

01;10  
©1994 г.

## НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ В СЛОЕ ЭЛЕКТРОНОВ ОСЦИЛЛЯТОРОВ: РАЗБРОСЫ ВЕДУЩИХ ЦЕНТРОВ И СКОРОСТЕЙ ЧАСТИЦ

*В.Л.Братман, А.В.Савилов*

Исследована неустойчивость симметричных колебаний тонкого плоского слоя релятивистских электронов, движущихся в однородном магнитоэстатическом поле. Выведены упрощенные дифференциально-интегральные уравнения, описывающие развитие неустойчивости при позиционном разбросе центров осцилляций частиц, а также при разбросе их питч-углов и энергий. Показано, что последний тип разброса приводит к наиболее существенному снижению инкрементов и ограничению числа циклотронных гармоник, на которых развивается неустойчивость.

### Введение

Первоначально открытая применительно к циклотронным ускорителям заряженных частиц [1,2] неустойчивость отрицательной массы (НОМ) играет существенную роль в ряде электронных мазеров и в первую очередь в мазерах на циклотронном резонансе (см., например, [3-8]). Нарастание возмущения при НОМ связано с неизохронностью колебаний электронов, причем для ее развития частота колебаний частиц  $\Omega$  должна убывать с ростом их энергии  $\mathcal{E}$ . При таких условиях возникающая в потоке электронов-осцилляторов флуктуация плотности, ускоряя своим кулоновским полем идущие перед ней частицы и в то же время тормозя частицы, движущиеся за ней, увеличивается, притягивая к себе (по фазе колебаний) и те, и другие. Этот эффект в ряде случаев ведет к заметному увеличению инкрементов в МЦР, а также влияет на эффективность взаимодействия электронов с полем резонаторов и волноводов [9,10]. Кроме того, НОМ может, вообще говоря, неблагоприятно влиять на качество пучка при его движении от катода к пространству взаимодействия [11,12].

В данной работе исследуется влияние на НОМ таких эффектов, как разброс ведущих центров осцилляций частиц и разброс их скоростей. Оба эти эффекта уже рассматривались в литературе. Например, в [8] влияние позиционного разброса исследовалось численно, а

в [13-16] НОМ и влияние на нее разброса скоростей частиц исследовались методом кинетического уравнения применительно к толстому слою электронов-осцилляторов. В данной работе на основе метода усредненных уравнений движения [5,7] аналитически исследован наиболее важный для электронных мазеров случай тонкого электронного пучка. Этот метод позволяет также наиболее наглядно проследить механизм возникновения неустойчивости, а также влияние на него ряда важных факторов, присущих реальному эксперименту.

### Метод усредненных уравнений

Следуя [5-7], выведем сначала уравнения, описывающие НОМ для простейшей ситуации, когда скоростной и позиционный разбросы частиц отсутствуют. Рассмотрим для этого плоский и тонкий (имеющий толщину, примерно равную ларморовскому диаметру) электронный поток, движущийся вдоль стационарного однородного магнитного поля  $H z_0$ . В собственной системе потока, где электроны совершают только осцилляторное движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, поток представляет собой заряженный слой, составленный из циклотронных окружностей, каждая из которых в невозмущенном состоянии заполнена частицами равномерно по их фазам вращения (рис. 1,а). Такому распределению по фазам соответствует, очевидно, существенно неоднородное распределение частиц по координате  $x$  с обращением концентрации электронов в бесконечность на границах потока (в точках поворота частиц) (рис. 1,б). В то же время распределение частиц вдоль осей  $y$  и  $z$  считаем однородным.

В данной работе будем рассматривать случай слабoreлятивистских вращательных скоростей частиц  $\beta_{\perp}^2 \ll 1$  и малой средней концентрации слоя  $\alpha \ll 1$ . Здесь  $\beta_{\perp} = v_{\perp}/c$  — нормированная на скорость света невозмущенная скорость частиц,  $\alpha = \omega_p^2/\omega_H^2$  — нормированная концентрация частиц в плоскости симметрии слоя ( $x = 0$ ),  $\omega_p = \sqrt{4\pi N_0 e^2/m\gamma_0}$  — плазменная частота в плоскости  $x = 0$ ,  $\omega_H = eH/mc\gamma_0$  — невозмущенная циклотронная частота,  $\gamma_0$  — невозмущенный релятивистский масс-фактор. Будем в дальнейшем исследовать лишь симметричные (одномерные) возмущения слоя. Соответственно поле слоя обладает лишь одной компонентой  $E x_0$ , а уравнение движения одного электрона во внешнем магнитном поле и поле слоя имеет

