1994 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 64, в. 7
1994 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 64, N 7

01;03;07;12


# ПЕРЕДАЧА ЛАЗЕРНОЙ ЭНЕРГИИ ЧЕРЕЗ ТУРБУЛЕНТНУЮ АТМОСФЕРУ НА УДАЛЕННЫЕ ДВИЖУЩИЕСЯ ОБЪЕКТЫ

*Ф.П.Барышников*

(Поступило в Редакцию 22 ноября 1993 г.)

Рассмотрено нарушение когерентности электромагнитной волны, отраженной от фазово-сопрягающего зеркала при дополнительном повороте луча, необходимом для сопровождения движущегося приемника излучения. При рассмотрении используются модель турбулентности Колмогорова–Обухова и аналитическая аппроксимация Фрида для структурной функции показателя преломления. Получены простые выражения для условия сохранения когерентности светового пучка и показано, что в некоторых случаях не удается компенсировать атмосферные искажения волны и обеспечить эффективную передачу энергии на большие расстояния из-за недопустимого уширения светового пучка.

## Введение

Лазерная доставка энергии на космические объекты — задача весьма актуальная по нескольким причинам. Во-первых, вследствие деградации солнечных батарей и аккумуляторов эффективность работы, например, спутников связи резко снижается. Во-вторых, необходимость корректировки орбиты геостационарных спутников требует регулярных расходов энергии. В-третьих, весьма привлекательным является предложение использовать лазерную энергию для перевода спутников на более высокие орбиты [1]. Проблема в деталях обсуждалась на совещании [2], где было предложено использовать для передачи энергии лазер на свободных электронах (ЛСЭ) [3]. Перестройка длины волны в ЛСЭ обеспечивает прохождение через окна прозрачности атмосферы, одно из которых находится вблизи максимума эффективности используемых в настоящее время полупроводниковых фотоэлектрических преобразователей (длина волны 0.84 мкм). Система должна работать в следующем режиме. Лазер — маяк, установленный на спутнике, посылает запрос на Землю, где фаза сигнала, искаженного турбулентностью, анализируется, обращается адаптивным зеркалом, и усиленный сигнал возвращается тем же путем в точку запроса. Поскольку в [1,2] предполагается использовать зеркала большого диаметра ~ 10–15 м, то даже для геостационарных спутников не должно быть трудностей с фокусированием излучения на приемном зеркале с диаметром, имеющим примерно те же размеры, что и передающее зеркало. В настоящей работе рассмотрен эффект, вызванный необходимостью перенацеливать излучение (поворачивать луч) из-за угловой аберрации [4,с. 28]. Так, геостационарный спутник, находящийся в зените, виден на Земле с отставанием от вращения на угол $(V_S - V_E)/c$, где $V_S$, $V_E$ — линейные скорости спутника и поверхности Земли соответственно, тогда как излучение, возвращаемое на спутник, должно быть направлено под тем же углом, но уже с опережением вращения. Без дополнительного смещения фазовосопряженный луч пройдет мимо приемного зеркала спутника, с другой стороны, значительное смещение обратного луча, компенсирующее угловую аберрацию, может привести к неполному восстановлению волнового фронта и недопустимому уширению светового пучка.

Структура работы такова. После раздела Введение обсуждается влияние атмосферной турбулентности на передачу лазерной энергии. Затем анализируется природа отставания обращенного луча и определяется характерный угол отставания. При определении корреляционной функции излучения, прошедшего атмосферу в прямом и обратном направлениях, используется приближение геометрической оптики и рассматриваются два случая: параллельное смещение обратного луча и угловое смещение. В дальнейшем для расчета корреляционной функции применяется модель турбулентности Колмогорова и аналитическая аппроксимация Фрида для структурной константы показателя преломления. Выражения для дисперсии фазы и корреляционной функции применяются для определения допустимого смещения луча, при котором еще возможна эффективная передача энергии. При этом аппроксимация Фрида позволяет в наглядной форме проанализировать зависимость эффекта от высоты расположения силового излучателя.

