01; 03; 05
©1994 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ЯВЛЕНИЙ ПРИ ПРОГРЕВЕ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ ПОТОКОМ ГОРЯЧЕГО ГАЗА

А.В.Кузнецов

(Поступило в Редакцию 10 января 1994 г.)

Рассмотрена задача прогрева полуограниченного пористого тела потоком горячего несжимаемого газа (жидкости). В отличие от предыдущих аналитических исследований в настоящей работе не используется допущение о возможности пренебречь теплоемкостью и теплопроводностью газовой фазы. Показано, что разница температур между твердой и газовой фазами образует локализованную в пространстве волну, котоpя распространяется со скоростью, отличной от скорости поступающего газа.

Введение

Прогрев пористых тел потоком горячего газа (жидкости) широко используется для аккумулирования тепловой энергии, поэтому исследование этого процесса имеет большое практическое значение. Большинство аналитических исследований, посвященных этому явлению, были выполнены в рамках так называемой шуманновской модели пористого слоя, предложенной в [1]. В этой модели игнорируется теплоемкость и теплопроводность газовой фазы. Первоначально также теплопроводность твердой фазы полагалась равной нулю, однако в ряде дальнейших работ была найдена возможность снять это допущение. Аналитические решения для шуманновской модели при различных граничных условиях были получены в работах [2–5]. В [6] проведено сравнение решений двухфазной (два уравнения энергии) и однофазной моделей пористого слоя. В [7–9] представлена общая математическая модель, описывающая поток конденсирующегося газа в пористом слое, и проведено численное исследование этого явления.

В отличие от предыдущих аналитических исследований в настоящей работе с помощью метода возмущений проводится исследование полных уравнений энергии для твердой и газовой фаз без пренебрежения какими бы то ни было членами в этих уравнениях.

Постановка задачи

При рассмотрении данной задачи мы будем исходить из следующих допущений: 1) теплоперенос является одномерным; 2) теплофизические свойства твердой и газовой фаз неизменны; 3) газовая фаза несжимаема и массовый расход водорода в каждом поперечном сечении пористого тела постоянен.

При этих допущениях процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\Pi\rho_f c_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + \rho_f c_f v \frac{\partial T_f}{\partial x} = \lambda_{feff} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + h_{sf} a_{sf} [T_s - T_f], \tag{1}$$

$$(1-\Pi)\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \lambda_{seff} \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} - h_{sf} a_{sf} [T_s - T_f], \tag{2}$$

где $T_f = \langle T_f \rangle^f$, $T_s = \langle T_s \rangle^s$ $\rho_f = \langle \rho_f \rangle^f$, $\rho_s = \langle \rho_s \rangle^s$, $c_f = (c_p)_f$, $c_s = (c_p)_s$, $\nu = \langle \nu_f \rangle$.

Здесь оператор $\langle\rangle$ означает осреднение по объему и $\langle\rangle^f$ или $\langle\rangle^s$ — фазовое среднее для газовой или твердой фаз соответственно [10]. Удельная поверхность контакта твердой и газовой фаз в соответствии с [11] может быть вычислена по формуле

$$a_{sf} = \frac{6(1-\Pi)}{d}. \tag{3}$$

Согласно [12], коэффициент теплообмена между газом и частичками пористого тела можно вычислить как

$$\frac{1}{h_{sf}} = \frac{d}{Nu_{sf}\lambda_f} + \frac{d}{\beta \cdot \lambda_s}, \tag{4}$$

где $\beta = 10$, если частички пористого тела имеют сферическую форму.

Для мелкозернистой структуры пористого тела средний диаметр частичек является малой величиной, и в соответствии с уравнениями (3) и (4) коэффициент $h_{sf}a_{sf}$ принимает большие значения. Поэтому для случая, когда структура пористого тела мелкозернистая, справедливо дополнительное допущение, а именно 4) коэффициент $h_{sf}a_{sf}$ в членах уравнений (1) и (2), описывающий теплообмен между газом и пористой матрицей, является большим параметром.

Для применения метода возмущений к системе (1), (2) приведем ее к безразмерному виду. Введем безразмерные переменные: температуру

$$\Theta = \frac{T - T_s(x,0)}{T_f(0,t) - T_s(x,0)},$$

расстояние

$$\xi = \frac{\rho_f c_f v}{\lambda_{feff} + \lambda_{seff}} x$$

и время

$$\tau = \frac{(\rho_f c_f v)^2}{(\rho c)_{eff}(\lambda_{feff} + \lambda_{seff})} t,$$

где $(\rho c)_{eff} = \Pi\rho_f c_f + (1-\Pi)\rho_s c_s$.