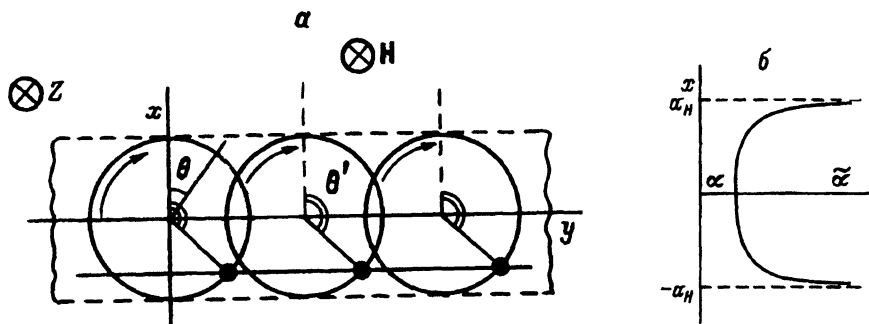


Рис. 1. Плоский тонкий слой электронов-осцилляторов (а) и распределение в нем концентрации электронов  $\tilde{\alpha}(x)$  (б).

вид

$$\frac{dm\gamma\mathbf{v}}{dt} = -eE(t)\mathbf{x}_0 - \frac{eH}{c}[\mathbf{v}, \mathbf{z}_0].$$

Для применения метода усреднения [5-7] перейдем от декартовых переменных  $v_x, v_y$  к переменным  $v_{\perp}$  и  $\theta$

$$v_x + iv_y = iv_{\perp} \exp(i\theta),$$

и, используя малость параметра  $\alpha$  (малость кулоновской силы в сравнении с силой Лоренца), усредним уравнение движения по быстрой фазе  $\theta$  [4-7]. Здесь  $\theta = \varphi + \int_0^t \Omega(\mathcal{E})dt$  — текущая фаза частицы,  $\varphi$  — ее начальная фаза. Кроме того, будем рассматривать асимптотическую ситуацию, когда из двух малых параметров  $\alpha$  и  $\beta_{\perp}^2$  первый много меньше второго. Такое предположение позволяет считать, что возмущение фазы электрона  $\theta$  вызвано главным образом релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии частицы [17,18]. Тогда, считая относительное изменение скорости электрона  $q = (v_{\perp}/v_{\perp 0}) - 1$  малым, получим следующую систему асимптотических нелинейных уравнений:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 1 - \beta_{\perp}^2 q, \quad (1)$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \alpha \operatorname{Im} \langle \mathcal{E} \exp(-i\theta) \rangle_{\theta}. \quad (2)$$

Здесь  $\tau = \omega_H t$  — нормированное время,

$$\mathcal{E} = \frac{-E}{4\pi e N_0 \alpha_0}$$

— действующее на частицу нормированное поле слоя,  $\alpha_0$  — ларморовский радиус. В качестве начальных для стационарного состояния будем использовать следующие условия:

$$q(0) = 0, \quad \theta(0) = \varphi, \quad (3)$$

где начальные фазы частиц равномерно распределены в интервале  $[0, 2\pi)$ .

Кулоновское поле  $\mathcal{E}(\tau, \varphi)$ , действующее на частицу с начальной фазой  $\varphi$ , удобно представить в виде суперпозиции полей подвижных тонких слоев ("плоскостей"), образованных частицами из интервалов начальных фаз  $\varphi', \varphi' + d\varphi'$  (рис. 1, а) [5-7],

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign}(x - x') d\varphi'. \quad (4)$$

Произведя в уравнении (2) усреднение кулоновской силы по фазе  $\theta$ , получим

$$\frac{d^2\theta(\tau, \varphi)}{d\tau^2} = -\frac{\alpha\beta_{\perp}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{\Delta\theta}{2} d\varphi', \quad (5)$$