## Роль атмосферной турбулентности при передаче энергии на большие расстояния

Флуктуации показателя преломления воздуха приводят к стохастизации фазы пучка. Хорошо известно, что радиус когерентности фазы волны в турбулентной среде уменьшается с расстоянием [5]. В случаях, когда радиус когерентности становится меньше, чем размер пучка, дальнейшая эволюция пучка определяется уже не размером пучка, а радиусом когерентности. Таким образом, увеличение размеров передающих зеркал не приведет к приемлемой фокусировке излучения на принимающем зеркале. Оценим, следуя [5], величину радиуса когерентности для неограниченной плоской волны. Для флуктуации фазы имеем в приближении геометрической оптики

$$\varphi \simeq \frac{k}{2} \int_0^z \varepsilon(\mathbf{r}) ds, \tag{1}$$

где $\varepsilon(\mathbf{r})$ — флуктуации показателя преломления, $\mathbf{r}$ — координата, интегрирование в (1) проводится вдоль пути луча до положения $z$.

Из (1) можем получить для корреляционной функции фазы $\Psi(\boldsymbol{\rho}, z) = \langle \varphi(\mathbf{r}+\boldsymbol{\rho}, z) \cdot \varphi(\mathbf{r}, z) \rangle$

$$\Psi(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{z}{2} \int_0^\infty \Psi(\boldsymbol{\rho}, \zeta) d\zeta, \tag{2}$$

где угловые скобки обозначают усреднение по флуктуациям, а $\Psi_\varepsilon$ — корреляционная функция показателя преломления.

Используя аппроксимацию [5,с. 287], основанную на модели турбулентности Колмогорова–Обухова, находим дисперсию фазы $\sigma^2$ и радиус когерентности фазы $r_0$

$$\sigma^2 \simeq k^2 \cdot z \cdot C_n^2 \cdot L_0^{5/3}/10, \quad r_0 \simeq \left(k^2 \cdot C_n^2 \cdot z\right)^{-3/5}. \tag{3}$$

Здесь $k$ — волновой вектор излучения, $C_n^2$ — структурная константа показателя преломления, $L_0$ — внешний радиус турбулентности. Полагая $k \sim 10^7\,\text{м}^{-1}$, $C_n^2 \sim 10^{-14}\,\text{м}^{-2/3}$, $L_0 \sim 1\,\text{м}$, $z \sim 10^4\,\text{м}$, получаем $\sigma^2 \sim 10^3$, $r_0 \sim 10\,\text{м}$. Столь значительная дисперсия фазы и столь малый радиус когерентности фазы делают невозможным компактное распространение излучения на большие расстояния, поскольку эволюция пучка при этом подобна эволюции пучка, прошедшего через отверстие $r_0$. Одним из путей решения этой проблемы является использование адаптивной оптики [6], компенсирующей фазовые искажения. Так, в работе [1] для передач излучения предлагается использовать схему с обращением волнового фронта (ОВФ) излучения от маяка. Сигнал от маяка анализируется, усиливается, фаза его обращается, после чего он возвращается обратно с последовательным восстановлением фазы. Как следует из предыдущих оценок, использование ОВФ является абсолютно необходимым для передачи излучения, прошедшего турбулентную атмосферу, на большие расстояния.

## Роль угловой аберрации при передаче энергии на движущиеся объекты

Везде в настоящей работе рассматриваются источник энергии (лазер) на экваторе и приемник энергии (спутник), находящийся в зените в момент отправления запроса. Такое расположение не только делает изложение наглядным, но и является максимально благоприятным с точки зрения укорочения пути луча в атмосфере. Инерциальные системы, в рассматриваемый момент связанные либо с земной поверхностью, либо с космическим аппаратом, допускают применение преобразования Лоренца для волнового вектора $\mathbf{k}$, являющего частью 4-вектора [4]

$$k_\parallel = \frac{k'_\parallel + V \cdot \omega/c}{\left(1 - (V/c)^2\right)^{1/2}}, \quad k_\perp = k'_\perp, \tag{4}$$

где $k_\parallel$ и $k_\perp$ — компоненты волнового вектора вдоль и поперек вектора скорости $V$ инерциальной системы.

Поскольку нас будут интересовать эффекты первого порядка по отношению $V/c$, то запишем (4) в виде, более удобном для дальнейшего применения,

$$\vartheta = \vartheta' + V/c, \tag{5}$$

где $\vartheta \simeq k_{\|}/k$, $\vartheta' \simeq k'_{\|}/k'$.

