01;05;07

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛИ СВЯЗАННОЙ СПИНОВОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОНОВ И ЯДЕР В ПОЛУПРОВОДНИКАХ ПРИ УСЛОВИЯХ ОПТИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ

Л.А.Бакалейников, Е.В.Галактионов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021, Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 19 января 1994 г.)

Введение

Изучение динамики связанной спиновой системы электронов и ядер в полупроводниках при условиях оптической ориентации вызывает большой интерес в связи с экспериментальным обнаружением режимов как регулярного, так и стохастического поведения [1]. Математическое описание этой системы было предложено в работах [1–3], а в работе [4] проведено детальное изучение ее стационарных состояний. Особый интерес при рассмотрении систем уравнений, моделирующих эволюцию спиновой электронно-ядерной системы, представляет поиск областей параметров, в которых реализуется нерегулярное поведение. Поскольку одной из возможных причин возникновения хаотического поведения траекторий является наличие гомоклинических орбит, то поиск параметров, при которых реализуется гомоклиническое движение, представляется актуальной задачей в исследовании динамики системы.

Доказательство существования гомоклинического движения для той или иной конкретной системы представляет собой непростую задачу. В редких случаях удается выявить наличие гомоклинической орбиты чисто аналитическим путем, что связано со сложностью анализа глобального поведения траекторий системы. Успех в такого рода ситуациях обычно связан с некоторой симметрией системы или с существованием интегралов, вследствие чего применяемые приемы не носят универсального характера. Мощным универсальным средством исследования глобального поведения траекторий является отображение Пуанкаре. Однако его можно использовать лишь в системах с небольшим числом параметров, поэтому задача поиска их значений, реализующих гомоклиническое движение в многопараметрических системах, требует другого подхода.

В настоящей работе предложен численно-аналитический алгоритм отыскания параметров системы, обеспечивающих наличие гомоклинических траекторий. Этот алгоритм состоит из двух этапов. Первый из них позволяет определить некоторую область в пространстве параметров, в которой поиск гомоклинической орбиты целесообразен. На втором этапе существование набора параметров, реализующего гомоклиническое движение, доказывается с помощью численного анализа отображения Пуанкаре.

Общие соображения, относящиеся к отысканию гомоклинических траекторий

Уравнения, описывающие динамику связанной спиновой системы электронов и ядер при условиях оптической ориентации в полупроводниках, были предложены в [2,3] и имеют вид

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\tau} = \mathbf{h} - \mathbf{H} + \hat{a}\mathbf{s}, \quad 0 = \mathbf{k} - \mathbf{s} + \mathbf{H}/\mathbf{s}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\tau)$ — средний спин ориентированных электронов; $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\tau)$ — полное поле, действующее на электронные спины, т.е. сумма постоянного внешнего магнитного поля h и эффективного ядерного поля; $\mathbf{k}$ — единичный вектор начальной ориентации спина; $\hat{a} = \{a_{ij}\}_{ij=1}^{3}$ — вещественная 3×3 матрица, описывающая поляризацию ядер ориентированными электронами.

В систему (1) входит 14 независимых параметров, и поиск набора, обеспечивающего существование гомоклинической орбиты, представляет большие трудности. Поэтому в дальнейшем ограничимся изучением только таких сценариев возникновения гомоклинических траекторий, при которых они появляются в процессе бифуркации стационарных состояний. Ситуация, при которой возможно образование гомоклинической орбиты, описывается следующим образом. Пусть в результате бифуркации из одной точки покоя $\mathbf{H}^*$ возникают два стационарных состояния $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$. Как будет показано ниже, общие свойства системы (1) гарантируют, что матрица Якоби правой части имеет собственное значение $\lambda = -1$ в каждой точке покоя. Будем считать, что собственные числа, отличные от $\lambda = -1$, в $\mathbf{H}_1$ являются вещественными с разными знаками, а в $\mathbf{H}_2$ — комплексно-сопряженными. Присутствие собственного числа $\lambda = -1$ приводит к тому, что проекция точек траектории на соответствующее собственное направление при движении в окрестности точки покоя экспоненциально убывает. Поэтому движение в окрестности $\mathbf{H}_2$ напоминает движение в окрестности фокуса и траектория, выпущенная из $\mathbf{H}_1$ по неустойчивому направлению, может, “обернувшись” вокруг $\mathbf{H}_2$, возвратиться к $\mathbf{H}_1$ (рис. 1). Изменение вещественной части собственных значений в $\mathbf{H}_2$ приводит к большему или меньшему закручиванию этой траектории вокруг $\mathbf{H}_2$, что в свою очередь может привести к пересечению ее с устойчивым многообразием точки $\mathbf{H}_1$, т.е. к возникновению гомоклинической орбиты.