где  $\Delta\theta(\tau, \varphi, \varphi') = \theta(\tau, \varphi) - \theta(\tau, \varphi')$  является медленной функцией времени  $\tau$  и периодической функцией фаз  $\varphi$  и  $\varphi'$  с периодом  $2\pi$ , определенной в интервале  $0 \leq \Delta\theta < 2\pi$ . При этом величина  $(\Delta\theta)/2$  является решением уравнения  $\cos \theta(\tau, \varphi) = \cos \theta(\tau, \varphi')$ , определяющего текущую фазу электрона  $\theta(\varphi)$ , при которой он пересекает плоскость, образованную электронами с начальными фазами  $\varphi'$ , и при которой, следовательно, кулоновская сила, действующая на него со стороны этой плоскости, меняет знак. Представим текущую фазу электрона  $\theta$  в виде суммы ее невозмущенного значения и малого возмущения

$$\theta(\tau, \varphi) = (\varphi + \tau) + \vartheta(\tau, \varphi). \quad (6)$$

Возмущение  $\vartheta$  является периодической по начальной фазе  $\varphi$  функцией с периодом  $2\pi$ , что позволяет разложить ее в ряд Фурье

$$\vartheta(\tau, \varphi) = \sum_n \theta_n(\tau) \exp(in\varphi).$$

После линеаризации уравнения (5) получаем простое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом для  $n$ -й гармоники возмущения

$$\frac{d^2 \theta_n}{d\tau^2} = \alpha \beta_{\perp}^2 \hat{\Gamma}_{n0}^2 \theta_n. \quad (7)$$

Здесь величины

$$\hat{\Gamma}_{n0}^2 = \frac{4n^2}{\pi(4n^2 - 1)}$$

получены разложением в ряд Фурье функции  $\cos(\Delta\theta/2)$  на отрезке  $\Delta\theta \in [0, 2\pi)$ .

$$\cos \frac{\Delta\theta}{2} = -i \sum_n \frac{\hat{\Gamma}_{n0}^2}{n} \exp(in\Delta\theta).$$

Из уравнения (7) получаем выражение для инкрементов на  $n$ -й гармонике циклотронной частоты [7]

$$\Gamma_{n0} = \sqrt{\alpha \beta_{\perp}^2} \hat{\Gamma}_{n0}, \quad (8)$$

описывающее неустойчивость отрицательной массы для помещенного в однородное магнитное поле тонкого слабoreлятивистского разреженного слоя в отсутствие разбросов скоростей и положений ведущих центров частиц. Согласно (8), при любых параметрах  $\alpha$  и  $\beta_{\perp}^2$  имеет место неустойчивость симметричных возмущений на всех гармониках циклотронной частоты (этот вывод справедлив для достаточно разреженного слоя, когда  $\alpha \ll \beta_{\perp}^2$  [7]).

## Позиционный разброс центров осцилляций частиц

Если центры циклотронного вращения электронов распределены по координате  $x$  с нормированной парциальной концентрацией  $\alpha(x)$ , то уравнение (2) обобщается следующим образом:

$$\frac{dq(\tau, \xi)}{d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\xi') \operatorname{Im} \langle \mathcal{E} \exp(-i\theta) \rangle_{\theta} d\xi', \quad (9)$$

где  $\xi = x/a_H$  — нормированная на невозмущенный циклотронный радиус безразмерная координата. Сила  $\mathcal{E}$ , действующая на электрон со стороны всей совокупности элементарных плоскостей, по-прежнему определяется выражением (4). После явного усреднения в (9) по быстрой фазе  $\theta$  получим

$$\frac{d^2\theta(\tau, \varphi, \xi)}{d\tau^2} = \frac{-\beta_1^2}{2\pi} \int_{S_{\xi}} \alpha(\xi') \int_{S_{\varphi}} P(\Delta\theta, \xi, \xi') \theta(\tau, \varphi', \xi') d\varphi' d\xi'. \quad (10)$$

Здесь

$$P(\Delta\theta, \xi, \xi') = \frac{\sin \Delta\theta}{\sqrt{2(1 - \cos \Delta\theta)}} \sqrt{\cos \varphi^* - \cos \Delta\theta}$$

— функция, описывающая усредненное воздействие на электрон с начальной фазой  $\varphi$ , осциллирующий вокруг ведущего центра с координатой  $\xi$ , со стороны плоскости частиц с начальными фазами  $\varphi'$ , осциллирующих относительно неподвижной плоскости с координатой  $\xi'$ ;  $\varphi^*$  возникает из решения уравнения, описывающего пересечение электрона и этой плоскости,

$$\xi + \cos \theta(\tau, \varphi, \xi) = \xi' + \cos \theta(\tau, \varphi', \xi').$$

