01

УПРАВЛЕНИЕ СЛАБЫМИ ВНЕШНИМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ДВИЖЕНИЕМ СОЛИТОНОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИНУСОИДАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ГОРДОНА И НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКЕ

И.В.Краснослободцев

(Поступило в Редакцию 30 ноября 1993 г.)

Сформулированы и решены задачи управления слабыми внешними воздействиями движением солитонов, описываемых синусоидальным уравнением Гордона, показаны приложения данной проблематики для решения различных задач обработки и хранения информации, физической информатики. Для разных видов возмущений с использованием принципа максимума Понтрягина построены управления, быстрейшим образом переводящие центр масс неподвижного солитона в заданное состояние.

Введение

Известно, что импульс, распространяющийся в виде солитона, может переносить информацию без заметных искажений и потери интенсивности. Поэтому приложением теории управления движением солитонов будут задачи физической информатики. Действительно, формируя солитонные импульсы и управляя их движением, можно обеспечить высокую скорость и качество передачи информации. Устойчивость солитонов, возможность их хранить, перемещать в определенном направлении и в заданное состояние целенаправленными внешними воздействиями, делает данные объекты хорошими носителями информации. Например, солитоны могут служить битами в разных информационных системах.

Известно, что основными элементами любой цифровой вычислительной машины являются переключающие устройства, которые могут принимать одно из двух возможных состояний. Предельная скорость вычислительных операций в машине кроме других факторов определяется временем перехода переключающего устройства из одного состояния в другое, которое должно быть минимально. В силу других соображений затраты должны быть ограничены и по возможности минимальны.

Если в качестве элементной базы использовать нелинейную среду (сверхпроводники, оптические элементы, магнитные жидкости He^3A), которая способна формировать солитоны при определенном возбуждении, то можно рассмотреть случай солитонного переключателя, когда неподвижный солитон, описываемый уравнением синус-Гордона, соответствует состоянию с цифрой 0, а этот же солитон, переведенный внешней управляющей функцией в другое состояние, соответствует цифре 1 в двоичной системе исчисления.

В качестве управляющего воздействия можно рассматривать слабые электромагнитные поля, ограниченные по напряженности.

Например, джозефсоновский солитон в связи с тунелированием нормальных электронов замедляет свое движение и в конце концов остановится, если нет внешней силы (т.е. напряжения, создаваемого внешним источником, подключенным к сверхпроводникам). Следовательно, солитоны можно накапливать и пересылать вдоль перехода целенаправленными внешними воздействиями, что естественно использовать для записи и передачи информации в системе большого числа связанных между собой длинных джозефсоновских переходов. Размеры этих солитонов могут быть малы, меньше 0.1 мм, а время, необходимое для их образования, не более 10^{-10} с. Операционная система, построенная из джозефсоновских переходов, занимала бы малый объем, а вычисления производила бы с огромной скоростью. Аналогичную систему можно построить из намагниченных кристаллов, где информационным носителем будут доменные стенки, т.е. магнитные солитоны.

Теория управления движением солитонов

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$S[\varphi] = \varepsilon \cdot R\Big(\varphi, \tau, u(\tau)\Big), \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

где $S[\varphi]$ — нелинейный оператор, задающий рассматриваемое нелинейное уравнение; $R(\varphi, \tau, u(\tau))$ — оператор возмущения; $u(\tau)$ — управляющая функция, ограниченная по величине и выбирающаяся из условия экстремума некоторого функционала.

Предполагаем далее, что уравнение (1) при $\varepsilon = 0$ допускает решение в виде солитона, т.е. имеем исходную неуправляемую систему. При малых возмущениях решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon \cdot \Phi + \ldots, \tag{2}$$

где $\varphi = \varphi_0$ — солитонное решение уравнения (1) при $\varepsilon = 0$.

Представляя функционал J также в виде ряда

$$J = J_0 + \varepsilon \cdot J_1 + \ldots, \tag{3}$$

управление $u(\tau)$ выбираем из условия экстремума J_1. Очевидно, что теорию управления можно было мы развивать и в более высоком порядке по ε, представляя управление также в форме ряда

$$u = u_1 + \varepsilon \cdot u_2 + \ldots, \tag{4}$$

но в данном случае ограничимся первым приближением. Задачи такого вида назовем слабоуправляемыми системами уравнений в частных производных солитонного типа. В качестве примера рассмотрим возмущенное синусоидальное уравнение Гордона, которое в безразмерных переменных x, τ имеет вид

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = \varepsilon \cdot u(\tau), \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{5}$$

где $u(\tau)$ — функция управления, принадлежащая классу кусочно-непрерывных функций и удовлетворяющих ограничению $|u(\tau)| \leqslant 1$.

