

01

©1994 г.

О “САМОЗАХОРОНЕНИИ” РАДИОАКТИВНЫХ ОТХОДОВ

Л.Я.Косачевский, Л.С.Сюи

Тепловыделение радиоактивного источника в среде с достаточно низкой теплопроводностью может привести к его нагреванию до температуры, превышающей точку плавления среды. В образуемый расплав источник будет погружаться под действием собственного веса. Благодаря увеличению теплоотдачи в обтекающую холодную среду дальнейший рост температуры прекращается и погружение происходит с постоянной скоростью. Поэтому возможность “самозахоронения” отработанного ядерного топлива или активной зоны реактора в горной породе представляется вполне реальной [1]. Во избежание загрязнения среды температура на поверхности источника не должна превышать точку плавления материала контейнера. Целью данной работы является определение поверхностной температуры и скорости погружения сферического источника в зависимости от его радиуса и физических характеристик горных пород. Движение теплового источника в плавающей среде рассматривалось в работах [2,3] в предположении, что поверхностная температура однородна.

Тепловой источник считаем однородным шаром. В связанной с ним системе отсчета твердая среда имеет постоянную скорость V . Плотность, теплопроводность и теплоемкость среды в твердой и жидкой фазах предполагаем одинаковыми. Гидродинамические уравнения тонкого слоя расплава на нижней поверхности шара $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $R \leq r \leq R + \delta$ (рис. 1) записываем в приближении теории смазки [2]

$$\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} = \frac{1}{\eta R} \frac{dp}{d\theta},$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) = 0,$$

$$2 \int_R^{R+\delta} v_\theta dr = V R \sin \theta. \quad (1)$$

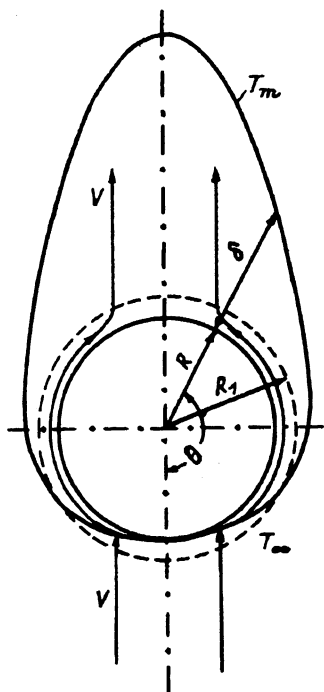


Рис. 1. Физическая модель и геометрия задачи.

Учитывая граничные условия

$$v_{\theta}(R, \theta) = 0, \quad v_r(R, \theta) = 0, \quad v_{\theta}(R + \delta, \theta) = V \sin \theta, \quad (2)$$

находим поле скоростей

$$v_{\theta} = V \frac{y}{\delta^*} \left[1 + \frac{3}{\delta^*} \left(1 - \frac{y}{\delta^*} \right) \right] \sin \theta, \quad y = \frac{r}{R} - 1,$$

$$v_r = -V \left(\frac{y}{\delta^*} \right)^2 \left\{ \left(3 - 2 \frac{y}{\delta^*} \right) \cos \theta - \frac{d\delta^*}{d\theta} \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{\delta^*} \left(1 - \frac{y}{\delta^*} \right) \right] \sin \theta \right\}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{R} \quad (3)$$

и давление

$$p = p_0 + 6 \frac{\eta V}{R} \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{\delta^{*3}} d\theta. \quad (4)$$

В остальной области расплава давление предполагаем постоянным и равным p_0 .

Распределение температуры в рассматриваемом слое удовлетворяет уравнению

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} = a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}, \quad a = \frac{k}{\rho c_p} \quad (5)$$

и граничным условиям

$$T(R, \theta) = T_w(\theta), \quad T(R + \delta, \theta) = T_m,$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r}(R + \delta; \theta) = h\rho V \cos \theta, \quad h = h_m + c_p(T_m - T_\infty). \quad (6)$$

В качестве первого приближения принимаем линейное по r распределение

$$T_1(r, \xi) = T_w(\xi) - [T_w(\xi) - T_m] \frac{y}{\delta^*}, \quad \xi = \cos \theta.$$