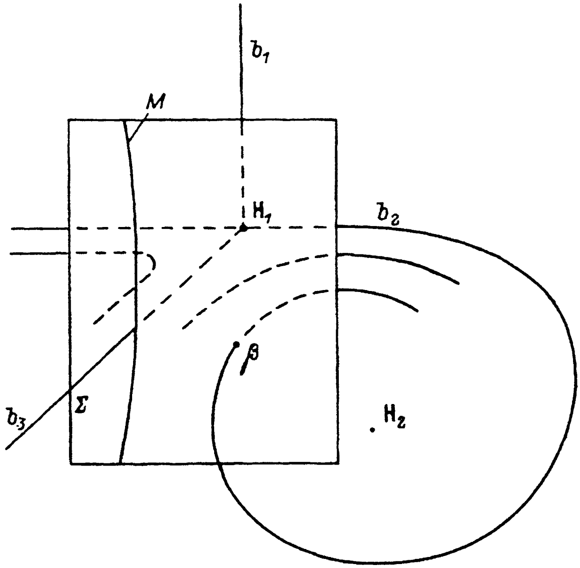

Рис. 1. Поведение траекторий в окрестности "седла" и "фокуса".

Таким образом, один из возможных путей нахождения значений параметров, обеспечивающих наличие гомоклинической траектории, заключается в поиске бифуркации возникновения трехмерного "седла" и трехмерного "фокуса", устойчивость которого зависит от параметров системы.

Для реализации этой идеи рассмотрим прежде всего уравнения, определяющие положение и тип точек покоя. Как было показано в [4], отыскание стационарных состояний (1) сводится к нахождению корней полинома пятой степени относительно компоненты s_3 электронного спина.

$$P(s_3) = \Big[\Delta^2(s_3)\cdot(s_3^2 - k_3 s_3) + \big(b_1^2(s_3) + b_2^2(s_3)\big) -$$
$$-(b_1(s_3)k_1 + b_2(s_3)k_2) * \Delta(s_3)\Big]/s_3. \tag{2}$$

Здесь

$$\Delta(s_3) = A_{33}s_3^2 + (a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22})h_3)s_3 + 1 + h_3^2, \tag{3}$$

$$b_1(s_3) = A_{31}s_3^3 + (a'_{23} - a'_{22}h_1 + a'_{12}h_2 + a'_{13}h_3)\cdot s_3^2 +$$
$$+(a'_{12}k_1 + a'_{22}k_2 + h_2 + h_1 h_3)\cdot s_3 + k_1 - k_2 h_3, \tag{4}$$

$$b_2(s_3) = A_{32}s_3^3 + (-a'_{13} + a'_{21}h_1 - a'_{11}h_2 + a'_{23}h_3)\cdot s_3^2 +$$
$$+(-a'_{11}k_1 - a'_{21}k_2 - h_1 + h_2 h_3)\cdot s_3 + k_2 + k_1 h_3, \tag{5}$$

$$A_{31} = a'_{12}a'_{23} - a'_{22}a'_{13}, \tag{6}$$

$$A_{32} = a'_{13}a'_{21} - a'_{11}a'_{23}, \tag{7}$$

$$A_{33} = a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21}. \tag{8}$$

Элементы матрицы $\hat{a}$ связаны с элементами $\hat{a}$ соотношением $a'_{ij} = a_{ij} - a_{33}\delta_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3$. В дальнейшем будем считать, что элементы a_{31}, a_{32} матрицы $\hat{a}$ равны нулю. Как показано в [5], этого всегда можно добиться с помощью выбора ортогонального базиса в исходной системе (1).

При известном s_3 компоненты s_1, s_2 определяются из соотношений

$$s_i = b_i(s_3)/\Delta(s_3); \quad i = 1, 2 \tag{9}$$

в предположении, что $\Delta(s_3) \neq 0$.

Стационарные значения s_1, s_2, s_3 электронного спина позволяют определить полное поле $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ в точках покоя системы (1)

$$\mathbf{H} = \mathbf{h} + \hat{a}\mathbf{s}. \tag{10}$$

Выясним теперь, какие требования необходимо наложить на параметры системы для реализации бифуркации точки покоя в "седло" и "фокус". Запишем систему (1) в окрестности точки бифуркации в виде

$$\frac{d\mathbf{H}(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = \mathbf{h}(\varepsilon) - \mathbf{H} + \hat{a}(\varepsilon) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{H}, \varepsilon) = \mathbf{F}(\mathbf{H}, \varepsilon). \tag{11}$$

Здесь $\varepsilon \geqslant 0$ — бифуркационный параметр. При $\varepsilon = 0$ точка покоя $\mathbf{H}^* = \mathbf{H}(\tau, 0) = \mathrm{const}$ системы (11) должна быть вырождена, т.е. полином $P(s_3)$ должен иметь кратный корень

$$P(s_3^*) = 0, \tag{12}$$

$$P'(s_3^*) = 0, \tag{13}$$

где $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}(\mathbf{H}, 0)$.