При совпадении координат  $\xi$  и  $\xi'$  функция  $P$  переходит в  $\cos(\Delta\theta/2)$

$$\Delta\theta(\tau, \varphi, \varphi', \xi, \xi') = \theta(\tau, \varphi, \xi') - \theta(\tau, \varphi', \xi'),$$

$$\cos \varphi^* = 1 - \frac{\Delta\xi^2}{2}, \quad \Delta\xi = \xi - \xi',$$

$S_{\xi}(\Delta\xi)$  обозначает область координат  $\xi'$ , которые находятся в интервале  $|\Delta\xi| \leq 2$  и принадлежат частицам с циклотронными орбитами, пересекающими слой, где обращается частица с координатой  $\xi$ ;  $S_{\varphi}(\varphi)$  — область фаз  $\varphi'$ , удовлетворяющих условию  $\Delta\theta \in [\varphi^*, 2\pi - \varphi^*]$  (рис. 2). Эти две области определяют координаты  $\varphi'$  и  $\xi'$  электронных плоскостей, воздействующих на электрон с координатами  $\varphi, \xi$  с меняющейся по времени кулоновской силой, пропорциональной  $\operatorname{sign}(x-x')$ . Электроны, находящиеся вне этих областей, действуют на данный электрон с постоянной по времени силой и влияют лишь на его частоту обращения. Таким образом, для  $n$ -й гармоники возмущения имеем

$$\frac{d^2\theta_n(\tau, \xi)}{d\tau^2} = \beta_1^2 \int_{S_{\xi}} \alpha(\xi') P_n(\Delta\xi) \theta_n(\tau, \xi') d\xi', \quad (11)$$

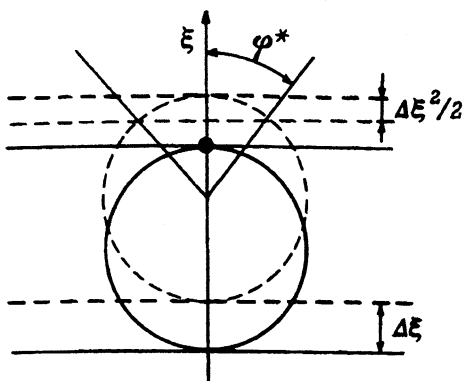


Рис. 2. Позиционный разброс ведущих центров частиц. Область фаз  $S_\varphi = [\varphi^*, 2\pi - \varphi^*]$ , объединяющая электронные плоскости фракции  $\xi'$ , которые воздействуют на частицу с начальной фазой  $\varphi$ , колеблющейся около координаты  $\xi$  с переменной кулоновской силой.

где

$$P_n(\Delta\xi) = \frac{n}{\pi} \int_{\varphi^*}^{\pi} P(\Delta\theta) \sin(n\Delta\theta) d\Delta\theta.$$

Эта модель допускает простой переход к однородному слою бесконечной толщины вдоль  $\xi$ , когда  $\alpha = \text{const}(\xi)$ ,  $\theta_n(\tau, \xi) = \theta_n(\tau)$ ,  $-\infty < \xi < +\infty$ . В этом случае уравнение (11) редуцируется к более простому уравнению

$$\frac{d^2\theta_n}{d\tau^2} = \alpha\beta_{\perp}^2\theta_n \int_{-2}^2 P_n(\Delta\xi) d\Delta\xi, \quad (12)$$

из которого следует что неустойчивость развивается только на первой гармонике циклотронной частоты. Инкремент при этом равен

$$\Gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}\alpha\beta_{\perp}^2}. \quad (13)$$

Учитывая, что парциальная концентрация  $\alpha$  связана с суммарной концентрацией  $\alpha_{\Sigma}$  соотношением  $\alpha_{\Sigma} = \pi\alpha$ , убеждаемся, что формула (13) совпадает с результатом, полученным методом кинетического уравнения [13,16] для заполненного электронами-осцилляторами бесконечного пространства.

