том, чтобы измерить  $K(E - E_0)$ , а затем решить уравнение (1) относительно  $z(E)$ . Поскольку задача является математически некорректной [2], то желательно знать исходные функции  $u(E_0)$  и  $K(E - E_0)$  как можно более точно. Точность определения  $u(E_0)$  ограничивается только шумами и в принципе может быть сделана достаточно высокой. Что касается  $K(E - E_0)$ , то нам вообще неизвестны корректные процедуры ее определения. Общепринятые методы, когда на вход спектрометра подается  $\delta$ -образный (по энергии) сигнал, а сигнал на выходе спектрометра