Используя (5), получаем для угла $\gamma$ между направлениями прихода $\beta_1$ и отправления $\beta_2$ сигнала в системе станции

$$\gamma = \beta'_1 + \beta'_2 = \beta_1 + \beta_2 - 2V_E/c = 2(V_S - V_E)/c. \tag{6}$$

Напомним, что при ОВФ отраженный луч в системе, связанной с ОВФ зеркалом, отражается в направлении падения [6]. Главный вывод из (6) состоит в том, что направление фазово-сопряженного сигнала $(-\beta'_1)$ отличается от направления попадания на величину $\gamma$. Для линейного смещения $D$ луча от положения спутника на высоте Н имеем

$$D \simeq \gamma \cdot H. \tag{7}$$

Оценим численные значения углового и линейного смещения (6) и (7). Для спутника, находящегося на круговой орбите, $V_S = V_0 \cdot (1 + H_0/R)^{-1/2}$, где $R_0$ — радиус Земли, $V_0$ — первая космическая скорость. Для малых высот $H \ll R_0$, например для $H = 1000$ км, имеем

$$\gamma \sim 5 \cdot 10^{-5}\ \text{рад}, \quad D \sim 50\ \text{м}. \tag{8}$$

Для больших высот, например, для геостационарного спутника из (6) и (7) имеем

$$\gamma \sim 2 \cdot 10^{-5}\ \text{рад}, \quad D \sim 700\ \text{м}. \tag{8}$$

Столь значительное линейное смещение луча делает затруднительной передачу энергии на космические объекты, особенно на высокие орбиты.

## Замечания об используемых приближениях

Уравнение для амплитуды электромагнитного поля $u(\mathbf{r})$ в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\Delta u + k^2 \cdot \varepsilon(\mathbf{r}) \cdot u = 0. \tag{9}$$

В пределе малых длин волн и малых флуктуаций из (9) следует выражение (1) для флуктуации фазы

$$\varphi = \frac{k}{2} \int\limits_0^z \tilde{\varepsilon}(x, y, z')dz', \tag{10}$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon$.

В (10) предполагается, что среднее значение показателя преломления равно единице, а интегрирование производится вдоль $z$-координаты. Метод геометрической оптики (МГО), использованный при получении (10), в случае неоднородностей с фиксированным размером $l$ требует выполнения условия малости френелевской длины $(\lambda \cdot L)^{1/2}$ по сравнению с размером неоднородностей ($L$ — длина трассы)

$$\lambda \cdot L \lesssim l^2. \tag{11}$$

В случае турбулентности с широким спектром неоднородностей в неравенство (11) обычно подставляют минимальный размер неоднородностей. В случае атмосферной турбулентности внутренний масштаб турбулентности в модели Колмогорова $l_0 \sim 1$ см [5,с. 289]. При этом из (11) для длины волны 1 мкм следует $L \lesssim 100$ м.

Поскольку высота турбулентно активного слоя атмосферы составляет $H \sim 10$ км, то на первый взгляд применение МГО представляется необоснованным. Фактически спектр атмосферной турбулентности обладает той особенностью, что в нем слабо представлены мелкомасштабные неоднородности. Так, выражение для дисперсии фазы, полученное с учетом дифракционных эффектов (при выполнении неравенства, обратного (11)), имеет ту же параметрическую зависимость и оказывается отличным от выражения МГО лишь численным множителем 2. Таким образом, для качественных оценок фазовых характеристик МГО может быть использован и за пределами, устанавливаемыми неравенством (11). Остановимся на влиянии амплитудных флуктуаций. Для одномасштабных флуктуаций отношение дисперсии уровня и дисперсии фазы, равное

$$R \simeq \left(\lambda \cdot L / l^2\right)^2, \tag{12}$$

немало́ за пределами, устанавливаемыми неравенством (11). Для реального спектра атмосферной турбулентности вместо (12) имеем [5,с. 290]

$$R \simeq \left(\lambda \cdot L / l_\varepsilon^2\right)^2, \tag{13}$$

где $l_\varepsilon = \left(l_0^7 \cdot L_0^5\right)^{1/12}$.