Исследуем далее более подробно случай однородного слоя, имеющего толщину  $2\delta$  порядка циклотронного диаметра. Представляя гармоники возмущения в виде

$$\theta_n(\hat{\tau}, \xi) = \Phi_n(\xi) \exp(i\hat{\Gamma}_n \hat{\tau}),$$

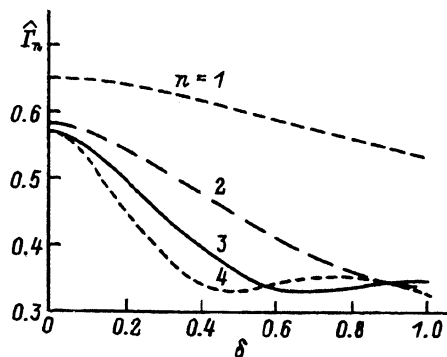


Рис. 3. Позиционный разброс ведущих центров частиц. Нормированный инкремент неустойчивости  $\hat{\Gamma}_n$  как функция толщины слоя  $2\delta$  на первых четырех циклотронных гармониках.

где  $\hat{\tau} = \sqrt{\alpha_0 \beta_{\perp}^2} \tau$ , получим интегральное уравнение

$$\hat{\Gamma}_n^2 \Phi_n(\xi) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} P_n(\Delta\xi) \Phi_n(\xi') d\xi', \quad (14)$$

которое относится к типу Гильберта-Шмидта (см., напрмер, [19]). Его собственное число, соответствующее максимальному при данном  $n$  значению  $\text{Re } \hat{\Gamma}_n$ , определяет инкремент на данной гармонике. Решая это уравнение численно, получаем зависимость нормированного инкремента  $\hat{\Gamma}_n$  от толщины слоя для различных гармоник (рис. 3). Немонотонная зависимость при  $n > 2$  может быть объяснена следующим образом. Как ясно из теоремы Гаусса и видно из уравнения (11), влияние позиционного разброса на неустойчивость связано с тем, что часть электронов обращается в непересекающихся слоях и перестает динамически воздействовать друг на друга. Рассмотрим, например, смещение электронов на циклотронной орбите для случая третьей гармоники возмущения, когда группировка частиц происходит около трех точек (рис. 4, а, точки 1, 3, 5). При этом, как легко убедиться, к центру 1 смещаются не только электроны, расположенные около него внутри интервала 6-2, но и частицы, которые находятся внутри интервала 3-5. В то же время электроны, расположенные внутри интервалов 2-3 и 5-6, отодвигаются от этого центра, снижая тем самым инкремент неустойчивости. Рассмотрим теперь влияние на группировку около точки 1 электронов другой фракции  $\xi' \neq \xi$  (рис. 4, б). Как было показано выше, только частицы с начальными фазами  $\varphi' \in [\varphi^*, 2\pi - \varphi^*]$  оказывают влияние на этот процесс. Следовательно, если расстояние между фракциями  $\delta$  увеличивается так, что фаза  $\varphi^*$  меняется в пределах от  $\pi/3$  до  $2\pi/3$ , то ослабляющие неустойчивость частицы исключаются из взаимодействия со сгустком 1 и, следовательно, инкремент неустойчивости начинает расти с ростом позиционного разброса.

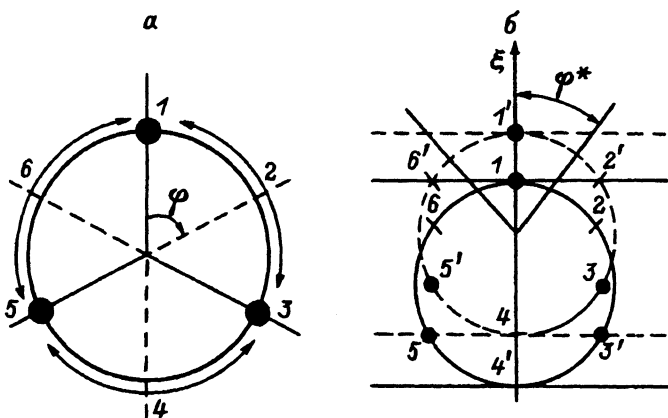


Рис. 4. Пояснение немонотонности зависимости инкремента от толщины слоя на высоких циклотронных гармониках.

а — группировка частиц на циклотронной орбите на третьей гармонике возмущения; б — область частиц фракции  $\xi'$ , не влияющих на развитие неустойчивости около точки 1.