Подставляя его в левую часть уравнения (5) и интегрируя с учетом первых двух условий (6), находим следующее приближение:

$$T(r, \xi) = T_1(r, \xi) - \frac{3}{20} \frac{hS}{c_p} \left(1 - \frac{y}{\delta^*}\right) \beta y \left\{ \left[\xi - (1 - \xi^2) \left(\frac{S'}{S} + \frac{5}{18} \delta^{*'} \right) \right] \left(1 + \frac{y}{\delta^*}\right) + \left[\xi + \frac{7}{3} (1 - \xi^2) \left(\frac{S'}{S} - \frac{5}{42} \delta^{*'} \right) \right] \left(\frac{y}{\delta^*} \right)^2 - \left[\frac{2}{3} \xi + (1 - \xi^2) \frac{S'}{S} \right] \left(\frac{y}{\delta^*} \right)^3 \right\}, \quad (7)$$

которым и ограничимся. Штрихом обозначены производные по ξ . Третье условие (6) дает уравнение для толщины слоя δ

$$\frac{1}{8} (1 - \xi^2) \delta^{*'} + \frac{1}{\beta \delta^*} = \varphi(\xi),$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{S} \left[\xi \left(1 + \frac{7}{20} S \right) - \frac{1}{10} (1 - \xi^2) S' \right],$$

$$S = \frac{c_p}{h} [T_w(\xi) - T_m], \quad \beta = \frac{VR}{a}. \quad (8)$$

Пренебрегая его первым членом, имеем

$$\delta^* = \frac{1}{\beta \varphi}. \quad (9)$$

При условии $S = \text{const} \ll 1$ это выражение совпадает с результатом работы [2]. Влияние отброшенного члена будет оценено ниже в частном случае погружения в гранит. Согласно (7)–(9), плотность потока тепла через нижнюю поверхность шара $0 \leq \xi \leq 1$ определяется выражением

$$-k \frac{\partial T}{\partial r}(R, \xi) = \frac{kh\beta}{c_p R} \left\{ \xi - \frac{1}{4} [(1 - \xi^2) S]' \right\}. \quad (10)$$

Потоком тепла через верхнюю поверхность пренебрегаем.

Осесимметричное распределение температуры внутри источника удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial T^i}{\partial \xi} \right] = -\frac{q}{k_i} r^2. \quad (11)$$

Его решение, ограниченное в точках $r = 0$ и $\xi = \pm 1$, имеет вид

$$T^i(r, \xi) = T_m + \frac{4qR^2}{3k_i} \left[\frac{1}{8}(1 - r^{*2}) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{*n} P_n(\xi) \right], \quad (12)$$

где $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $r^* = r/R$.

При этом локальное число Стефана равно

$$S = \frac{4}{3} \nu \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\xi), \quad \nu = \frac{qR^2 c_p}{k_i h}. \quad (13)$$

Граничное условие

$$k_i \frac{\partial T^i}{\partial r}(R, \xi) = \begin{cases} k \frac{\partial T}{\partial r}(R, \xi), & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases} \quad (14)$$

дает бесконечную систему уравнений для постоянных C_n

$$S(0) = \frac{8}{3} \nu \gamma - 2,$$

$$C_n = \frac{n+1}{8\gamma} \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_0^1 P_m(\xi) [P_{n+1}(\xi) - P_{n-1}(\xi)] d\xi -$$

$$-\frac{2n+1}{8n} \left[\frac{3}{\nu\gamma} \int_0^1 \xi P_n(\xi) d\xi + \left(2 - \frac{3}{2\nu\gamma} \right) P_n(0) \right],$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad \gamma = \frac{k_i}{k\beta}. \quad (15)$$

Ограничиваясь в бесконечных суммах тремя слагаемыми, имеем

$$C_0 = \frac{2\gamma}{\Delta} \left(\gamma^2 + \frac{11}{64}\gamma + \frac{139}{10240} \right) - \frac{3}{2\nu},$$

$$C_1 = -\frac{\gamma}{2\Delta} \left(\gamma + \frac{3}{32} \right), \quad C_2 = -\frac{5\gamma}{32\Delta} \left(\gamma - \frac{49}{160} \right),$$

$$\Delta = \gamma^2 + \frac{27}{128}\gamma + \frac{33}{20480}$$

и число Стефана принимает вид

$$S(\xi) = S(1) + \frac{\nu\gamma}{48\Delta} (1 - \xi) \left[47\gamma - \frac{51}{32} + 15 \left(\gamma - \frac{49}{160} \right) \xi \right], \quad (16)$$

