

01;10
©1994 г.

ТРЕХМОДОВОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРИ РАЗВИТИИ СЛИПИНГ-НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕКТРОННОГО ПУЧКА

Н.Е.Розанов

Московский радиотехнический институт, 113519
(Поступило в Редакцию 10 января 1993 г.)

Исследована роль нелинейного взаимодействия волн при развитии слипинг-неустойчивости электронного пучка с неоднородным радиальным профилем продольной гидродинамической скорости. Получены слабонелинейные уравнения для описания трехмодового взаимодействия. Аналитически и численно показано, что вблизи длинноволновой границы области неустойчивости трехволновое взаимодействие несущественно, а механизмом насыщения является фазовое перемешивание траекторий частиц в поперечном сечении пучка из-за неизохронности их движения, приводящее к выравниванию радиального профиля продольной скорости. На языке взаимодействия волн этот эффект соответствует появлению нелинейного сдвига частоты вследствие четырехволнового процесса самовоздействия неустойчивой волны, который можно описывать в рамках одномодового нелинейного приближения.

При распространении сплошного электронного пучка в магнитном поле нескомпенсированный заряд в большинстве случаев приводит к радиальной зависимости продольной скорости пучка, которая является причиной развития слипинг-неустойчивости [1-3]. Эта неустойчивость связана с радиальным дрейфом электронов пучка в скрещенных продольном внешнем магнитном и азимутальном электрическом полях возмущения и вызывает рост аксиально-несимметричных волн.

В настоящее время подробно изучена линейная стадия развития слипинг-неустойчивости. Так, без использования приближения геометрической оптики (квазиклассического приближения) в работе [4] исследованы эффекты, обусловленные релятивизмом электронов, в [5] проанализированы зависимости характеристик неустойчивости от радиусов пучка и трубы дрейфа, в [6] учтено влияние теплового разброса скоростей пучка, в [7] найдены оптимальные для развития неустойчивости значения степени замагниченности пучка и величины продольного магнитного поля. В работе [4] исследованы эффекты, обусловленные частичной компенсацией заряда релятивистского электронного пучка в сильном, но конечном магнитном поле, а в работе [8] — в слабо продольном магнитном поле, близком по величине к минимально допусти-

тому для удержания пучка с заданной плотностью в равновесии, когда инкремент слипинг-неустойчивости достигает максимального значения [7].

Исследование нелинейной стадии развития слипинг-неустойчивости в одномодовом режиме на кинетической модели проведено в работе [9]. Показано, что насыщение неустойчивости обусловлено фазовым перемешиванием траекторий частиц в поперечном сечении, приводящим к выравниванию первоначально неоднородного радиального профиля продольной скорости пучка. Стационарные вихревые состояния электронного пучка типа нелинейных бегущих волн при наличии радиально неоднородных профилей продольной скорости и плотности изучены в работах [10–12] и интерпретируются как возможный конечный результат эволюции слипинг-неустойчивости. Однако остается неисследованным вопрос о роли взаимодействия волн при развитии слипинг-неустойчивости. Его решение позволит понять слабонелинейную стадию процесса и найти условия применимости одномодового приближения при исследовании нелинейной стадии.

Методика описания трехволнового взаимодействия к настоящему времени хорошо разработана [13,14]. В частности, в случае консервативной (недиссипативной) неустойчивой системы, когда каждой нарастающей волне на линейной стадии всегда соответствует затухающая волна, так как корни дисперсионного уравнения являются комплексно-сопряженными, необходимо учитывать [15] взаимодействие именно пар этих волн. Причина состоит в том, что ширина линии неустойчивой волны по порядку величины равна инкременту неустойчивости, поэтому при выполнении резонансного условия для нарастающей волны в резонансе обязательно оказывается и волна с комплексно-сопряженной частотой. Кроме того, энергия только такой пары волн, называемой модой, в линейном приближении постоянна [16], а на нелинейной стадии меняется вследствие обмена с другими модами.

1. Уравнения для описания трехмодового взаимодействия

Рассматривается нерелятивистский холодный электронный пучок, распространяющийся в вакууме в трубе дрейфа радиуса R вдоль оси z в однородном продольном сильном, но конечном магнитном поле B_0 , таком что выполнено условие

$$\omega_c^2 \gg \omega_b^2, \quad (1)$$

где $\omega_c = eB_0/mc$, $\omega_b^2 = 4\pi n_0 e^2/m$, $-e$ и m — заряд и масса электрона, n_0 — равновесная плотность электронного пучка, c — скорость света.