В приземном слое атмосферы $l_0 \sim 1$ см, $L_0 \sim 1$ м и величина $l_\varepsilon \sim 10$ см. При этом для высоты до 10 км и для длины волны $\lambda \lesssim 1$ мкм отношение $R \lesssim 1$. Таким образом, до высот в пределах турбулентно активной атмосферы мы будем пренебрегать амплитудными флуктуациями, полагая существенным лишь фазовые флуктуации. Для оценки фазовых флуктуаций мы будем применять МГО, используя тот факт, что пределы применимости метода существенно шире, чем это следует из элементарных оценок (11).

## Фаза и функция когерентности электромагнитного поля

Система, передающая излучение на удаленные объекты, должна не только обеспечить прохождение излучения через турбулентную атмосферу без потери когерентности, но и фокусировать его на приемном зеркале спутника. Для решения задачи фокусировки могут быть использованы, как это предполагается в [1,2], зеркала большого диаметра. Если радиус когерентности лазерного излучения превышает радиус зеркала, то эволюция лазерного пучка с длиной волны $\lambda$ определяется дифракцией на апертуре передающего зеркала $D_i$. Угол дифракции $\vartheta \sim \lambda/D_i$, размер пятна $D_s$ в плоскости приемного зеркала $\sim \lambda \cdot L/D_i$. Естественно предположить, что ($D_f$ — размер приемного зеркала)

$$D_s \lesssim D_f \quad \text{или} \quad D_i \cdot D_f \gtrsim \lambda \cdot L. \tag{14}$$

Полагая $D_s \sim D_i \sim D_f$, $\lambda \sim 10^{-6}$ м, $L \sim 4 \cdot 10^7$ м, получаем $D_s \sim \sim \sqrt{\lambda \cdot L} \sim 7$ м. В [1,2] предложено использовать зеркала с диаметром $\sim 10{-}15$ м.

Атмосферная турбулентность является серьезным препятствием для передачи энергии на большое расстояние. Использование адаптивной оптики позволяет в принципе решить эту проблему. Если излучение возвращается обратно точно по пути прихода, то обращенная фаза последовательно восстанавливается до значения, которое она имела до вхождения в атмосферу. Затем луч возвращается в точку запроса, которая однако из-за угловой аберрации не совпадает с фактическим положением спутника. Естественным является введение дополнительного смещения луча, компенсирующего угловую аберрацию и запаздывание. Поскольку обратный луч при этом возвращается по новой траектории, то восстановление фазы волны оказывается неполным, когерентность волны может нарушиться, в результате чего не удается довести энергию волны до спутника из-за дифракционного расплывания. Как показано выше, характерные углы запаздывания составляют величину $(2{-}5) \cdot 10^{-5}$ рад, что соответствует линейному смещению на высоте 10 км $\sim 20{-}50$ см. Это смещение может превышать радиус когерентности плоской волны на том же расстоянии. Ясно, что необходим анализ с учетом реальной статистики атмосферы для определения условий восстановления волнового фронта для эффективной передачи энергии. В пренебрежении амплитудными флуктуациями для поля волны $u$ запишем

$$u = u_0 \cdot \exp(i\varphi). \tag{15}$$

В дальнейшем будем полагать $u_0 = 1$. Определим функцию когерентности поля

$$K(\rho, z) = \langle u(\mathbf{r}_1) \cdot u^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \exp(i(\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle, \tag{16}$$

$\varphi_{1,2} = \varphi(\mathbf{r}_{1,2})$, $\rho = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Поскольку масштаб турбулентных флуктуаций заведомо меньше длины трассы, то можно считать рассеяние множественным, а случайный процесс, описывающий флуктуации, гауссовым. В приближении МГО фаза является линейным функционалом флуктуаций диэлектрической проницаемости, поэтому

$$K = \exp\left[-\frac{1}{2}\left\langle (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \right\rangle\right]. \tag{17}$$