При малых значениях ε решение этого уравнения можно искать в виде

$$\varphi(x,\tau) = \varphi_0(x) + \varepsilon \cdot \Phi\Big(x,\tau,u(\tau)\Big) + \ldots,$$

$$\varphi_0(x) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp x). \tag{6}$$

После подстановки выражения (6) в уравнение (5) и при учете членов первого порядка малости получим

$$\Phi_{\tau\tau} - \Phi_{xx} + (1 - 2sch^2 x)\Phi = u(\tau). \tag{7}$$

Решение этого уравнения разложим по полной системе собственных функций уравнения Шредингера [1]

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U(x)\right) \cdot f_k(x) = \Omega_k^2 \cdot f_k(x), \tag{8}$$

в котором потенциал $U(x) = 1 - 2sch^2 x$ принадлежит к безотражательному типу. Собственные значения уравнения (8) состоят из нулевого дискретного уровня $\Omega_0 = 0$ и непрерывного спектра $\Omega_k = 1 + k^2$.

Собственные функции задаются выражениями

$$f_0(x) = 2schx \qquad (\Omega_0 = 0), \tag{9}$$

$$f_k(x) = (k + i\,\mathrm{th}\,x)\exp(ikx)/\sqrt{2\pi}(1 + k^2). \tag{10}$$

Из предыдущих соотношений получаем следующее выражение:

$$f_0(x) = \frac{d}{dx}\varphi_0(x). \tag{11}$$

Малое изменение координаты x в первом порядке малости выразим равенством

$$\varphi_0(x + a) = \varphi_0(x) + af(x) + \ldots\ . \tag{12}$$

Функция $af_0(x)$ является оператором изменения координаты солитона, поэтому $f_0(x)$ называется трансляционной модой. Разложим искомую функцию $\Phi(x,\tau,u(\tau))$ по полной системе базисных функций

$$\Phi\Big(x,\tau,u(\tau)\Big) = \frac{1}{8}\psi(0,\tau)f_0(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(k,\tau)f_k(x)dk. \tag{13}$$

Тогда при учете условий ортогональности

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0^2(x)dx = 8, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)f_k(x)dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k^*(x)f_{k_1}(x)dx = \delta(k - k_1) \tag{14}$$

и полноты

$$\frac{1}{8}f_0(x)f_0(x_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)f_k(x_1)dx = \delta(x - x_1) \tag{15}$$

мы получили следующую систему уравнений:

$$\psi_{\tau\tau}(k,\tau) + \Omega_k^2\psi(k,\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\Omega_k}u(\tau)\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi k}{2}\right),$$

$$\psi_{\tau\tau}(0,\tau) = 2\pi u(\tau). \tag{16}$$

Множитель у трансляционной моды $\frac{1}{8}\psi(0,\tau)$ описывает движение центра масс солитона, а коэффициент $\psi(k,\tau)$ определяет изменение его формы.

Для солитона задачу управления сформулируем следующим образом. Наискорейшим образом следует переместить центр масс солитона в заданное состояние, воздействуя на него внешней силой, ограниченной по величине. Таким образом, функционалом является время перевода центра масс солитона в определенное состояние и соответственно управление сводится к минимизации этого времени. Движение центра масс солитона описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\psi_{\tau\tau}(0,\tau) = 2\pi u(\tau), \qquad |u(\tau)| \leqslant 1. \tag{17}$$

Начальные условия такие:

$$\psi(0,\tau) = 0, \qquad \psi_\tau(0,\tau) = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим задачу быстродействия из данного начального состояния (0,0) в конечное положение $(A, 0)$, $A = \mathrm{const} > 0$. Будем предполагать, что $A \in [0, A_0]$, где $A_0 = \mathrm{const}$ определяется из условия применимости теории возмущений для уравнения (5).

Для управления движением центра масс солитона используем результат классической задачи о быстродействии, которая была решена с использованием принципа максимума Понтрягина [2].

Вид управляющей функции, перемещающей центр массы неподвижного солитона с начальными условиями (18) в конечное положение $(A, 0)$ за минимальное время и удовлетворяющей ограничению $|u(\tau)| \leqslant 1$, имеет вид

$$u(\tau) = \begin{cases} +1, & \tau \in [0, \sqrt{A}], \\ -1, & \tau \in [\sqrt{A}, 2\sqrt{A}]. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим в качестве другого примера уравнение

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = \varepsilon F(x)u(\tau), \tag{20}$$

где $F(x)$ — заданная ограниченная функция; $u(\tau)$ — управление, принадлежащее классу кусочно-непрерывных функций и удовлетворяющее ограничению $|u(\tau)| \leqslant 1$.