Тот факт, что при $\varepsilon > 0$ вырожденная точка покоя распадается на "седло" ($\mathbf{H}_1$) и "фокус" ($\mathbf{H}_2$), приводит к дополнительным ограничениям на параметры системы. Чтобы сформулировать необходимые для осуществления такой бифуркации условия, рассмотрим якобиан правых частей (11). Докажем прежде всего, что матрица $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{H}$ имеет собственное значение $\lambda_1 = -1$ в каждой точке покоя. Используя алгебраическую связь, задаваемую вторым уравнением системы (1), найдем

$$\mathbf{s} = \frac{1}{H^2 + 1}(\mathbf{k} + \mathbf{H}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \times \mathbf{k}). \tag{14}$$

В то же время вектор $\mathbf{H}$ представляет собой неоднозначную функцию $\mathbf{s}$ и, следовательно, $\det(\partial\mathbf{s}/\partial H') = 0$. При этом характеристическое уравнение

$$\det\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{H}} - \lambda I\right) = \det\left(\hat{a}(\varepsilon)\frac{\partial\mathbf{s}}{\partial\mathbf{H}} - (\lambda + 1)I\right) = 0$$

в каждой точке покоя $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2$ имеет $\lambda = -1$ своим корнем и может быть записано в виде

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + a^i(\varepsilon)\lambda + b^i(\varepsilon)) = 0,$$

$$a^i(\varepsilon) = a_0 + \delta_i(\varepsilon), \quad b^i(\varepsilon) = b_0 = \gamma_i(\varepsilon), \quad i = 1,2. \tag{15}$$

В процессе бифуркации число точек покоя изменяется, поэтому[1]

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{H}}\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}^*}\right) = 0. \tag{16}$$

Соотношение (16) означает, что матрица $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{H}|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}^*}$ имеет по крайней мере одно нулевое собственное число и, следовательно,

$$b_0 = 0. \tag{17}$$

Покажем, что необходимым условием существования "седла" и "фокуса" при $\varepsilon > 0$ является требование

$$a_0 = 0. \tag{18}$$

Действительно, отличные от $\lambda_1 = -1$ корни характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda^i_{2,3} = -\frac{a^i(\varepsilon)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^i(\varepsilon)}{2}\right)^2 - b^i(\varepsilon)}. \tag{19}$$

Пусть $a_0 \neq 0$. Тогда

$$\lambda^i_{2,3} = -\frac{a_0}{2} \pm \frac{a_0}{2}\cdot\left(1 + 2\frac{\delta_i(\varepsilon)}{a_0} + \frac{\delta_i^2(\varepsilon)}{a_0^2} - \frac{4\gamma_i(\varepsilon)}{a_0^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\delta_i(\varepsilon), \tag{20}$$

и при малых значениях бифуркационного параметра собственные значения в обеих точках покоя оказываются вещественными.

Таким образом, необходимыми условиями появления бифуркации с желаемыми свойствами являются равенства (12), (13), (17), (18).

Отыскание параметров системы, обеспечивающих существование бифуркации

Как следует из (1), полное число независимых параметров системы равно 14. В работе [4] показано, что путем выбора соответствующего базиса трехмерного пространства, в котором решается исходная система, число параметров можно уменьшить до 12. Для облегчения дальнейших выкладок положим

$$k_1 = k_2 = 0, \quad \Rightarrow \mathbf{k}_3 = 1; h_1 = h_2 = 0, \tag{21}$$

$$A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0. \tag{22}$$

Учитывая (21), (22), найдем

$$b_1(s_3) = s_3^2\cdot(a'_{23} + a'_{13}\cdot h_3), \tag{23}$$

[1] Равенство (16) должно выполняться, поскольку в противном случае по теореме о неявной функции в окрестности критического значения бифуркационного параметра можно было бы найти лишь один корень соотношения $\mathbf{F}(\mathbf{H},\varepsilon) = 0$, определяющего точки покоя системы (11).

$$b_2(s_3) = s_3^2 \cdot (-a'_{13} + a'_{23} \cdot h_3), \tag{24}$$

$$\Delta(s_3) = (a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22}) \cdot h_3) \cdot s_3 + 1 + h_3^2, \tag{25}$$

$$P(s_3) = \left[(a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22}) \cdot h_3) \cdot s_3 + 1 + h_3^2\right]^2 \times$$
$$\times (s_3 - 1) + s_3^3 \cdot (a'_{23} + a'_{13}h_3)^2 + s_3^3 \cdot (-a'_{13} + a'_{23}h_3)^2, \tag{26}$$

$$P'(s_3) = \Delta^2(s_3) = 2(s_3 - 1) \cdot \Delta(s_3) \cdot (a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22}) \cdot h_3) +$$
$$+ 3s_3^2 \left((a'_{23} + a'_{13}h_3)^2 + (-a'_{13} + a'_{23}h_3)^2\right). \tag{27}$$

Зададим значение компоненты s_3 в точке бифуркации

$$s_3^* = 0.5. \tag{28}$$

Тогда условия (12), (13) примут вид

$$\Delta^2(0.5) = 0.25 \cdot ((a'_{23})^2 + (a'_{13})^2) \cdot (1 + h_3^2), \tag{29}$$

$$\Delta^2(0.5) - \Delta(0.5) \cdot (a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22}) \cdot h_3) =$$
$$= -0.75 \cdot \left((a'_{23})^2 + (a'_{13})^2\right) \cdot (1 + h_3^2). \tag{30}$$