Если ввести структурную функцию фазы $D(\rho) = \left\langle (\varphi_1 - \varphi_2)^2 \right\rangle$, то выражение (17) может быть представлено в виде

$$K = \exp\left(-\frac{1}{2}D(\rho)\right). \tag{18}$$

Учитывая, что структурная функция фазы связана с корреляционной функцией фазы соотношением

$$D(\rho) = 2 \cdot (\Psi(0) - \Psi(\rho)), \tag{19}$$

получаем окончательное выражение для корреляционной функции

$$K = \exp[\Psi(\rho) - \Psi(0)]. \tag{20}$$

Таким образом, при сделанных допущениях задача об определении функции когерентности электромагнитного поля сводится к определению структурной функции или корреляционной функции фазы. В приближении МГО фаза волны, прошедшей трассу в прямом и обратном направлениях и испытавшей отражение от зеркала, обращающего волновой фронт, имеет вид (см. (10)).

$$\varphi = \frac{k}{2}\int_0^L [\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r} + \mathbf{a}(z), z) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r} - \mathbf{a}(z), z)]dz. \tag{21}$$

В (21) учтено взаимное смещение прямого и обратного лучей. Используя это выражение, получаем для коэффициента корреляции фазы

$$\Psi = \frac{k^2}{4}\int_0^L\int_0^L dz_1 \cdot dz_2 \Big[\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) -$$

$$-\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) - \Psi_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\Big], \tag{22}$$

где $\mathbf{a}_{1,2} = \mathbf{a}(z_{1,2})$.

Введем обычным образом новые переменные $\zeta = z_1 - z_2$, $\eta = (z_1 + z_2)/2$. Поскольку масштаб $l_k$ изменения корреляционной функции мал по сравнению с длиной трассы $L$, т.е. $l_k \ll L$, то мы пренебрежем $\mathbf{a}(\eta \pm (\zeta/2))$ различием (для параллельного смещения это верно всегда) и распространим интеграл по $\zeta$ до бесконечности. Используя соотношение

$$\Psi(\rho) = \frac{1}{2}[D(\infty) - D(\rho)], \tag{23}$$

получим

$$\Psi = \frac{k^2}{4}\int_0^L d\eta\int_0^\infty d\zeta[D_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}(\eta), \zeta) + D_\varepsilon(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{a}(\eta), \zeta) - 2D_\varepsilon(\rho, \zeta)]. \tag{24}$$

Выражение (24) является основным для дальнейшего рассмотрения.

## Модель турбулентности Колмогорова–Обухова

Флуктуации диэлектрической проницаемости в атмосфере характеризуются структурной функцией, имеющей в инерционном интервале вид [5],

$$D_\varepsilon(\rho) = C_n^2 \cdot \rho^{2/3}, \tag{25}$$

где $C_n^2$ — структурная константа показателя преломления.

В приближении локальной однородности $C_n^2$ является функцией высоты.

$$C_n^2 = C_n^2(\eta). \tag{26}$$

Формула (24) для корреляционной функции фазы при этом запишется в виде

$$\Psi = \frac{k^2}{4} \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) \int_0^\infty d\zeta \left\{ |\boldsymbol{\rho} + 2\mathbf{a}, \zeta|^{2/3} + |\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{a}, \zeta|^{2/3} - 2|\rho, \zeta|^{2/3} \right\}. \tag{27}$$

Здесь $|\mathbf{r}|$ обозначает модуль вектора $\mathbf{r}$. В (27) каждый член в отдельности расходится при интегрировании по $\zeta$, но в целом интеграл является сходящимся и может быть вычислен в конечном виде

$$\Psi = \alpha k^2 \int_0^L d\eta C_n^2(\eta) \left\{ |\boldsymbol{\rho} + 2\mathbf{a}|^{5/3} + |\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{a}|^{5/3} - 2\rho^{5/3} \right\}, \tag{28}$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{20} \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)},$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция [7].

Дальнейшее упрощение выражения для корреляционной функции фазы возможно при рассмотрении конкретных случаев распространения излучения в атмосфере.

## Параллельное смещение обратного луча

Модель параллельного смещения обратного луча позволяет получить в конечной форме выражение для корреляционной функции фазы и понять качественно характер восстановления фазы волны. Эта модель, возможно, имеет самостоятельный интерес для анализа отражения излучения от сегментированного адаптивного зеркала и от ретрозеркал — отражателей с перпендикулярными отражающими гранями. В рассматриваемой модели величина $\mathbf{a}$ не зависит от $\eta$, поэтому (28) упрощается

$$\Psi(\rho) = \left( \alpha k^2 \int_0^L C_n^2(\eta) d\eta \right) \cdot \left\{ |\boldsymbol{\rho} + 2\mathbf{a}|^{5/3} + |\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{a}|^{5/3} - 2\rho^{5/3} \right\}. \tag{29}$$