где

$$S(1) = \frac{8\nu\gamma}{3\Delta} \left(\gamma^2 - \frac{5}{32}\gamma + \frac{9}{640} \right) - 2. \quad (17)$$

Учитывая (4) и (9), находим силу давления расплава на шар

$$2\pi R^2 \int_{-1}^1 p\xi d\xi = 6\pi a\eta\beta^4 J, \quad J = \int_0^1 (1 - \xi^2)\varphi^3 d\xi.$$

Приравнявая ее разности сил веса и Архимеда, получаем уравнение для определения γ

$$J\beta^4 = \frac{2}{9} \frac{g}{a\eta} (\rho_i - \rho) R^3. \quad (18)$$

При $S(1) \ll 1$ основной вклад в значение интеграла J дает окрестность точки $\xi = 1$. Воспользовавшись приближенным представлением подынтегральной функции в этой окрестности

$$(1 - \xi^2)\varphi^3 = 2(1 - \xi) [S(1) - S'(1)(1 - \xi)]^{-3},$$

имеем с точностью до главного члена

$$J = \frac{1}{S(1)S'^2(1)}$$

и, согласно (16), (18),

$$S(1) = \frac{2592}{961} \frac{a\eta\beta^6}{g(\rho_i - \rho)R^7} \left[\frac{kh}{qc_p} f(\gamma) \right]^2, \quad (19)$$

$$f(\gamma) = \Delta \left(\gamma - \frac{99}{992} \right)^{-1}.$$

Значение γ теперь находится из уравнения (17), которое в этом случае сводится к кубическому

$$\gamma^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{5}{24} \right) \gamma^2 - \frac{9}{128} \left(\frac{9}{4\nu} - \frac{1}{5} \right) \gamma - \frac{99}{81920\nu} = 0. \quad (20)$$

При $\nu \leq 4.9$ его единственный положительный корень имеет вид

$$\gamma = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\nu} + \frac{5}{24} \right) + \frac{1}{2} L^{1/2} \cos \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = \left(\frac{1}{\nu^3} + \frac{121}{64\nu^2} + \frac{1229}{3840\nu} - \frac{199}{13824} \right) L^{-3/2},$$

$$L = \frac{1}{\nu^2} + \frac{121}{96\nu} - \frac{91}{2880}. \quad (21)$$

Число Стефана принимает наибольшее значение в верхней критической точке

$$S(-1) = S(1) + \frac{4\nu\gamma}{3\Delta} \left(\gamma + \frac{3}{32} \right). \quad (22)$$

С увеличением ν параметр γ уменьшается, а скорость V и $S(-1)$ возрастают. Приравнявая $S(-1)$ максимально допустимой для данного контейнера величине S_* , соответствующей температуре его плавления T_* , и учитывая (20), находим максимальное значение ν

$$\nu_* = \frac{24S_*\Delta(\gamma_*)}{\gamma_*(32\gamma_* + 3)},$$

$$\gamma_* = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{S_*} + \frac{5}{32} + \left(\frac{1}{S_*^2} + \frac{11}{16S_*} - \frac{163}{5120} \right)^{1/2} \right]. \quad (23)$$

Таким образом, максимальные скорость и радиус шара определяются выражениями

$$V_* = \frac{qR_*}{\rho h\nu_*\gamma_*}, \quad R_* = \left(\frac{k_i h\nu_*}{qc_p} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Пренебрегая возмущением скорости среды в области $r \geq R_1$ (рис. 1) и обратным выделением теплоты фазового перехода, имеем уравнение для внешнего распределения температуры

$$-V \left(\xi \frac{\partial T^e}{\partial r} + \frac{1 - \xi^2}{r} \frac{\partial T^e}{\partial \xi} \right) =$$

$$= \frac{a}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T^e}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial T^e}{\partial \xi} \right] \right\}. \quad (25)$$

Его решением, ограниченным и убывающим с ростом r , является

$$T^e(r, \xi) = T_\infty + \frac{1}{\sqrt{1}} \exp \left(-\frac{\beta r \xi}{2R_1} \right) \sum_{n=0}^{\infty} B_n K_{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta r}{2R_1} \right) P_n(\xi), \quad (26)$$

где $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента.