В равновесии пучок целиком заполняет трубу дрейфа, его плотность однородна. Зависимость продольной скорости от радиальной координаты r определяется формулой

$$V_{z0}(r) = V_0 \left[1 + \left(\frac{\omega_b r}{2V_0} \right)^2 \right] \quad (2)$$

при

$$\left(\frac{\omega_b R}{2V_0}\right)^2 \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{eI}{mV_0^3} \ll 1, \quad (3)$$

где I и V_0 — ток пучка и его продольная скорость на оси $r = 0$.

Наличие радиальной зависимости V_{z0} приводит к развитию слиппинг-неустойчивости, т.е. к экспоненциальному росту малых возмущений вида $\exp[i(\omega t - k_z z - l\vartheta)]$, где t — время; ϑ — азимутальная координата; ω , k_z и l — частота, продольное волновое число и номер азимутальной моды волны. Причем нарастающими оказываются волны в диапазоне значений параметров

$$|k_z| < 2|k_m|, \quad k_m = \frac{lV'_{z0}}{2\omega_c r} = \frac{l\omega_b^2}{4\omega_c V_0}, \quad (4)$$

где $V'_{z0} = dV_{z0}/dr$ — “шир” продольной скорости пучка.

Их инкремент равен

$$\omega_I = \frac{\omega_b |k_z| R}{\mu_{nl}} \sqrt{\left|1 + \frac{2k_m}{k_z}\right|}, \quad (5)$$

где μ_{nl} — n -й корень функции Бесселя порядка l : $J_l(\mu_{nl}) = 0$.

Действительная часть частоты дается формулой

$$\omega_R = k_z V_0 + l\omega_e, \quad (6)$$

где $\omega_e = \omega_b^2/2\omega_c$ — угловая частота вращения пучка в равновесии вокруг оси.

Радиальная зависимость возмущения электростатического потенциала записывается следующим образом.:

$$\varphi = C \cdot J_l(\mu_{nl} r/R), \quad (7)$$

где C — произвольная постоянная.

При этом возмущения плотности n и компонент гидродинамической скорости пучка v_z , v_r , v_ϑ имеют вид

$$n = -\frac{en_0}{m\omega_d^2} (k_z^2 + 2k_z k_m) C J_1(\mu_{nl} r/R),$$

$$v_z = -\frac{e}{m\omega_d} (k_z + 2k_m) C J_1(\mu_{nl} r/R),$$

$$v_r = \frac{e}{m\omega_c} \frac{il}{r} C J_1(\mu_{nl} r/R),$$

$$v_\vartheta = \frac{e}{m\omega_c} C \frac{d}{dr} (J_l(\mu_{nl} r/R)), \quad (8)$$

где $\omega_d = \omega - k_z V_0 - l\omega_0$.

Действуя стандартным образом (см., например, [14]), сначала находим так называемое нормальное колебание системы $b = 2v_z/V_0$, для которого на линейной стадии справедливо уравнение

$$\frac{\partial b}{\partial t} = i\omega b, \quad (9)$$

где $\omega = \omega_R \pm i\omega_I$ — решение дисперсионного уравнения, отвечающее (k_z, l) -й пространственной фурье-гармонике.

Затем получаем нелинейное уравнение для b , подставляя в уравнение для z -компоненты гидродинамической скорости искомую величину в виде суммы $V_{z0} + V_z$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} + \omega_e \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} + V_{z0} \frac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = -v_r \cdot V'_{z0} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} - \frac{v_\vartheta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \vartheta} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, действуя по теории возмущений, подставляем все неизвестные величины в правую часть (10), выразив их через нормальное колебание b с помощью линейных соотношений (7), (8). Имея в виду исследование трехволновых процессов, ищем величины b_j в виде

$$b_j(t, r, z, \vartheta) = \frac{1}{2} \left(\hat{b}_j(t, r) \exp(i\Phi_j) + \text{c.c.} \right), \quad (11)$$

где $\Phi_j = -k_{zj}z - l_j\vartheta$, $j = 1, 2, 3$.