## Разброс частиц по скоростям

Рассмотрим два различных вида разбросов по скоростям: “энергетический”, когда в лабораторной системе отсчета электроны имеют разные поперечные скорости при одинаковых продольных, и разброс по питч-углам, когда все частицы движутся с одинаковой по абсолютной величине скоростью, однако имеют разные продольную и поперечную составляющие. В случае энергетического разброса будем рассматривать поток в его собственной системе отсчета в виде совокупности электронных фракций, каждая из которых характеризуется нормированным невозмущенным значением  $u$  и осцилляторной скорости входящих в нее электронов

$$\frac{v_{\perp}}{\langle v_{\perp 0} \rangle} = u(1 + q),$$

где  $\langle v_{\perp 0} \rangle$  — усредненная по всем фракциям невозмущенная скорость.

Предположим для простоты, что эти фракции распределены равномерно в определенном интервале скоростей  $|u-1| \leq \varepsilon$ . Используя соотношения (1)–(4), после усреднения по быстрой фазе  $\theta$  получим в этом случае следующие уравнения движения для электронов разных фракций:

$$\frac{d^2\theta(\tau, \varphi, \omega)}{d\tau^2} = \frac{-\alpha_0 \beta_{\perp}^2}{8\pi\varepsilon} \int_{(1-\varepsilon)^2}^{(1+\varepsilon)^2} \int_0^{2\pi} U(\Delta\theta, w, w') \theta(\tau, \varphi', w') d\varphi' dw'. \quad (15)$$

Здесь  $w = u^2$ ,  $\Delta\theta(\tau, \varphi, \varphi', w, w') = \theta(\tau, \varphi, w) - \theta(\tau, \varphi', w')$ ,

$$U(\Delta\theta, w, w') = \left[ \frac{\sqrt{ww'}}{\sqrt{\frac{w}{w'} + \sqrt{\frac{w'}{w}} - 2 \cos \Delta\theta}} \right]^{1/2} \sin \Delta\theta$$

— функция, учитывающая разные циклотронные радиусы электронов разных фракций. Так как релятивистские циклотронные частоты также различаются, то представление (6) следует модифицировать

$$\theta(\tau, \varphi, w) = \varphi + \left(1 - \frac{\beta_{\perp}^2}{2} w\right) \tau + \sum_n \theta_n(\tau, w) \exp(in\varphi). \quad (16)$$

Тогда для  $n$ -й гармоники малого возмущения фазы имеем

$$\frac{d^2\theta_n(\hat{\tau}, w)}{d\hat{\tau}^2} = \frac{1}{4\varepsilon} \int_{(1-\varepsilon)^2}^{(1+\varepsilon)^2} U_n(w, w') \exp\left(\frac{in(w' - w)\hat{\tau}}{2s}\right) \theta_n(\hat{\tau}, w') dw'. \quad (17)$$

Здесь  $\hat{\tau} = \sqrt{\alpha_0 \beta_{\perp}^2} \tau$ ,  $s = \sqrt{\alpha_0} / \beta_{\perp}$ ,

$$U_n(w, w') = \frac{n}{\pi} \int_0^{\pi} U(\Delta\theta, w, w') \sin(n\Delta\theta) d\Delta\theta.$$



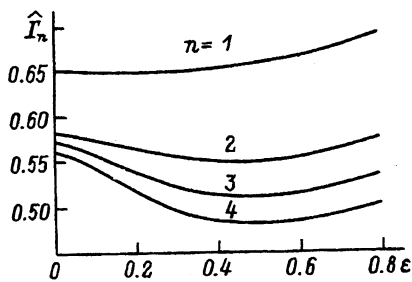


Рис. 5. Разброс частиц по питч-углам. Зависимость нормированного инкремента  $\hat{\Gamma}_n$  от характерной величины разброса  $\epsilon$  на первых четырех циклотронных гармониках.

В ядре уравнения (17) существенно по-разному проявляется роль двух факторов, определяющих влияние энергетического разброса на развитие неустойчивости отрицательной массы. Первый из них (описываемый функционалом  $U_n$ ) геометрический: он связан с различием радиусов циклотронных орбит электронов. Второй фактор описывается экспонентой от мнимого аргумента и является временным: из-за разных циклотронных частот имеет место увеличивающийся со временем сдвиг между невозмущенными фазами электронов, имеющих одинаковые начальные фазы и относящихся к разным фракциям.