Если хотя бы один из коэффициентов a'_{13}, a'_{23} отличен от нуля, то, согласно (29), $\Delta(0.5) \neq 0$ и стационарное состояние является нормальным [4]. Подставляя (29) в (30) и используя (25), получим

$$-(a'_{12} - a'_{21} - (a'_{11} + a'_{22}) \cdot h_3) = 4 \cdot (h_3^2), \tag{31}$$

откуда

$$\Delta(0.5) = -(1 + h_3^2). \tag{32}$$

С учетом этого соотношения равенство (29) дает

$$1 + h_3^2 = 0.25 \cdot \left((a'_{23})^2 + (a'_{13})^2\right). \tag{33}$$

Условия (17), (18) накладывают дополнительные связи на параметры системы. Для их определения необходимо вычислить производные $\partial s_i / \partial H_j$, $i, j = 1, 2, 3$ и построить характеристическое уравнение. Можно показать, что коэффициенты характеристического уравнения (15) задаются соотношениями

$$a^i(\varepsilon) = -Sp\left(\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{H}}|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}_i} - I\right) - 1, \quad i = 1, 2, \tag{34}$$

$$b^i(\varepsilon) = -\det\left(\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{H}}|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}_i} - I\right), \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

С учетом равенств (21) зависимость (14) $\mathbf{s}(\mathbf{H})$ принимает вид

$$s_1 = \frac{H_3 \cdot H_1 + H_2}{H^2 + 1}, \quad s_2 = \frac{H_3 \cdot H_2 - H_1}{H^2 + 1}, \quad s_3 = \frac{H_3^2 + 1}{H^2 + 1}, \tag{36}$$

что приводит к

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{H}} = (\mathbf{G}_1; \mathbf{G}_2; \mathbf{G}_3), \quad \mathbf{G}_i = -\frac{2H_i}{H^2 + 1}\mathbf{s} + \frac{1}{H^2 + 1}\mathbf{L}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} H_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ H_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ 2H_3 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Поскольку в точке покоя имеет место соотношение $\hat{a}\mathbf{s} = \mathbf{H} - \mathbf{h}$, то

$$\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{H}}\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}^*} = (\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2; \mathbf{P}_3),$$

$$\mathbf{P}_i = -\frac{2H_i}{H^2+1}(\mathbf{H} - \mathbf{h}) + \frac{1}{H^2+1}\hat{a} \cdot \mathbf{L}_i\Big|_{\mathbf{H}=\mathbf{H}^*}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{38}$$

Это дает

$$\hat{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{H}} - I = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix},$$

$$Q_{11} = -1 + \frac{-2H_1^2 + a_{11}H_3 - a_{12}}{H^2+1}; \qquad Q_{12} = \frac{-2H_1H_2 + a_{12}H_3 + a_{11}}{H^2+1};$$

$$Q_{13} = \frac{-2H_1H_3 + a_{11}H_1 + a_{12}H_2 + 2a_{13}H_3}{H^2+1};$$

$$Q_{21} = \frac{-2H_1H_2 + a_{21}H_3 - a_{22}}{H^2+1}; \qquad Q_{22} = -1 + \frac{-2H_2^2 + a_{22}H_3 + a_{21}}{H^2+1};$$

$$Q_{23} = \frac{-2H_2H_3 + a_{21}H_1 + a_{22}H_2 + 2a_{23}H_3}{H^2+1};$$

$$Q_{31} = \frac{-2H_1(H_3 - h_3)}{H^2+1}; \qquad Q_{32} = \frac{-2H_2(H_3 - h_3)}{H^2+1};$$

$$Q_{33} = -1 + \frac{-2H_3(H_3 - h_3) + 2a_{33}H_3}{H^2+1}. \tag{39}$$

Для выбора параметров системы, обеспечивающих необходимую бифуркацию, удобно задавать величины a'_{13}, a'_{11}, и $\alpha = a'_{23}/a'_{13}$. Из равенств (22), (33) найдем

$$a'_{21} = \alpha \cdot a'_{11}, \quad h_3^2 = 0.25 \cdot (1 + \alpha^2) \cdot (a'_{13})^2 - 1. \tag{40}$$

Из условия $A_{31} = 0$ следует

$$a'_{22} = a'_{12}\alpha. \tag{41}$$

Соотношение (31) позволяет вычислить a'_{12}

$$a'_{12} = \left(a'_{11} \cdot (h_3 + \alpha) - 4(1 + h_3^2)\right) / (1 - \alpha h_3). \tag{42}$$