С помощью приближенного граничного условия

$$T^e(R_1, \xi) = \begin{cases} T_w(\xi), & \xi \leq 0, \\ T_\infty, & \xi > 0 \end{cases} \quad (27)$$

находим постоянные B_n

$$B_n = \frac{(2n+1)\sqrt{R_1}}{2K_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta}{2}\right)} \int_{-1}^0 \exp \left(\frac{\beta}{2}\xi \right) [T_w(\xi) - T_\infty] P_n(\xi) d\xi. \quad (28)$$

Если ограничиться главным членом асимптотического выражения

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} \exp(-x),$$

решение (26) упрощается

$$T^e(r, \xi) = \begin{cases} T_\infty + \frac{R_1}{r} [T_w(\xi) - T_\infty] \exp\left[-\frac{\beta}{2}(1+\xi)\left(\frac{r}{R_1} - 1\right)\right], & \xi \leq 0, \\ T_\infty, & \xi > 0. \end{cases} \quad (29)$$

Приравнявая T^e температуре плавления среды T_m и пренебрегая T_∞ , получаем уравнение для границы между жидкой и твердой фазами при $\xi \leq 0$

$$\frac{r(\xi)}{R_1} = [1 + \sigma(\xi)] \exp\left\{-\frac{\beta}{2}(1+\xi)\left[\frac{r(\xi)}{R_1} - 1\right]\right\},$$

$$\sigma(\xi) = hS(\xi)/c_p T_m. \quad (30)$$

Решение этого уравнения существует при малом показателе экспоненты. Раскладывая ее в ряд и ограничиваясь линейным членом, находим

$$\delta^*(\xi) = \frac{R_1}{R} \left\{ 1 + \frac{2\sigma(\xi)}{2 + \beta[1 + \sigma(\xi)](1 + \xi)} \right\} - 1. \quad (31)$$

Значение R_1 определим из условия непрерывности функции $\delta^*(\xi)$ при $\xi = 0$.

Предполагая, что отходы находятся в контейнере из керамики NbC, для численных оценок принимаем $T_* = 3480^\circ\text{C}$, $q = 130000 \text{ вт/м}^3$, $\rho_i = 7800 \text{ кг/м}^3$, $k_i = 36 \text{ Вт/м} \cdot \text{град}$. Физические постоянные горных пород [4] приведены в табл. 1, вязкость расплава считаем равной $10 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ [2].

На рис. 2 кривые 1-3, построенные с помощью уравнения (18), показывают зависимость скорости погружения от радиуса шара в базальте, граните и кварце соответственно. Согласно (22), температура

Таблица 1. Значения физических величин в системе СИ

Среда	ρ	c_p	k	h_m	T_m
Базальт	2800	1494	2.176	585800	1200
Гранит	2700	1301	3.013	585800	1200
Кварц	2210	1205	1.996	795000	1627

Таблица 2. Значения параметров процесса "самозахоронения" при максимально допустимой температуре контейнера

Среда	ν_*	$R_*, \text{ м}$	$V_*, \frac{\text{км}}{\text{год}}$	$S(1) \cdot 10^{-3}$	$\delta^*(1) \cdot 10^{-5}$
Базальт	1.201	0.728	0.409	0.107	0.588
Гранит	1.156	0.727	0.474	0.045	0.349
Кварц	0.654	0.644	0.453	0.113	0.913

поверхности шара в точке $\xi = -1$ в базальте несколько меньше, чем в граните. Разница между ними составляет всего 12.7°C при $R = 1$ м и убывает с уменьшением R . Зависимость этой температуры от R для обоих сред представлена кривой 4, а для кварца кривой 5. Значения основных параметров процесса, когда максимум поверхностной температуры равен T_* , приведены в табл. 2. Приближенные формулы (23) дают для скорости погружения значения, отличающиеся от табличных не более чем на 0.1%.