Очевидно, что второй фактор отсутствует в случае разброса электронов потока по питч-углам, когда энергия всех частиц одинакова. Рассматривая этот тип разброса, легко понять, что если поперечные скорости частиц (в лабораторной системе отсчета) много меньше продольных и можно, пренебрегая различием в продольных скоростях, перейти к собственной системе отсчета потока, то уравнение (17) можно использовать, опустив в его ядре экспоненту (или формально устремив  $s$  к бесконечности). Тогда после подстановки

$$\theta_n(\hat{\tau}, w) = \Phi_n(w) \exp(\hat{\Gamma}_n \hat{\tau})$$

получим следующее интегральное уравнение Гильберта-Шмидта:

$$\hat{\Gamma}_n^2 \Phi_n(w) = \frac{1}{4\epsilon} \int_{(1-\epsilon)^2}^{(1+\epsilon)^2} U_n(w, w') \Phi_n(w') dw'. \quad (18)$$

Его решения  $\hat{\Gamma}_n(\epsilon)$ , которые соответствуют максимальным инкрементам (при фиксированном номере гармоники  $n$ ), приведены на рис. 5. Видно, что разброс частиц по питч-углам лишь очень слабо сказывается на неустойчивости отрицательной массы (неожиданное на первый взгляд увеличение  $\hat{\Gamma}_n(\epsilon)$  при большом разбросе  $\epsilon$  обусловлено известным [14] эффектом увеличения среднего по фракциям квадрата невозмущенной скорости ( $v_{10}^2$ )).

Вернемся теперь к энергетическому разбросу. Полученные выше результаты означают, что геометрический фактор оказывается мало существенным. Поэтому при анализе уравнения (17) будем сначала рассматривать влияние на неустойчивость только второго, временного фактора, пренебрегая зависимостью функционала  $U_n$  от невозмущенных скоростей фракций

$$U_n(w, w') \approx U_n(1, 1) = \hat{\Gamma}_{n0}^2,$$

где  $\hat{\Gamma}_{n0}$  — нормированный инкремент в отсутствие разброса (см. (7), (8)).

После подстановки

$$\theta_n(\hat{\tau}, w) = \Phi_n(w) \exp(\hat{\Gamma}_n(w)\hat{\tau})$$

в уравнение (16) получаем интегральное уравнение для амплитуды  $\Phi_n$

$$\Phi_n(w) = \frac{\hat{\Gamma}_{n0}^2}{4\varepsilon\hat{\Gamma}_n^2(w)} \int_{(1-\varepsilon)^2}^{(1+\varepsilon)^2} \Phi_n(w') dw' \quad (19)$$

и закон постоянства следующей величины:

$$\hat{\Gamma}_n(w) + \frac{in}{2s}w = \hat{\Gamma}_n(w') + \frac{in}{2s}w' = \text{const}(w). \quad (20)$$

Интегрируя (19) по  $w$  с учетом (20), найдем  $\text{const}(w)$ . В результате получим

$$\hat{\Gamma}_n(u) = i\frac{n}{2s}(\varepsilon^2 + 1 - u^2) + \sqrt{\hat{\Gamma}_{n0}^2 - \frac{n^2\varepsilon^2}{s^2}}. \quad (21)$$

Реальная часть  $\hat{\Gamma}_n(u)$  (инкремент) одинакова для всех фракций и уменьшается с увеличением разброса  $\varepsilon$  и номера гармоники  $n$ . При определенном разбросе

$$\varepsilon > \hat{\Gamma}_{n0} \frac{s}{n} \quad (22)$$

инкремент обращается в нуль. Близкий результат (отличающийся только коэффициентом перед  $s/n$ ) был получен в работе [16] для бесконечно толстого потока методом кинетического уравнения.

Как показывает численное интегрирование, учитывающее наряду с временным также и геометрический фактор в уравнении (17), формула (21) оказывается достаточно точной (рис. 6). Это означает, что основным фактором, определяющим влияние энергетического разброса на

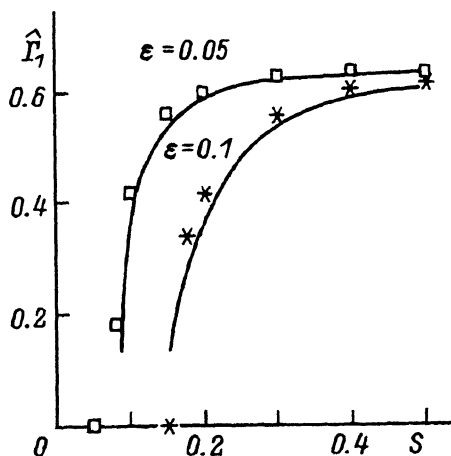


Рис. 6. Разброс частиц по энергиям. Нормированный инкремент на первой гармонике  $\hat{\Gamma}_1$  как функция параметра  $s$  при различных разбросах  $\varepsilon$ , найденный с учетом как временного, так и геометрического факторов, в сравнении с приближенной формулой (21).