Используя выражения (23)–(25), можно определить

$$b_1(0.5) = 0.25 \cdot (h_3 + \alpha) \cdot a'_{13}, \tag{43}$$

$$b_2(0.5) = 0.25 \cdot (h_3\alpha - 1) \cdot a'_{13}, \tag{44}$$

$$\Delta(0.5) = -0.25 \cdot (1+\alpha^2) \cdot (a'_{13})^2, \tag{45}$$

что в свою очередь позволяет найти s_1^*, s_2^* по формулам (9)

$$s_1^* = -0.25 \frac{\alpha + h_3}{1+h_3^2} a'_{13}, \qquad s_2^* = -0.25 \frac{1-\alpha h_3}{1+h_3^2} a'_{13}. \tag{46}$$

Используя (36) и равенство

$$H_3^* = h_3 + a_{33} s_3^*, \tag{47}$$

можно найти компоненты H_1^*, H_2^*:

$$H_1^* = (H_3^* s_1^* - s_2^*)/s_3^* = (h_3 s_1^* - s_2^*)/s_3^* + a_{33} s_1^* =$$
$$= -0.5 a'_{13} + a_{33} s_1^*, \tag{48}$$
$$H_2^* = (H_3^* s_2^* + s_1^*)/s_3^* = (h_3 s_2^* + s_1^*)/s_3^* + a_{33} s_2^* =$$
$$= -0.5 a'_{13} \cdot \alpha + a_{33} s_2^*. \tag{49}$$

Величину a_{33} необходимо выбрать так, чтобы выполнялось соотношение (18). Уравнение, определяющее a_{33}, легко получить, подставляя (47)–(49) в (39) и используя (34). Это дает

$$4\left((s_1^*)^2 + (s_2^*)^2 + (s_3^*)^2 - s_3^*\right) a_{33}^2 - \Big(4a'_{13}(s_1^* + \alpha s_2^*) +$$
$$+ (a'_{11} + a'_{22} - 6h_3)s_3^* + 4h_3\Big) a_{33} + (a'_{13})^2(1+\alpha^2) + a'_{12} -$$
$$- a'_{21} - h_3(a'_{11} + a'_{22}) + 6h_3^2 + 2 = 0. \tag{50}$$

Выберем

$$a'_{11} = 8, \quad a'_{13} = 2, \quad \alpha = 2. \tag{51}$$

При этом имеем

$$a'_{12} = -4, \quad a'_{21} = 16, \quad a'_{22} = -8, \quad a'_{23} = 4,$$
$$h_3 = 2, \quad s_1^* = -0.4, s_2^* = -0.3,$$
$$a_{33} = -\frac{5}{3}, \quad H_1^* = -\frac{1}{3}, \quad H_2^* = -\frac{3}{2}, \quad H_3^* = \frac{7}{6}. \tag{52}$$

Найденный набор значений параметров системы, как и следовало ожидать, удовлетворяет соотношению (17) (см. сноску [1]).

Таким образом, система (1) с параметрами

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & -4. & 2. \\ 16 & -\frac{29}{3} & 4. \\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix} \tag{53}$$

обладает сложным положением равновесия с двумя нулевыми собственными числами. Отметим, что значения (53) являются далеко не единственными значениями $\hat{a}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{k}$, при которых система имеет вырожденную точку покоя с требуемыми свойствами. При отыскании (53) произвольным образом фиксировались величины k_1, k_2, h_1, h_2, s_3^*, a'_{11}, a'_{13}, $\alpha = a'_{23}/a'_{13}$. Однако, поскольку целью настоящей работы является выяснение вопроса о возможности существования гомоклинического движения в системе (1), указание хотя бы одного набора параметров оказывается достаточным.

Определение возмущения, приводящего к появлению гомоклинической траектории

Перейдем теперь к отысканию возмущения параметров системы, обеспечивающего появление двух точек покоя, в одной из которых все собственные числа вещественны, а в другой два из них имеют ненулевую мнимую часть. Для упрощения дальнейших выкладок будем варьировать лишь параметры матрицы $\hat{a}$ и компоненту h_3 вектора $\mathbf{h}$

$$\hat{a} = \hat{a}^0 + \varepsilon\hat{c}, \quad h_3 = h_3^0 + \varepsilon d. \tag{54}$$

Найдем прежде всего новые положения точек покоя. Запишем третью компоненту вектора s в возмущенных точках покоя в виде

$$s_3(\varepsilon) = s_3^* + x(\varepsilon). \tag{55}$$

Величина $x(\varepsilon)$ определится из соотношения (2), где в качестве параметров системы использованы возмущенные значения (54). Подстановка (54) в (3)–(5) позволяет найти разложения $b_1(s_3^* + x, \varepsilon)$, $b_2(s_3^* + x, \varepsilon)$, $\Delta(s_3^* + x, \varepsilon)$ по x, ε. При этом (2) принимает вид

$$\varepsilon(-18c_{11} + 3c_{22} - \frac{27}{2}c_{12} + 4c_{21} + \frac{45}{2}c_{13} - 5c_{23} + 30d) +$$

$$+150x^2 + O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon x) + O(x^3) = 0, \tag{56}$$