Для дисперсии фазы $\sigma^2 = \Psi(0)$ из (29) следует

$$\Psi(\rho) = \left(\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta) d\eta\right) \cdot \left\{|\boldsymbol{\rho} + 2\mathbf{a}|^{5/3} + |\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{a}|^{5/3} - 2\rho^{5/3}\right\}. \tag{30}$$

Из (15) для среднего поля следует

$$\bar{u} = \exp(-\sigma^2/2), \tag{31}$$

т.е. дисперсия фазы является мерой трансформации регулярной части поля в рассеянную. Статистика поля определяется корреляционной функцией (29). В пределе $\sigma^2 \ll 1$ рассеяние мало́ и эволюция излучения, прошедшего активный слой атмосферы, определяется только дифракцией на апертуре отражающего зеркала. В общем случае

$$K = \exp\left[-\sigma^2 \cdot f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a})\right], \tag{32}$$

где введена безразмерная функция

$$f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) = 1 + \rho^{5/3} \Big/ |2\mathbf{a}|^{5/3} - \left(|\boldsymbol{\rho} + 2\mathbf{a}|^{5/3} + |\boldsymbol{\rho} - 2\mathbf{a}|^{5/3}\right) \Big/ |2\mathbf{a}|^{5/3}. \tag{33}$$

Поскольку мы предполагаем $\sigma^2 \gg 1$, то эффективные значения $\rho_{\text{эфф}} \ll a$ и можно разложить $f$ по малому параметру $\rho/|2\mathbf{a}|$,

$$f(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{a}) \simeq \rho^{5/3} \Big/ |2\mathbf{a}|^{5/3}. \tag{34}$$

Используя (33), получаем из (32)

$$K = \exp\left[-(\rho/\rho_0)^{5/3}\right],$$

$$\rho_0 = \left(2\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta) d\eta\right)^{-3/5}. \tag{35}$$

Величина $\rho_0$ определяет радиус когерентности поля.

Запишем также условие малости рассеяния излучения в атмосфере

$$\sigma^2 = |a/a^*|^{5/3} \lesssim 1, \tag{36}$$

где $2a^* = \rho_0$.

## Поворот обратного луча при горизонтальном распространении

При горизонтальном распространении $C_n^2(\eta) = \text{const}$. Мы приведем выражение для $\gamma \parallel \boldsymbol{\rho}$, где $\gamma$ — угол поворота луча, при этом соответствующий интеграл вычисляется точно. Для $\gamma \perp \boldsymbol{\rho}$ результаты тоже достаточно просты, хотя и не выражаются в конечном виде, и качественно совпадают со случаем $\gamma \parallel \boldsymbol{\rho}$. При вычислении соответствующих выражений в формулу (28) следует подставлять величину $2\mathbf{a} = \gamma\eta$. Вычислим вначале дисперсию фазы. Вынося в (28) $C_n^2$ за знак интеграла и подставляя $\rho = 0$, получим

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}\alpha C_n^2 \gamma^{5/3} L^{8/3} k^2 = (\gamma/\gamma^*)^{5/3},$$

$$\gamma^* = \frac{3}{4}\alpha C_n^2 L^{8/3}. \tag{37}$$

Для корреляционной функции фазы следует

$$\Psi = \sigma^2 f(\rho/\gamma L),$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{(1+x)^{8/3} + \operatorname{sign}(1-x)\cdot|1-x|^{8/3} - 2x^{8/3}\right\}. \tag{38}$$

Выражение для корреляционной функции поля получаем из (38)

$$K = \exp\left\{-\left(\frac{\gamma}{\gamma^*}\right)^{5/3}\left[1 - f(\rho/\gamma L)\right]\right\}. \tag{39}$$

Для $\sigma^2 \gg 1$ эффективные значения $\rho_{\text{эфф}} \ll \gamma L$ и функция когерентности поля принимает вид

$$K = \exp\left[-(\rho/\rho_0)^{5/3}\right], \tag{40}$$

где $\rho_0$ фактически совпадает с (35).