Аналогично предыдущему случаю представим решение в виде

$$\varphi_{x,\tau} = \varphi_0(x) + \varepsilon \cdot \Phi(x, \tau, u(\tau)) + \ldots, \tag{21}$$

$$\varphi_0(x) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp x),$$

где

$$\Phi(x, \tau) = \frac{1}{8}\psi(0, \tau) f_0(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(k, \tau) f_k(x) dk, \tag{22}$$

и получим систему уравнений

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) f_0(x) dx u(\tau),$$

$$\frac{d^2\psi(k, \tau)}{d\tau^2} + \Omega_k^2 \psi(k, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) f_k^*(x) dx u(\tau). \tag{23}$$

Здесь мы полагаем, что

$$D = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) f_0(x) dx = \text{const}. \tag{24}$$

Движение центра масс солитона тогда описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\psi_{\tau\tau}(0, \tau) = Du(\tau), \qquad |u(\tau)| \leqslant 1. \tag{25}$$

Начальные условия

$$\psi(0, \tau) = 0, \qquad \psi_\tau(0, \tau) = 0. \tag{26}$$

Рассматривая задачу быстродействия из данного начального состояния (0,0) в конечное положение $(A, 0)$, находим искомое управление.

1. Если $D > 0$, то

$$u(\tau) = \begin{cases} +1, & \tau \in [0, \sqrt{A}], \\ -1, & \tau \in [\sqrt{A}, 2\sqrt{A}]. \end{cases} \tag{27}$$

2. Если $D < 0$, то

$$u(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau \in [0, \sqrt{A}], \\ +1, & \tau \in [\sqrt{A}, 2\sqrt{A}]. \end{cases} \tag{28}$$

Здесь $A \in [0, A_0]$, где $A_0 = \mathrm{const}$ определеяется из условия применимости теории возмущений для уравнения (20). Если управление действует на состояние мультипликативным образом, т.е.

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{xx} + \sin\varphi = \varepsilon u(\tau)\varphi, \tag{29}$$

то в линейном приближении, положив $F(x) = \varphi_0(x) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp x)$, сводим задачу к предыдущему случаю.

Управление параметрическим возмущением исследуем на примере следующего уравнения:

$$\varphi_{\tau\tau} - \varphi_{xx} + \Big(1 - \varepsilon g(x)u(\tau)\Big)\sin\varphi = 0, \tag{30}$$

где $g(x)$ — заданная ограниченная функция, $u(\tau)$ — управление в классе кусочно-непрерывных функций, $|u(\tau)| \leqslant 1$.

Решение этого уравнения ищем в виде

$$\varphi(x,\tau) = \varphi_0(x) + \varepsilon\Phi(x,\tau,u(\tau)) + \dots, \tag{31}$$

где

$$\varphi_0(x) = 4\,\mathrm{arctg}(\exp x),$$

$$\Phi(x,\tau) = \frac{1}{8}\psi_0(\tau)f_0(x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(k,\tau)f_k(x)dk. \tag{32}$$

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2\psi_0}{d\tau^2} = 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^3\,x}dx u(\tau),$$

$$\frac{d^2\psi(k,\tau)}{d\tau^2} + \Omega_k^2\psi(k,\tau) = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k^*(x)g(x)\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}^3\,x}dx u(\tau). \tag{33}$$

Обозначим

$$B = 4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(g(x)\,\mathrm{sh}\,x/\,\mathrm{ch}^3\,x\Big)dx. \tag{34}$$

Движение центра масс солитона описывается уравнением

$$\psi_{\tau\tau}(0,\tau) = Bu(\tau), \qquad |u(\tau)| \leqslant 1. \tag{35}$$

Начальные условия

$$\psi(0,\tau) = 0, \qquad \psi_\tau(0,\tau) = 0. \tag{36}$$

Решая задачу быстродействия из состояния (0,0) в положение $(A,0)$, получим искомое управление.

1. Если $B > 0$, то

$$u(\tau) = \begin{cases} +1, & \tau \in [0, \sqrt{A}], \\ -1, & \tau \in [\sqrt{A}, 2\sqrt{A}]. \end{cases} \tag{37}$$

2. Если $B < 0$, то

$$u(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau \in [0, \sqrt{A}], \\ +1, & \tau \in [\sqrt{A}, 2\sqrt{A}]. \end{cases} \tag{38}$$

Здесь $A \in [0, A_0]$, где $A_0 = \text{const}$, определяемая из условия применимости теории возмущений для уравнения (30).

В заключение можно сказать, что синусоидальное уравнение Гордона используется в нелинейной оптике, теории джозефсоновских переходов в сверхпроводниках, дефектов кристаллической решетки, намагничивании ферромагнетиков, квантовой теории поля, биофизике и т.д., поэтому построение эффективных управлений для солитонов, описываемых этим уравнением, актуально для данных областей физики и техники.

Список литературы

[1] *Давыдов А.С.* Солитоны в молекулярных системах. Киев: Наукова думка, 1984.

[2] *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука, 1989.