откуда

$$x = \pm D\sqrt{\varepsilon},$$

$$D = ((18c_{11} - 3c_{22} + \frac{27}{2}c_{12} - 4c_{21} - \frac{45}{2}c_{13} + 5c_{23} - 30d)/150)^{0.5}, \tag{57}$$

$$s_3^{1,2} = s_3^* \pm D\sqrt{\varepsilon}. \tag{58}$$

Остальные компоненты векторов $\mathbf{s}$ в точках покоя легко найти, используя формулы (9) и разложения $b_1(s_3^* + x, \varepsilon)$, $b_2(s_3^* + x, \varepsilon)$, $\Delta(s_3^* + x, \varepsilon)$,

$$s_1^{1,2} = -0.4 + O(\varepsilon), \quad s_2^{1,2} = -0.3 + O(\varepsilon). \tag{59}$$

Формула (10) позволяет определить значения вектора $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}^{1,2} = \begin{pmatrix} -1/3 \pm 2D\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) \\ -1.5 \pm 4D\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) \\ 7/6 \mp \frac{5}{3}D\sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{60}$$

Коэффициенты $a^i(\varepsilon)$; $i = 1, 2$ в уравнении (15) находятся по формуле (34)

$$a^i(\varepsilon) = \mp\frac{1320}{85}D\sqrt{\varepsilon}; \quad i = 1, 2. \tag{61}$$

Как видно из выражения (57), знак D не может быть изменен при варьировании параметров c_{ij}, d. Это означает, что управлять устойчивостью "фокуса", даже если он появится в возмущенной системе, не удастся. Действительно, если предположить, что собственные числа

λ_2, λ_3 в одной из точек покоя являются комплексно-сопряженными, то, согласно (19), $\mathrm{Re}\lambda_2 = \mathrm{Re}\lambda_1 = -a^i(\varepsilon)/2$ и знак вещественной части собственных чисел остается постоянным при всех возможных комбинациях параметров возмущения (см. (61)). Отмеченное обстоятельство резко снижает шансы на возникновение гомоклинической орбиты в возмущенной системе.

Причина создавшейся ситуации заключается в том, что возмущение векторов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{H}$ имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ при возмущении параметров системы величинами порядка $O(\varepsilon)$. При выравнивании порядков возмущения $\mathbf{s}$, $\mathbf{H}$ и параметров системы коэффициенты $a^i(\varepsilon)$ окажутся зависящими от c_{ij}, d, что приведет к возможности изменения знака вещественной части собственных чисел в "фокусе". Для того чтобы порядок возмущения величины s_3 был $O(\varepsilon)$, необходимо потребовать равенства нулю коэффициента при ε в соотношении (56), что дает

$$-18c_{11} + 3c_{22} - \frac{27}{2}c_{12} + 4c_{21} + \frac{45}{2}c_{13} - 5c_{23} + 30d = 0. \tag{62}$$

При этом главными членами в (56) оказываются величины порядка $O(\varepsilon^2)$, $O(x^2)$, которые необходимо удержать в разложении $P(s_3)$ по x, ε. Подставляя разложения $b_1(s_3^* + x, \varepsilon)$, $b_2(s_3^* + x, \varepsilon)$, $\Delta(s^* + x, \varepsilon)$ в (2) и удерживая в разложении $P(s_3^* + x, \varepsilon)$ члены указанного порядка, найдем

$$P^{20}\varepsilon^2 + P^{11}\varepsilon x + P^{02}x^2 + O(\varepsilon^3) + O(x\varepsilon^2) + O(x^2\varepsilon) + O(x^3) = 0,$$

$$P^{20} = \frac{5}{4}(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) + (c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) + \frac{3}{4}(c_{13}c_{21} - c_{11}c_{23}) +$$

$$+ d \cdot \left[\frac{3}{2}c_{23} + 2c_{13} - \frac{5}{2}(c_{11} + c_{22})\right] + 5d^2 + \frac{1}{8}\Big[(2c_{12} - c_{23} + 6c_{13} - c_{22} + 2d)^2 +$$

$$+ (7c_{13} + c_{21} - 2c_{23} - 2c_{11} + 4d)^2\Big] - \frac{1}{2}\left(-3c_{11} + c_{22} - \frac{7}{2}c_{12} + \frac{1}{2}c_{21} + 4d\right)^2,$$

$$P^{11} = -104c_{11} + 24c_{22} - 78c_{12} + 32c_{21} + 175c_{13} - 50c_{23} + 100d,$$

$$P^{02} = 150. \tag{63}$$

Из (63) следует, что

$$x_{1,2} = Q_{1,2}\varepsilon + O(\varepsilon), \tag{64}$$

причем $Q_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$P^{02}Q^2 + P^{11}Q + P^{20} = 0. \tag{65}$$

Вычисляя коэффициент $a(\varepsilon)$ по формуле (34) с использованием (39), найдем

$$a(\varepsilon) = 4 - \frac{1}{1 + H^2}((a_{11} + a_{22} + 2a_{33} + 2h_3)H_3 - a_{12} + a_{21} + 2), \tag{66}$$