## Поворот обратного луча при вертикальном распространении

При вертикальном распространении необходимо учитывать зависимость функции $C_n^2(\eta)$ от высоты. Запишем общее выражение для корреляционной функции фазы

$$\Psi = \alpha k^2 \int_0^L d\eta C_n^2(\eta)\left\{|\boldsymbol{\rho} + \gamma\eta|^{5/3} + |\boldsymbol{\rho} - \gamma\eta|^{5/3} - 2\rho^{5/3}\right\}. \tag{41}$$

Для дисперсии фазы из (41) сразу получаем

$$\sigma^2 2\alpha\gamma^{5/3}k^2 \int_0^L C_n^2(\eta)\eta^{5/3} d\eta = (\gamma/\gamma^*)^{5/3},$$

$$\gamma^* = \left( 2\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta)\eta^{5/3} d\eta \right)^{-3/5} . \tag{42}$$

Корреляционную функцию фазы представим в виде

$$\Psi = 2\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta)(\gamma\eta)^{5/3} f(\rho/\gamma\eta, \vartheta) d\eta,$$

$$f(x,\vartheta) = 0.5 \cdot \left[ \left(x^2 + 2x\cos\vartheta + 1\right)^{5/6} + \left(x^2 - 2x\cos\vartheta + 1\right)^{5/6} \right] - x^{5/3}, \tag{43}$$

где $\vartheta$ — угол между векторами $\boldsymbol{\gamma}$ и $\boldsymbol{\rho}$.

Для корреляционной функции поля из (43) следует

$$K = \exp\left\{ -2\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta)(\gamma\eta)^{5/3}[1 - f(\rho/\gamma\eta, \vartheta)] d\eta \right\}. \tag{44}$$

Для $\sigma^2 \gg 1$ получаем

$$K = \exp\left[ -(\rho/\rho)^{5/3} \right], \tag{45}$$

где $\rho_0 = \quad 2\alpha k^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta) d\eta \quad {}^{-3/5} .$

Таким образом, во всех рассмотренных примерах мы получаем одинаковые выражения для корреляционной функции поля в пределе больших фазовых дисперсий. При этом величина смещения обратного луча входит только в выражение для дисперсии фазы и в пределе $\sigma^2 \gg 1$ выпадает из выражений для корреляционной функции поля. Это обстоятельство не является удивительным, поскольку большая дисперсия фазы отвечает значительным смещениям обратного луча, при котором величина смещения уже не играет роли. Так, выражение для структурной функции фазы соответствует структурной функции однократного прохода с удвоенной длиной.

## Аппроксимация Фрида, оценка допустимого смещения обратного луча

Как это следует из предыдущего раздела, в пределе большой дисперсии $\sigma^2 \gg 1$ радиус когерентности излучения становится малым, что препятствует передаче энергии на удаленные объекты. Условие малости рассеяния будем записывать в виде

$$\sigma^2 \ll \sigma_0^2, \quad \sigma_0^2 = 1. \tag{46}$$

Это условие позволит определить характерные допустимые угловые и линейные смещения обратного луча. Во многих случаях условие (46) является трудно выполнимым в приземной атмосфере. Представляет практический интерес расположение силового излучателя на большой высоте. Быстрое уменьшение структурной константы с высотой облегчает выполнение (46). Учет зависимости от высоты во всяком случае необходим при вертикальном распространении луча. Фрид в радоте [8] в результате анализа экспериментальных данных предложил эмпирическую формулу, описывающую зависимость структурной константы от высоты

$$C_n^2(h) = C^2 \cdot \varphi(h/h_0), \tag{47}$$

где $\varphi(x) = x^{-1/3}\exp(-x)$, $h_0 = 3200$ м, $h$ — высота, $C^2 = 4.2 \cdot 10^{-14}/h_0^{-1/3} = 0.285 \cdot 10^{-14}$ м.