Используя условие резонанса

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3, \quad (12)$$

получаем уравнения для \hat{b}_1 , \hat{b}_2 и \hat{b}_3 . После этого, выделяя в \hat{b}_j радиальные и временные зависимости, соответствующие линейному решению

$$\hat{b}_j(t, r) = b_j^\pm(t) \cdot J_{l_j}(\mu_j r/R) \cdot \exp(i\omega_{Rj}t) \quad (13)$$

(где $\mu_j \equiv \mu_{n_j l_j}$), и, интегрируя уравнения по r от 0 до R с весами $r J_{l_j}(\mu_j r/R)$, получаем с учетом условия $\omega_{R1} = \omega_{R2} + \omega_{R3}$ систему уравнений для экспоненциально нарастающих $b_j^+(t)$ и затухающих $b_j^-(t)$ на линейной стадии амплитуд. После удобной для дальнейшего рассмотрения нормировки времени на инкремент ω_{I1} , а амплитуд на $b_{\text{sat}1}$ — амплитуду первой (основной) волны в момент насыщения неустойчивости из-за фазового перемешивания траекторий электронов в одномодовом режиме [9], определяемую формулой

$$b_{\text{sat}1} = 2 \frac{l_1}{\mu_1} \left(\frac{\omega_b R}{V_0} \right)^2 \Psi_1, \quad (14)$$

получаем

$$\frac{\partial b_1^{s_1}}{\partial t} = s_1 b_1^{s_1} + \sum_{s_2, s_3 = \pm 1} C_{23}^{s_2 s_3} b_2^{s_2} b_3^{s_3},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial b_2^{s_2}}{\partial t} &= s_2 \left| \frac{\omega_{I2}}{\omega_{I1}} \right| b_2^{s_2} + \sum_{s_1, s_3 = \pm 1} C_{13}^{s_1 s_3} b_1^{s_1} (b_3^{s_3})^*, \\ \frac{\partial b_3^{s_3}}{\partial t} &= s_3 \left| \frac{\omega_{I3}}{\omega_{I1}} \right| b_3^{s_3} + \sum_{s_1, s_2 = \pm 1} C_{12}^{s_1 s_2} b_1^{s_1} (b_2^{s_2})^*.\end{aligned}\quad (15)$$

Здесь $s_j = +1$ для нарастающих волн, $s_j = -1$ — для убывающих волн,

$$\begin{aligned}C_{23}^{s_2 s_3} &= \frac{1}{4a_{01}} \left\{ i\psi_1^2 l_1 \frac{\omega_b R}{V_0} a_1 - 2(a_2 F_2 + a_3 F_3) \right\}, \\ C_{13}^{s_1 s_3} &= \frac{1}{4a_{02}} \left\{ i\psi_2^2 l_2 \frac{\omega_b R}{V_0} a_1 - 2(a_2 F_1 - a_3 F_3) \right\}, \\ C_{12}^{s_1 s_2} &= \frac{1}{4a_{03}} \left\{ i\psi_3^2 l_3 \frac{\omega_b R}{V_0} a_1 - 2(a_3 F_1 - a_2 F_2) \right\},\end{aligned}\quad (16)$$

$$F_j = \frac{\psi_j}{\mu_j s_j}, \quad \psi_j = \sqrt{\frac{2k_{zj}}{k_{mj}} - \frac{k_{zj}^2}{k_{mj}^2}} \approx \begin{cases} 1 & \text{при } k_{zj} \approx k_{mj}, \\ \sqrt{\frac{2k_{zj}}{k_{mj}}} & \text{при } k_{zj} \ll k_{mj}, \end{cases}\quad (17)$$

$$a_{0j} = \frac{1}{2} [J'_{l_j}(\mu_j)]^2, \quad a_1 = \int_0^1 J_{l_1}(\mu_1 x) J_{l_2}(\mu_2 x) J_{l_3}(\mu_3 x) x dx,$$

$$a_2 = \int_0^1 \left\{ l_2 J_{l_2}(\mu_2 x) \frac{d}{dx} (J_{l_3}(\mu_3 x)) - l_3 J_{l_3}(\mu_3 x) \frac{d}{dx} (J_{l_2}(\mu_2 x)) \right\} \times J_{l_1}(\mu_1 x) dx,$$

$$a_3 = -a_2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Заметим, что система (15) справедлива и для устойчивых второй и/или третьей мод, для этого случая в правых частях надо заметить s_2 и/или s_3 на is_2 и/или is_3 . Под порядком функции Бесселя в формулах (17) следует понимать модуль l_j , если $l_j < 0$. Отметим также, что первые слагаемые в фигурных скобках (16) обусловлены нелинейным членом $v_z(\partial v_z)/\partial z$, вторые — $(\mathbf{v}_\perp \nabla_\perp) v_z$.