В точке $\xi = 1$ шар практически находится в непосредственном контакте с твердой средой, а поверхностная температура совпадает с температурой ее плавления. Таким образом, поверхностная температура существенно неоднородна. Разница между ее значениями в верхней и нижней критических точках составляет для базальта и гранита 2280°C , а для кварца 1853°C .

На рис. 3 кривые 1 и 2 представляют соответственно результат численного решения уравнения (8) при начальном условии $\delta^*(1) = [\beta\varphi(1)]^{-1}$ и приближенную зависимость $\delta^*(\xi)$ согласно формуле (9) для гранита. Отсюда видно, что погрешность этой формулы существенна лишь на малом участке $\xi < 0.1$ и потому ее использование при вычислении силы давления расплава на шар оправдано. Для определения же радиуса R_1 воспользуемся численным результатом $\delta^*(0) = 0.329$. При этом, согласно (31), имеем $R_1/R = 1.228$, $\delta^*(-1) = 2.562$.

Граница зоны расплава показана на рис. 1 сплошной линией. Ее форма качественно согласуется с результатом эксперимента для случая погружения нагретого цилиндра в парафин [3].

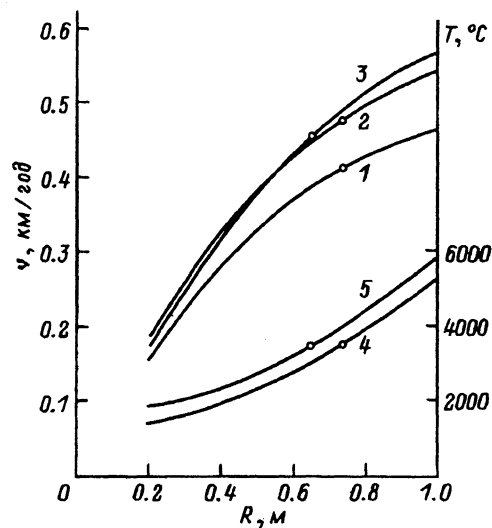


Рис. 2. Скорость шара в базальте (1), в граните (2) и кварце (3) и максимальная температура поверхности шара в базальте и граните (4) и кварце (5).

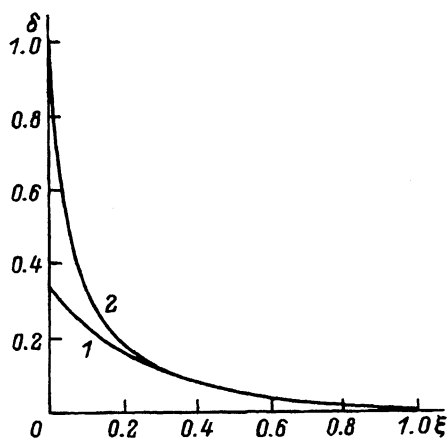


Рис. 3. Толщина слоя расплава гранита согласно численному решению уравнения (8) (1) и приближенному решению (9) (2).

Использование для контейнера более термостойкого материала дает эффект в практическом отношении незначительный. Так, при $T_* = 4000^\circ\text{C}$ (что, по-видимому, близко к пределу, достигнутому в настоящее время) в случае погружения в гранит $R_* = 0.812\text{ м}$, $V_* = 0.499\text{ км/год}$, т.е. увеличение максимальной скорости шара составляет всего 5% по сравнению с указанной в табл. 2.

Список литературы

- [1] *Cohen J.J., Schwartz L.L., Tewes H.A.* // Trans. Amer. Nucl. Soc. 1974. Vol. 18. P. 194-195.
- [2] *Emerman S.H., Turcotte D.L.* // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1983. Vol. 26. P. 1625-1630.
- [3] *Moallemi M.K., Viskanta R.* // J. Heat Transfer. Trans. ASME. 1985. Vol. 107. N 2. P. 186-195. Теплопередача. 1985. № 2. С. 188-195.
- [4] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.

Московский гидромелиоративный институт

Поступило в Редакцию
21 сентября 1993 г.