Мы будем предполагать, что температура твердой фазы может быть представлена как

$$\Theta_s = \Theta_f + \varepsilon\Theta_s^*, \tag{5}$$

где Θ_s^* есть функция координаты и времени и

$$\varepsilon = \frac{1}{h_{sf}a_{sf}} \frac{\Pi(\rho_f c_f)^3(v)^2}{(\rho c)_{eff}(\lambda_{feff} + \lambda_{seff})}$$

в. соответствии с допущением (4) есть безразмерный малый параметр.

Теперь система уравнений (1), (2) может быть записана в виде

$$\frac{\partial\Theta_f}{\partial\tau} + \frac{\partial\Theta_f}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} + O(\varepsilon), \tag{6}$$

$$\Theta_s^* = \frac{\partial\Theta_f}{\partial\tau} + w_1\frac{\partial\Theta_f}{\partial\xi} - w_2\frac{\partial^2\Theta_f}{\partial\xi^2}, \tag{7}$$

где

$$w_1 = \frac{(\rho c)_{eff}}{\Pi\rho_f c_f}, \qquad w_2 = \frac{\lambda_f(\rho c)_{eff}}{(\lambda_{feff} + \lambda_{seff})\Pi\rho_f c_f}.$$

Уравнение (6) получено путем сложения уравнений (1) и (2) и уравнение (7) есть уравнение (1), записанное в безразмерной форме с учетом выражения (5).

Решение системы уравнений и исследование тепловых волн, распространяющихся в теле

Рассмотрим полубесконечное тело, первоначально имеющее одинаковую температуру во всех точках. В момент времени $t = 0$ тело начинает прогреваться потоком горячего несжимаемого газа. Начальные и граничные условия для функции T_f

$$T_f(x,0) = T_0, \quad T_f(0,t) = T_b, \quad \frac{\partial T_f}{\partial x}(\infty,t) = 0.$$

В безразмерных переменных эти условия записываются в виде

$$\Theta_f(\xi,0) = 0, \quad \Theta_f(0,\tau) = 1, \quad \frac{\partial\Theta_f}{\partial\xi}(\infty,\tau) = 0. \tag{8}$$

Решение уравнения (6) с начальными и граничными условиями (8) может быть получено с помощью преобразования Лапласа

$$\Theta_f = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau}}\right\} + \frac{1}{2}\exp\xi\operatorname{erfc}\left\{\frac{\xi+\tau}{2\sqrt{\tau}}\right\}. \tag{9}$$

Для больших значений τ это решение превращается в

$$\Theta_f = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left\{\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau}}\right\}. \tag{10}$$

Решение (10) совпадает с решением для больших значений времени, полученным в [6] для однофазной модели пористого тела (когда температуры твердой и газовой фаз предполагаются равными). Это решение описывает ударную волну, распространяющуюся с поверхности $\xi = 0$.

В соответствии с уравнением (7) функция Θ_s^* имеет вид

$$\Theta_s^* = \frac{1-w_2}{4\tau\sqrt{\pi\tau}}\left\{(\xi+\tau)\exp\left[-\left(\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right] + (\xi-\tau)\exp\left[\xi-\left(\frac{\xi+\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right]\right\} +$$
$$+(w_1-w_2)\left\{\frac{1}{2}\exp\xi\,\mathrm{erfc}\left[\frac{\xi+\tau}{2\sqrt{\tau}}\right] - \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\left[\exp\left\{-\left(\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right\} +\right.\right.$$
$$\left.\left.+\exp\left\{\xi-\left(\frac{\xi+\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right\}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Функция Θ_s^* имеет особенность в точке $(\xi,\tau) = (0,0)$, которая вызвана тепловым ударом на границе $\xi = 0$ в момент времени $\tau = 0$. Поэтому выражение (11) может применяться для описания разности температур между твердой и газовой фазами только вне окрестности точки $\tau = 0$. Для больших значений τ решение (11) превращается в

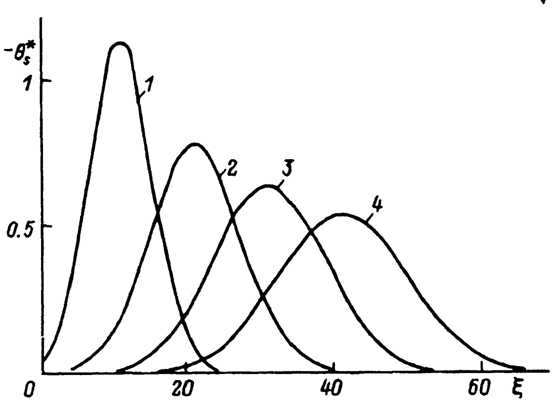
$$\Theta_s^* = \frac{\xi(1-w_2)+\tau(1-2w_1+w_2)}{4\tau\sqrt{\pi\tau}}\exp\left[-\left(\frac{\xi-\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right]. \qquad (12)$$

Решение (12) описывает волну, локализованную в пространстве, амплитуда которой уменьшается по мере ее распространения.