или, поскольку $(1+H^2)^{-1} = s_3(1+H_3^2)^{-1}$,

$$a(\varepsilon) = 4 - \frac{s_3}{1+H_3^2}((a_{11}+a_{22}+2a_{33}+2h_3)H_3 - a_{12} + a_{21} + 2). \qquad (67)$$

Чтобы упростить дальнейшие выкладки, будем считать, что $c_{31} = c_{32} = c_{33} = 0$. Тогда

$$H_3 = a_{33}^0 s_3 + h_3 \qquad (68)$$

и $a(\varepsilon)$ является функцией лишь компоненты s_3 вектора $\mathbf{s}$. Согласно (64),

$$s_3^{1,2} = 0.5 + Q_{1,2}\varepsilon + o(\varepsilon), \qquad (69)$$

что дает

$$a^{1,2}(\varepsilon) = -\frac{18}{85}\varepsilon\left(\frac{170}{9}\left(2Q_{1,2} - \frac{84}{85}\left(d - \frac{5}{3}Q_{1,2}\right)\right) - \frac{8}{3}\left(d - \frac{5}{3}Q_{1,2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{6}(c_{11}+c_{22}+2d) - c_{12} + c_{21}\right) + o(\varepsilon). \qquad (70)$$

Для упрощения анализа знака $a^1(\varepsilon)$, $a^2(\varepsilon)$ в разделившихся точках покоя положим $d = 0$, $Q_1 = 0$. Условие $Q_1 = 0$ приводит к требованию

$$P^{20} = 0. \qquad (71)$$

Тогда

$$Q_2 = -\frac{1}{150}(-104c_{11} + 24c_{22} - 78c_{12} + 32c_{21} + 175c_{13} - 50c_{23}). \qquad (72)$$

Отметим, что выполнение соотношения (62) обеспечивается при $c_{11} = c_{12} = c_{13} = d = 0$ и

$$c_{23} = \frac{1}{5}(3c_{22} + 4c_{21}). \qquad (73)$$

В этом случае соотношение (71) выполняется тождественно. При этих значениях параметров имеем

$$a^1(\varepsilon) = -\frac{18}{85}\varepsilon\left(\frac{7}{6}c_{22} + c_{21}\right), \qquad (74)$$

$$a^2(\varepsilon) = -\frac{18}{85}\varepsilon\left(4.1c_{22} + \frac{221}{45}c_{21}\right). \qquad (75)$$

Из (74), (75) видно, что изменения знака $a^i(\varepsilon)$ можно добиться, меняя знак линейной комбинации коэффициентов c_{21}, c_{22}. Для получения требуемой бифуркации собственные числа в одной из точек покоя должны быть комплексными, а в другой — вещественными. Это приводит к условиям на дискриминанты уравнений (15)

$$(a^1(\varepsilon))^2 - 4b^1(\varepsilon) < 0, \quad (a^2(\varepsilon))^2 - 4b^2(\varepsilon) > 0 \tag{76}$$

или

$$(a^1(\varepsilon))^2 - 4b^1(\varepsilon) > 0, \quad (a^2(\varepsilon))^2 - 4b^2(\varepsilon) < 0. \tag{77}$$

Численные расчеты показывают, что всем перечисленным условиям удовлетворяет набор параметров

$$c_{21} = -8.4, \quad c_{22} = 10, \quad \varepsilon = 0.01. \tag{78}$$

В этом случае система (1) имеет точки покоя, в одной из которых $\lambda_1^1 = -1$, $\lambda_2^1 = 0.058$, $\lambda_3^1 = -0.052$, а в другой $-\lambda_1^2 = -1$, $\lambda_2^2 = -3.02 \cdot 10^{-4} + i \cdot 5.52 \cdot 10^{-2}$, $\lambda_3^2 = -3.02 \cdot 10^{-4} - i \cdot 5.52 \cdot 10^{-2}$. При $c_{21} = -8.5$, $c_{22} = 10$ знак вещественной части λ_2^2 и λ_3^2 меняется, что приводит к изменению устойчивости фокуса.

Дальнейший поиск значений параметров, при которых возникает гомоклиническая орбита, проводился с помощью численных методов. Трехмерность исследуемой системы позволяет свести задачу к анализу поведения отображения Пуанкаре. Для определения этого отображения построим в окрестности "седла" плоскость $\sum$, параллельную собственным векторам b_1, b_2, отвечающим собственным значениям $\lambda_1^1 = -1$, $\lambda_2^1 > 0$ (рис. 1). Вычисляя точку пересечения β этой плоскости с неустойчивым многообразием и линию ее пересечения M с устойчивым многообразием "седла", надо пытаться определить наборы параметров, при которых β оказывается по разные стороны от кривой M. Соединив эти наборы в пространстве параметров непрерывной кривой, можно вследствие непрерывной зависимости решения от параметров системы гарантировать существование значений, при которых "след" неустойчивого многообразия попадает на образ устойчивого многообразия. Это и означает возникновение в системе гомоклинической орбиты.

