01 *Журнал технической физики, т. 64, в. 9, 1994*

ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ ДЛЯ СЖАТОГО СФЕРОИДА, РАСПОЛОЖЕННОГО МЕЖДУ ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

В.С.Проценко

Харьковский авиационный институт
(Поступило в Редакцию 19 ноября 1991 г.
В окончательной редакции 18 февраля 1994 г.)

С помощью формул переразложения базисных решений уравнения Лапласа задача Дирихле для сжатого сфероида, расположенного между двумя плоскостями, сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений с вполне непрерывной формой. Методом малого параметра получено приближенное решение этой системы для сфероида в полупространстве. Как частный случай из этого решения вытекает решение для кругового диска, расположенного перпендикулярно к экранирующей плоскости. Приведено приближенное выражение для полного заряда на эллипсоиде.

Пусть $S_0(y=0)$ и $S_1(y=-H)$ — плоскости, заряженные соответственно потенциалами U_0 и U_1. Через S обозначим поверхность сжатого эллипсоида вращения, центр которого совместим с началом локальной системы координат (x_1, y_1, z_1). Системы (x_1, y_1, z_1) и (x, y, z) будем считать одинаково ориентированными и за ось симметрии эллипсоида примем ось $0z_1$. С системой (x_1, y_1, z_1) свяжем систему координат сжатого сфероида

$$z_1 = a \operatorname{sh}\eta \cos\theta, \quad x_1 = \rho_1 \cos\varphi,$$

$$\rho_1 = a \operatorname{ch}\eta \sin\theta, \quad y_1 \rho_1 \sin\varphi, \quad y = y_1 - h, \tag{1}$$

$0 \leqslant \eta < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$

Требуется найти в слое $-H < y < 0$ с эллипсоидальной полостью S $(0 \leqslant \eta < \eta_0)$ гармоническую функцию u, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую условиям

$$u\Big|_S = f(y_1, z_1), \tag{2}$$

$$u\Big|_{S_0} = u_0, \qquad u\Big|_{S_1} = u_1. \tag{3}$$

Решение задачи для слоя с эллипсоидальной полостью представим в виде

$$u = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} h_{nm} Y_{nm}(\eta, \theta, \varphi) + \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (A_{\lambda\mu} e^{\gamma y} +$$

$$+ B_{\lambda\mu} e^{-\lambda y}) e^{i(\mu x + \lambda y)} d\lambda d\mu + v, \quad \gamma = (\lambda^2 + \mu^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Здесь введены обозначения

$$v = u_0 + (u_0 - u_1)(y/H); \quad Y_{nm}(\eta, \theta, \varphi) = Q_n^m(i \operatorname{sh}\eta) Z_{nm}(\theta, \varphi);$$

$$Z_{nm}(\theta,\varphi)=P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi};\quad P_n^m(x),\quad Q_n^m(z)$$

— функции Лежандра [1].

Для удовлетворения краевых условий на плоскостях $y=0$ и $y=-H$ воспользуемся формулами перехода в гармонических функциях от координат сжатого сфероида к декартовым координатам [2]. В результате получим выражение функций $A_{\lambda\mu}$, $B_{\lambda\mu}$ через коэффициенты h_{nm}

$$A_{\lambda\mu}=\Delta^{-1}\sum_{n,m}(e^{-\gamma h_1}k_{nm}^{-}-e^{\gamma h_1}k_{nm}^{+})h_{nm},$$

$$B_{\lambda\mu}=\Delta^{-1}\sum_{n,m}(e^{-\gamma h_2}k_{nm}^{+}-e^{-\gamma h_1}k_{nm}^{-})h_{nm},$$

$$\Delta=2\operatorname{sh}\gamma H,\quad h_1=H-h,\quad h_2=H+h,$$

$$k_{nm}^{\pm}(\lambda,\mu)=\frac{a(-1)^n(n+m)!}{2\pi\gamma(n-m)!}i^{-n-1}j_n(i\lambda a)(\mu\mp\gamma)^m\lambda^{-m},$$

$j_n(z)$ — сферическая функция Бесселя.