На рисунке представлено распределение функции $-\Theta_s^*$ по мере распространения волны в разные моменты времени. Максимум фукции $-\Theta_s^*$ соответствует максимальной разнице температур между твердой и газовой фазами.

Зависимость координаты этого максимума $\hat{\xi}$ от времени можно найти из уравнения $(\Theta_s^*)'_\xi = 0$. Легко показать, что решением этого уравнения является функция $\hat{\xi} = \tau$. Подстановка этой зависимости в уравнение (12) приводит к

$$(\Theta_s^*)_{\max} = \frac{1-w_1}{2\sqrt{\pi\tau}}.$$



Расчет распространения волны температурной разности между твердой и газовой фазами для случая $c_f\rho_f = 0.25c_s\rho_s$, $\lambda_{feff} = 0.25\lambda_{seff}$, $\Pi = 0.25$.
1 — $\tau = 10$, 2 — 20, 3 — 30, 4 — 40.

В размерных переменных это означает, что для больших значений t

$$\hat{x} = \frac{\rho_f c_f}{(\rho c)_{eff}} v \cdot t,$$

и максимум температурной разницы между твердой и газовой фазами равен

$$(T_f - T_s)_{\max} = \frac{T_b - T_0}{2\sqrt{\pi t}} \frac{v}{h_{sf} a_{sf}} \frac{(1-\Pi)\rho_f c_f \rho_s c_s}{(\rho c)_{eff}^{1/2} (\lambda_{feff} + \lambda_{seff})^{1/2}}. \tag{13}$$

Из формулы (13) видно, что основными факторами, влияющими на $(T_f - T_s)_{\max}$, являются h_{sf}, a_{sf} и v.

Обе волны, описываемые уравнениями (10) и (12), распространяются со скоростью

$$\hat{v} = \frac{\rho_f c_f}{\Pi \rho_f c_f + (1-\Pi)\rho_s c_s} v,$$

которая для случая $\rho_f c_f \neq \rho_s c_s$ не совпадает со скоростью распространения газа v.

Выводы

1. При прогреве полуограниченного пористого тела потоком горячего несжимаемого газа в теле распространяются две качественно различные волны: а) температуры твердой и газовой фаз образуют ударную волну и б) разница температур твердой и газовой фаз образует тепловую волну, локализованную в пространстве.

2. Обе волны распространяются от поверхности $x = 0$ со скоростью, которая в случае различных теплоемкостей твердой и газовой фаз не совпадает со скоростью распространения газа.

3. Разница температур между твердой и газовой фазами стремится к нулю по мере распространения волны.

Автор благодарен фонду им. А. Гумбольдта, в рамках исследовательской стипендии которого была выполнена данная работа.

Список литературы

[1] *Shumann T.E.W.* // J. of Franklin Institute. 1929. Vol. 208. P. 405–416.
[2] *Arpaci V.S., Clark J.A.* // Adv. in Cryogenic Engin. 1962. Vol. 7. P. 419–432.
[3] *Hung F.T., Nevins R.G.* // ASME Paper. N 65-HT-10. 1965.
[4] *Jang W.J., Lee C.P.* // ASME Paper. N 74-WA-/HT-22. 1974.
[5] *Burch D.M., Allen R.W., Peavy B.A.* // J. Heat Transfer. 1976. Vol. 98. P. 221–225.
[6] *Riaz M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1977. Vol. 99. P. 489–492.
[7] *Vafai K., Sözen M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 690–699.
[8] *Sözen M., Vafai K.* // Int. J. Heat Mass Transfer. 1990. Vol. 33. P. 1247–1261.
[9] *Vafai K., Sözen M.* // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1990. Vol. 112. P. 1014–1022.
[10] *Whitaker S.* // Adv. Heat Transfer. 1977. Vol. 13. P. 119–203.
[11] *Dullien F.A.L.* Porous Media Fluid Transport and Pore Structure. New York: Acad. Press, 1979.
[12] *Dixon A.G., Gresswell D.L.* // Amer. Inst. Chem. Engin. J. 1979. Vol. 25. P. 663–676.