2. Результаты исследования

Отметим сначала некоторые общие свойства решений системы (15), следующие из вида коэффициентов (16), (17) и интегралов (18).

Наиболее важной для анализа возможных механизмов насыщения слиппинг-неустойчивости является зависимость нелинейных членов в правых частях (15) от величины ψ_j (17), характеризующей близость волнового числа k_z рассматриваемой моды к границе области неустойчивости. При увеличении длины волны $\lambda_z \equiv 2\pi/k_z$ коэффициент ψ убывает как $(2k_z/k_m)^{1/2}$, а коэффициенты при нелинейных членах в системе

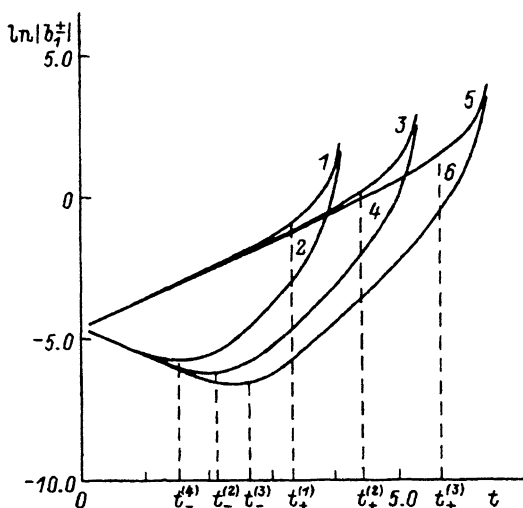
(15) (называемые обычно коэффициентами связи [14], которые для краткости обозначим как C_{ik}^{\pm}) уменьшаются пропорционально ψ . Поэтому нелинейное взаимодействие мод по мере уменьшения k_z будет сказываться при все больших значениях амплитуд. И можно утверждать, что найдется такое малое k_z , при котором нелинейное трехмодовое взаимодействие будет существенно только при значениях нормированных амплитуд $|b_j| \gg 1$.

Вторым результатом анализа является факт относительно слабой скорости генерации второй азимутальной гармоники при трехмодовом взаимодействии волн. Действительно, нетрудно убедиться, что интегралы перекрытия a_2 и a_3 (18) при одинаковых n_j равны нулю при любых наборах l_j , соответствующих этому процессу, т.е. при $|l_j| \leq 2$. Поэтому за генерацию второй гармоники (или ее распад на две первые гармоники) отвечает только первые слагаемые в правых частях (16), которые убывают пропорционально ψ^2 при $\psi \rightarrow 0$ и, кроме того, пропорциональны малой величине $\omega_b R/V_0$ (см. условие (3)).

При произвольных значениях параметров интегралы перекрытия (18) вычислялись, а уравнения (15) интегрировались численно. В качестве начальных значений задавались в общем случае комплексные величины $b_j^{\pm}(0)$, такие что $|b_j^{\pm}(0)| \ll 1$. Параметры при вычислении a_{0j} , a_1 , a_2 и a_3 были азимутальные l_j и радиальные n_j номера. При интегрировании системы (15) параметрами служили не характеристики пучка и волн (ток, скорость, радиус, волновые числа и т.п.), а коэффициенты связи C_{ik}^{\pm} при каждом из нелинейных членов, что позволило сократить объем расчетов без потери общности выводов. Варьировались также значения линейных инкрементов и начальные амплитуды волн.

Численное интегрирование уравнений (15) показало, что при различных значениях параметров реализуются типы решений, известные и изученные в теории трехволнового взаимодействия, такие как взрывная неустойчивость и др. Мы не будем подробно останавливаться на анализе каждого из них. Причина состоит в том, что физическими являются лишь результаты, относящиеся к слабонелинейной стадии, для описания которой только и справедливы полученные уравнения. В частности, к ним относится значение амплитуды волны, при котором начинается сказываться трехмодовое взаимодействие.