Граничное условие (2) на поверхности эллипсоида $S(\eta=\eta_0)$ удовлетворим с помощью формул перехода от декартовых координат к координатам сжатого эллипсоида [2]. С учетом того что $y=y_1-h$, получим

$$h_{nm}Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)=\alpha_{nm}+v_{nm}-\iint\limits_{-\infty}^{\infty}(A_{\lambda\mu}e^{-\gamma h}\beta_{nm}^{+}+$$

$$+B_{\lambda\mu}e^{\gamma h}\beta_{nm}^{-})d\lambda d\mu P_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0),$$

$$\beta_{nm}^{\pm}(\lambda,\mu)=(-\lambda)^{-m}(2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}i^{-n}j_n(i\lambda a)(\mu\mp\gamma)^m, \tag{5}$$

где v_{nm} и α_{nm} — коэффициенты Фурье разложения функций v и $f(y_1,z_1)$ в ряды по системе $Z_{nm}(\theta,\varphi)$.

В отношении коэффициентов α_{nm} предположим, что сходится ряд

$$\sum_{n,m}|\alpha_{nm}|^2\frac{(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}. \tag{6}$$

В результате исключения функций $A_{\lambda\mu}$, $B_{\lambda\mu}$ из уравнений (5) придем к бесконечной системе относительно коэффициентов

$$x_{nm}=h_{nm}Q_n^m(i\operatorname{sh}\eta_0)|Z_{nm}|,$$

$$x_{nm}=\beta_{nm}-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{p=|k|}^{\infty}D_{np}^{mk}x_{pk},$$

$$\beta_{nm}=(\alpha_{nm}+v_{nm})\|Z_{nm}\|,\quad m=0\pm1,\ldots;\quad n=|m|,|m|+1,\ldots. \tag{7}$$

Матричные коэффициенты системы вычисляем по формулам

$$D_{np}^{mk} = \omega_{np}^{mk} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma H}}{1-e^{-2\gamma H}} \Big[e^{-\gamma H} \beta_{nm}^{+} k_{pk}^{-} - e^{-\gamma(h-h_1)} \times$$

$$\times \beta_{nm}^{+} k_{pk}^{+} + e^{-\gamma H} \beta_{nm}^{-} k_{pk}^{+} - e^{\gamma(h-h_1)} \beta_{nm}^{-} k_{pk}^{-} \Big] d\lambda d\mu,$$

$$\omega_{np}^{mk} = \|Z_{nm}\| P_n^m(i \operatorname{sh} \eta_0) \Big[Q_p^k(i \operatorname{sh} \eta_0) \|Z_{pk}\| \Big]^{-1}. \tag{8}$$

Исследование коэффициентов (8) показало, что система (7) имеет вполне непрерывный оператор в пространстве l_2 при условии $a \operatorname{ch} \eta_0 < \min(h, h_1)$. Это условие есть условие некасания эллипсоида границ слоя. Решение такой системы при $\beta_{nm} \in l_2$, т.е. при выполнении условия (6), можно получить методом редукции. Оно, как это следует из теоремы Гильберта [3], также принадлежит пространству l_2.

Следует отметить, что в случае полупространства ($h_1 = \infty$) интеграл (8) для матричных элементов вычисляется и они могут быть представлены в виде ряда по степеням параметра $\varepsilon = a/h$. Приближенное решение системы (7) в этом случае также имеет вид разложения по малому параметру ε.

Для задачи электростатики следует принять $\alpha_{nm} = V_0 \delta_{0m}$, где δ_{nm} — символ Кронекера, V_0 — потенциал эллипсоида.

Кроме того, можно положить $u_0 = 0$.

В заключение приведем формулу для полного заряда на эллипсоиде, полученную в результате интегрирования плотности распределения заряда σ,

$$Q = \iint\limits_{(S)} \sigma dS = \frac{a\pi V_0}{2t} \left(1 + \frac{\varepsilon}{4} B\right),$$

$$B = -t^{-1} \left[2 - \varepsilon t^{-1} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{1}{3} + t^{-2}\right) + 0(\varepsilon^3)\right],$$

$$t = \operatorname{arcctg}(\operatorname{sh} \eta_0).$$

При $\eta_0 = 0$ ($t = \pi/2$) получим соответствующий результат для диска. Аналогично изложенному могут быть решены другие основные задачи теории потенциала для слоя с эллипсоидальной неоднородностью.

Список литературы

[1] *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: ГИТТЛ, 1953. 379 с.

[2] *Ерофеенко В.Т.* Теоремы сложения. Минск: Наука и техника, 1989. 255 с.

[3] *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Пориближенные мтеоды высшего анализа. М.; Л.: ГИФМЛ, 1962. 708 с.