Рассмотрим вначале условие (46) для случая праллельного смещения обратного луча. Из соотношений (30) и (36) получаем для критического значения $2a^*$

$$2a^* = \left(2\alpha k^2 C_0^2\right)^{-3/5}, \quad C_0^2 \int\limits_0^L C_n^2(\eta)d\eta. \tag{48}$$

Для горизонтального распространения

$$C_n^2 = C^2\varphi(h/h_0)L. \tag{49}$$

Для вертикального распространения при условии $L \gtrsim 1$ получаем

$$C_0^2 \simeq C^2 h_0 \varphi(h/h_0). \tag{50}$$

Подставляя $\alpha \approx 0.364$, $\lambda \simeq 0.84$ мкм, получим для вертикального распространения

$$2a^* \simeq 0.06\left[\varphi(h/h_0)\right]^{-3/5}, (\text{м}). \tag{51}$$

Для малых высот, где $\varphi \sim 1$, допустимое смещение составляет величину порядка нескольких сантиметров. Эта величина, естественно, может быть увеличена расположением излучателя на большей высоте. Отметим, что формулу (51) можно использовать также для оценки доспустимых размеров ретрозеркал и сегментов адаптивных зеркал, но мы не будем здесь останавливаться на этом вопросе.

Перейдем к рассмотрению углового смещения луча при горизонтальном распространении. Из (37), полагая $C_n^2 \sim 10^{-14}$ м$^{-2/3}$, $L \sim 10^4$, получаем для $\lambda \simeq 0.84$ мкм

$$\gamma^* \simeq 5 \cdot 10^{-6}\left[\varphi(h/h_0)\right]^{-3/5}, \text{рад}. \tag{52}$$

Величина критического угла, полученная из простых модельных представлений, оказывается сравнимой с характерными углами аберрации (6). Ясно, что для уменьшения влияния рассеяния необходимо увеличивать высоту расположения силового излучателя.

Перейдем к рассмотрению вертикального распространения при угловом смещении луча. Запишем выражение для критического угла ($h \gtrsim h_0$)

$$\gamma^*(h) = \gamma^*(0)\left[(h_0/h)^{1/3}\exp(-h/h_0)\Gamma(8/3)/\Gamma(7/3)\right]^{-3/5},$$

$$\gamma^*(0) = \left(2\alpha k^2 C^2 h_0^{8/3}\Gamma(7/3)\right)^{-3/5}. \qquad (53)$$

Здесь $\gamma^*(0)$ — критический угол для нулевой высоты излучателя. Величина $\gamma^*(0)$, как и в (52), сравнима с характерными углами аберрации. Для заданного угла аберрации можем записать выражение для определения критической высоты расположения силового лазера, $x = h/h_0$

$$x^{1/3}\exp(x) = [\Gamma(8/3)/\Gamma(7/3)]\left(\gamma_{\text{абер}}/\gamma^*(0)\right)^{5/3}. \qquad (54)$$

Так, в случае передачи энергии на низколетящий спутник с высотой 1000 км имеем $\gamma_{\text{абер}} \sim 5\cdot10^{-5}$ рад. При этом из (53) следует $h \sim 3$–$5$ км, что резко ограничивает возможности по размещению силового лазера.

Главный вывод работы состоит в том, что угловая аберрация излучения, обусловленная движением принимающего объекта, является серьезным препятствием в проблеме передач энергии через турбулентную атмосферу на удаленные движущиеся объекты и должна учитываться при пректировании соответствующих систем. Однако поскольку аппроксимация Фрида для структурной константы даст завышенные значения, то численные результаты работы, по-видимому, изменятся в оптимистическом направлении при более точном учете атмосферной турбулентности.

Автор благодарен Х.Е.Беннетту за полезные обсуждения.

## Список литературы


[1] *Bennett H.E., Rather J.D.G., Montgomery E.E.* // 15th Intern. Free Electron Laser Conf. The Hague, 1993. Final announcement.

[2] *Bennett H.E., Rather J.D.G., Montgomery E.E.* // Матер. Российско-американского совещания по проблеме передачи лазерной энергии на удаленные объекты. Новосибирск, 1993.

[3] *Erg G.I., Gavrilov N.G., Gorniker E.I.* et al. // 15th Intern. Free Electron Laser Conf. The Hague, 1993. Final announcement.

[4] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1967. 460 с.

[5] *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. М.: Наука, 1978. 464 с.

[6] *Беспалов В.И., Пасманик Г.А.* Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. М.: Наука, 1986. 136 с.

[7] *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966. 296 с.

[8] *Fried D.L.* // J. Opt. Soc. Amer. 1966. Vol. 56. N 10. P. 1380–1384.