В программе вычисления траекторий расчет был организован следующим образом.

1. Для заданных значений параметров определялись корни полинома $P(s_3)$ и отыскивались векторы $\mathbf{s}$, $\mathbf{H}$, соответствующие точкам покоя.

2. Вычислялись собственные значения и собственные векторы матрицы Якоби в этих точках.

3. Методом Рунге–Кутта рассчитывались траектории системы, определялись точка β и кривая M на плоскости $\sum$.

Вообще говоря, расчет линии пересечения M плоскости $\sum$ с устойчивым многообразием "седла" можно провести, меняя направление времени в системе (1) и выпуская траектории по векторам, представляющим собой линейную комбинацию собственных векторов b_1 и b_3. Однако вследствие большого различия собственных значений λ_1^1, λ_3^1 такой подход оказывается нерациональным. Более удобной является следующая процедура. На плоскости $\sum$ строится сетка, из узлов которой выпускаются траектории. Анализ поведения проекции точек этих траекторий на направление b_2 позволяет определить местоположение M относительно узлов.

Расчеты показали, что при

$$\varepsilon = 0.01, \quad c = \begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. \\ -8.4 & 10. & -0.72 \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}, \quad d = 0 \tag{79}$$

и

$$\varepsilon = 0.01, \quad c = \begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. \\ -8.5 & 10. & -0.8 \\ 0. & 0. & 0. \end{pmatrix}, \quad d = 0 \tag{80}$$

след B траектории, выпущенной по неустойчивому направлению из "седла", располагается по разные стороны от образа M устойчивого многообразия. Следовательно, найдется значение $c_{21}^* \in [-8.5, -8.4]$ и соответствующее ему значение c_{23}^*, рассчитанное по формуле (73), такие, что система (1) с параметрами

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & -4. & 2. \\ 16 + 0.01 \cdot c_{21}^* & -\frac{287}{30} & 4. + 0.01 \cdot c_{23}^* \\ 0 & -0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2. \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix} \tag{81}$$

обладает гомоклинической орбитой.

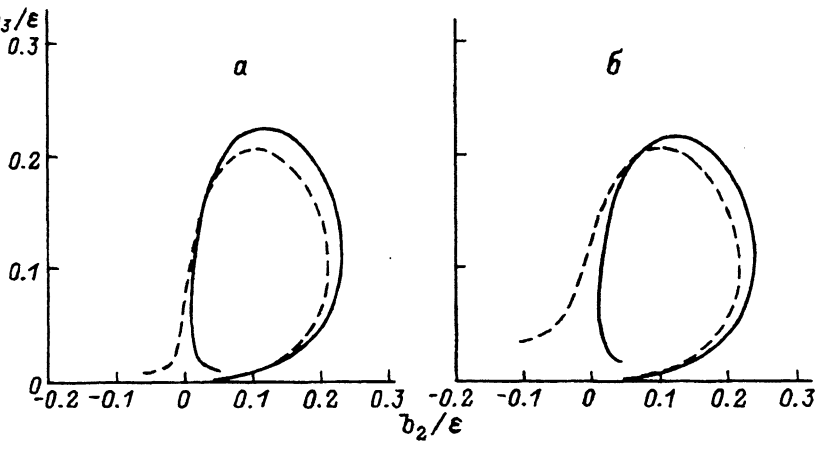

Рис. 2. Проекция траектории системы (1), выпущенной из "седла" по неустойчивому направлению, на плоскость собственных векторов b_2, b_3, отвечающих собственным значениям λ_2^1, λ_3^1.

$\varepsilon = 001$ (a), 0.1 ($б$); сплошные кривые — $C_{21} = 8.4$, штриховые — 8.3.

На рис. 2, *а* приведена проекция траекторий системы (1) с параметрами (79), (78) на плоскость собственных векторов b_2, b_3, соответствующих собственным числам λ_2^1, λ_3^1. Увеличение параметра ε не изменяет характера качественного поведения траекторий системы, а приводит лишь к изменению диапазона c_{21}, в котором найдется значение, обеспечивающее наличие гомоклинической траектории. Эту ситуацию иллюстрирует рис. 2, *б*.

В заключение отметим, что предложенный численно-аналитический метод может быть использован для отыскания гомоклинических траекторий в произвольных трехмерных системах.

Авторы признательны А.С. Зильберглейту за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 93-02-2611.

Список литературы

[1] *Оптическая ориентация* / Под ред. Б.П. Захарчени, Ф. Майера. Л.: Наука, 1989. С. 137–207.
[2] *Дьяконов М.И., Меркулов И.А., Перель В.И.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 1. С. 314–324.
[3] *Дьяконов М.И., Меркулов И.А., Перель В.И.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 78. Вып. 1. С. 349–359.
[4] *Артемова Е.С., Галактионов Е.В., Зильберглейт А.С.* Препринт ФТИ. № 1264. Л., 1988. 38 с.
[5] *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.