Решение уравнений (15) подтвердило также, что при уменьшении абсолютных значений коэффициентов связи C_{ik}^{\pm} , соответствующем приближению к границе области неустойчивости, трехмодовое взаимодействие начинает сказываться при все больших значениях амплитуд. На рисунке показаны зависимости логарифмов модулей амплитуд b_1^+ и b_1^- от времени t для трех вариантов, отличающихся значениями коэффициентов связи C_{ik}^{\pm} . В первом варианте (кривые 1 и 2) все $C_{ik}^{\pm} = 1$, во втором (кривые 3 и 4) — 0.3, в третьем (кривые 5 и 6) — 0.1. Во всех трех вариантах нормированные инкременты всех волн задавались равными +1. Видно, что на начальном этапе волна b_1^+ экспоненциально нарастает, а b_1^- — затухает. При $t \approx t_-^{(n)}$ ($n = 1, 2, 3$ соответствуют номеру варианта) амплитуда b_1^- начинает возрастать вследствие не-



Зависимости логарифмов модулей амплитуд b_1^+ и b_1^- от времени t для трех вариантов, отличающихся значениями коэффициентов связи C_{ik}^\pm .

линейного влияния на нее нарастающих волн, а при $t \approx t_+^{(n)}$ увеличивается и скорость нарастания амплитуды b_1^+ . Во всех трех вариантах в конце концов наблюдается взрывная неустойчивость. Зависимости амплитуд $b_{2,3}^\pm$ от времени аналогичны.

Анализ решений показал, что значения моментов времени t_- и t_+ зависят от параметров системы и от начальных амплитуд. Значение же амплитуды основной волны (обозначаемое далее b_m), при котором на ее поведении начинает сказываться нелинейное взаимодействие мод, не зависит от начальных амплитуд, а определяется лишь коэффициентами связи. Для него справедлива оценка

$$b_m \approx \frac{k \cdot}{|C_m|}; \quad (19)$$

где C_m — значение максимального по модулю коэффициента связи в уравнении для b_1^+ , k — число в диапазоне от 0.1 до 1.

Она следует из условия приблизительного равенства линейного и нелинейного членов в правой части уравнения для b_1^+ , если положить все амплитуды и коэффициенты связи C_{ik}^\pm ($i, k = 2, 3$), равными друг другу.

Таким образом, вблизи границы области неустойчивости, где величины $\psi_j \ll 1$ и значения коэффициентов связи $|C_{ik}^\pm| \ll 1$, нелинейное трехмодовое взаимодействие проявляется лишь при $|b_1^+| \approx b_m \gg 1$. В этом случае нельзя ограничиваться квадратичными членами, а для исследования механизма насыщения неустойчивости требуется либо учет следующего приближения по теории возмущений, либо полмаштабная нелинейная теория. Следующим приближением являлся бы учет кубических по амплитуде членов, описывающих четырехволновое взаимодействие, соответствующее в резонансном случае выполнению условий

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4,$$

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4. \quad (20)$$

Одним из очевидных процессов, всегда имеющих место и удовлетворяющих условиям (20) при $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, является так называемое нелинейное самовоздействие волны. Для его описания достаточно нелинейного одномодового (для волны с частотой ω_1 и волновым числом k и ее комплексно-сопряженной пары) приближения. Такое исследование нелинейной стадии развития слипинг-неустойчивости вблизи длинноволновой границы области проведено ранее в работе [9] на кинетической полностью нелинейной модели. Численное решение полученных уравнений и их анализ аналитическими методами показали, что неустойчивость развивается следующим образом. На линейной стадии электроны дрейфуют в радиальном направлении в скрещенных внешнем продольном магнитном и азимутальном электрическом полях возмущения. Это приводит к группировке пучка в продольном направлении вследствие того, что в "голову" возмущения плотности приходят электроны с меньшими продольными скоростями из приосевой области, а в "хвост" — электроны с большими продольными скоростями из периферийных областей. При этом по мере роста амплитуды волны радиальный профиль гидродинамической продольной скорости выравнивается. Инкремент неустойчивости уменьшается вплоть до нуля, причем этот процесс является необратимым, хотя система является бездиссипативной. Причиной является неизохронность движения электронов в поперечной плоскости из-за нелинейной зависимости полей возмущения E_r и E_θ от радиальной координаты (см. формулу (7)). Амплитуда волны при насыщении определяется формулой (14). На языке четырехволнового взаимодействия этот процесс соответствует появлению нелинейного сдвига частоты, выводящего систему из резонанса.