неустойчивость отрицательной массы, является "перемешивание" соответствующих разным фракциям электронных сгустков, происходящее из-за разброса циклотронных частот. В свете этого формула (22) приобретает ясный смысл: неустойчивость не развивается, когда вызванный энергетическим разбросом сдвиг фаз между фракциями  $\Delta\varphi_n$ , образовавшийся за характерное время развития неустойчивости в моноскоростном потоке  $\hat{\tau} \sim \hat{\Gamma}_{n0}^{-1}$

$$\Delta\varphi_n \sim \frac{2\varepsilon}{s\hat{\Gamma}_{n0}},$$

достигает величины  $\pi/n$ . Тогда сгустки разных фракций оказываются в противофазе и их воздействие на остальные частицы взаимно компенсируется.

### Заключение

Отметим два основных вывода, которые можно сделать из полученных выше результатов. Во-первых, разброс частиц по энергиям влияет на развитие неустойчивости отрицательной массы гораздо существеннее, чем другие виды разбросов. Причиной этого является эффект "перемешивания", или расфазировки электронных сгустков, относящихся к разным энергетическим фракциям вследствие различия циклотронных частот электронов. Во-вторых, в то время как в отсутствие энергетического разброса все гармоники возмущения имеют близкие инкременты, при наличии даже небольшого разброса по энергиям развивается только неустойчивость на низших гармониках. Это означает, что даже в случае малого разброса им можно пренебрегать только для нескольких первых гармоник.

Эта работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 93-02-842.

### Список литературы

- [1] Nielsen C., Sessler A. // Rev. Sci. Instr. 1959. Vol. 30. N 2. P. 80-89.
- [2] Коломенский А.А., Лебедев А.Н. // Атомная энергия. 1959. Т. 7. № 6. С. 549-560.
- [3] Гапонов А.В., Петелин М.И., Юлатов В.К. // Изв. вузов. Радиофизика. Т. 10. № 9-10. С. 1414-1453.
- [4] Ковалев И.С., Кураев А.А., Колосов С.В., Слепян Г.Я. // ДАН БССР. 1973. Т. 17. № 5. С. 416-419.
- [5] Братман В.Л., Петелин М.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. № 10. С. 1538-1543.
- [6] Канавец В.И., Черепенин В.А. // РиЭ. 1975. Т. 20. № 12. С. 2539-2549.
- [7] Братман В.Л. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 10. С. 2030-2036.
- [8] Кураев А.А. Мощные электронные приборы: методы анализа и оптимизация параметров. М.: Радио и связь, 1986.
- [9] Hirshfield J.L. // Intern. J. Infrared and Millimeter Waves. 1981. V. 2. N 4. P. 695-704.
- [10] Kleva R.G., Antonsen T.M., Jr., Levush B. // Phys. Fluids. 1988. Vol. 31. N 2. P. 375-386.
- [11] Charbit P., Hercovici A., Mourier G. // Int. J. Electron. 1981. Vol. 51. P. 303-330.
- [12] Chen K.R., Chu K.R. // IEEE Trans. MTT. 1986. Vol. 34. N 1. P. 72-80.
- [13] Железняков В.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3. № 1. С. 57-66.
- [14] Железняков В.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3. № 2. С. 180-191.
- [15] Chu K.R., Lyu L.-H. // IEEE Trans. MTT. 1986. Vol. 34. N 6. P. 690-695.
- [16] Li H., Antonsen T.M., Jr. // Phys. Fluids. To be printed.

- [17] Братман В.Л. Канд. дис. Горький, 1977.  
[18] Братман В.Л., Пылин А.И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1989. Т. 32. № 11.  
С. 1408-1416.  
[19] Соболев Л.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Институт прикладной физики  
Нижний Новгород

Поступило в Редакцию  
28 октября 1993 г.

---