Таким образом, вблизи длинноволновой границы полосы неустойчивости трехмодовое взаимодействие является несущественным, а к насыщению приводит эффект следующего порядка. По мере же приближения к середине области неустойчивости, где величины $\psi_j \approx 1$, коэффициенты связи $|C_{ik}^\pm|$ и характерная нормированная амплитуда b_m по порядку величины близки к единице, влиянием нелинейного трехмодового взаимодействия пренебрегать уже нельзя. Как следствие, одномодовое описание нелинейной стадии неустойчивости в этом случае было бы неполным.

И наконец, скажем коротко о роли волн, затухающих на линейной стадии неустойчивости. Расчеты показали, что если их амплитуды искусственно положить равными нулю, то поведение основной неустойчивой волны в большинстве случаев сильно изменяется.

Заключение

В работе проведено исследование роли трехмодового взаимодействия при развитии слипинг-неустойчивости электронного пучка. Методом возмущений получены слабонелинейные (квадратичные по амплитуде возмущения) уравнения для описания временной эволюции неустойчивой моды с учетом нелинейного взаимодействия волн в нескомпенсированном "холодном" пучке с неоднородным радиальным профилем продольной скорости в сильном, но конечном продольном магнит-

ном поле. Проанализировать различные режимы развития неустойчивости на нелинейной стадии. В случае, если система находится вблизи длинноволновой границы неустойчивости, механизмом насыщения является фазовое перемешивание траекторий частиц в поперечном сечении пучка, приводящее к выравниванию радиального профиля продольной гидродинамической скорости пучка [9]. При этом трехмодовое взаимодействие не существенно для динамики системы, а основным является самовоздействие неустойчивой моды, соответствующее четырехволновому процессу, которое можно описывать в рамках одномодового нелинейного приближения. На языке взаимодействия волн этот процесс соответствует появлению нелинейного сдвига частоты, выводящего систему из резонанса. В середине полосы неустойчивости трехмодовое взаимодействие существенно. В этом случае насыщение неустойчивости может быть связано с выходом на стационар с перекачкой энергии между волнами. Если же учет трехмодового взаимодействия приводит к решению типа взрывной неустойчивости, то необходим либо учет членов более высокого порядка по теории возмущений, либо полномасштабное нелинейное описание. В частности, результатом насыщения неустойчивости могут быть состояния, описываемые нелинейными стационарными волнами с вихревой поперечной структурой [10–12].

Выражаю благодарность А.М. Игнатову за стимулирующие дискуссии.

Работа частично финансировалась Международным научным фондом.

Список литературы

- [1] Михайловский А.Б., Рухадзе А.А. // ЖТФ. 1965. Т. 35. Вып. 12. С. 2143–2149.
- [2] Лейман В.Г. // Электронная техника. Сер. 1. Электроника СВЧ. 1969. № 5. С. 16–25.
- [3] Rome J.A., Briggs R.J. // Phys. Fluids. 1972. Vol. 15. N 5. P. 796–804.
- [4] Карбушев Н.И., Рухадзе А.А., Удовиченко С.Ю. // Кр. сообщ. по физике. М., 1984. Вып. 10. С. 26–29.
- [5] Никулин М.Г., Розанов Н.Е. // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 2065–2069.
- [6] Никулин М.Г., Розанов Н.Е. // Тез. докл. Всесоюз. семинара “Плазменная электроника”. Харьков, 1988. С. 196–197.
- [7] Лейман В.Г., Никулин М.Г., Розанов Н.Е. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 4. С. 111–117.
- [8] Розанов Н.Е. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 11. С. 151–157.
- [9] Розанов Н.Е. // Физика плазмы. 1989. Т. 15. № 5. С. 604–611.
- [10] Golub Yu.Ya., Nikulin M.G., Rozanov N.E. // Nonlinear World. Proc. IV Intern. Workshop on Nonlinear and Turbul. Proc. in Phys. Ed. by V.G. Bar'yakhtar et al. Singapore. World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd, 1990. Vol. 2. P. 857–866.
- [11] Голубь Ю.Я., Никулин М.Г., Розанов Н.Е. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 78–82.
- [12] Никулин М.Г. // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 12. С. 1467–1474.
- [13] Цытович В.Н. Нелинейные эффекты в плазме. М.: Наука, 1967. 287 с.
- [14] Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. М.: Энергоатомиздат, 1982. 224 с.
- [15] Игнатов А.М. ЖЭТФ. 1984. Т. 86. Вып. 5(11). С. 1652–1659.
- [16] Ignatov A.M. // Commun. on Plasma Phys. and Contr. Fus. 1989. Vol. 12. N 4. P. 205–213.