1994 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 64, в. 11
1994 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 64, N 11

01
©1994 г.

О КРИТЕРИИ СТЕПЕНИ УПОРЯДОЧЕННОСТИ РЕЖИМОВ АВТОКОЛЕБАНИЙ. ИЛЛЮСТРАЦИЯ S-ТЕОРЕМЫ КЛИМОНТОВИЧА

В.С.Анищенко, П.И.Сапарин, Т.Г.Анищенко

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410601, Саратов, Россия
(Поступило в Редакцию 10 января 1994 г.)

Нелинейные динамические системы демонстрируют широкое разнообразие автоколебательных режимов от простых регулярных до сложных хаотических [1–3]. Возникает потребность введения количественного критерия сложности, позволяющего оценивать степень упорядоченности режима колебаний. Для систем, заданных обыкновенными дифференциальными уравнениями в R^N, таким критерием бесспорно служит энтропия Крылова–Колмогорова–Синая (K-энтропия). Ее оценкой является сумма положительных показателей Ляпунова [1–3].

Однако использование K-энтропии как меры неупорядоченности ограничено, по сути говоря, случаем задания оператора эволюции в виде конечномерной дифференциальной системы. Кроме того, как известно, K-энтропия нечувствительна к изменениям регулярных режимов колебаний и их бифуркациям. Вопрос еще более осложняется при экспериментах с распределенными системами, когда информации об операторе эволюции нет вообще.

С проблемами оценки степени упорядоченности сложных режимов колебаний, наблюдаемых в экспериментах, приходится сталкиваться все чаще, особенно при решении различного рода диагностических зарач [4,5]. В этих ситуациях качественными критериями степени сложности являются спектры мощности, топология и размерности реконструированных аттракторов и т. д. Однако до сих пор мы не располагаем бесспорным критерием степени сложности режимов колебаний в нелинейных системах по данным эксперимента.

В этой ситуации естественно желание использовать в качестве критерия сложности динамики энтропию распределения по Шеннону. Энтропия определяется вероятностной мерой, в предположении эргодичности может быть вычислена по измеренному закону распределения и могла бы служить количественным критерием степени сложности динамики системы.

Однако опыт показал, что использование энтропии неприемлемо в случае открытых систем. Закон распределения (и соответственно энтропия) открытых систем зависит не только от структуры режима колебаний, но и от энергии. Решение было найдено Климонтовичем [6–9].

Пусть имеется две достаточно длинные одномерные реализации $x(t,a_0)$ и $x(t,a_0+\Delta a)$, где t и a — время и параметр системы. Реализациям соответствуют нормированные распределения $f_0(x,a_0)$ и $f_1(x,a_0+\Delta a)$. Индексы 0 и 1 отвечают значениям параметра a_0 и $a_0+\Delta a$. Распределения определяют соответствующие энтропии Шеннона

$$S_0 = -\int f_0(x)\ln f_0(x)dx, \qquad S_1 = -\int f_1(x)\ln f_1(x)dx. \tag{1}$$

Теорема Климонтовича [6] указывает способ сравнения степени упорядоченности этих двух состояний. Предположим, что состояние 0 более неупорядоченно. Справедливость этого допущения необходимо подтвердить вычислениями. Введем эффективный гамильтониан системы $H_{\text{eff}}(x)$

$$H_{\text{eff}}(x) = -\ln f_0(x), \qquad f_0(x) = \exp[-H_{\text{eff}}(x)], \qquad \int f_0(x)dx = 1. \tag{2}$$

Проведем сравнение энтропий двух состояний при условии равенства средних энергий $\langle H_{\text{eff}}(x)\rangle$. С этой целью введем перенормированное распределение вида $\tilde{f}_0(x)$, но с другой эффективной температурой

$$\tilde{f}_0(x) = \exp\left[\frac{\Phi(T)-H_{\text{eff}}(x)}{T}\right] = C(T)\exp\left[-\frac{H_{\text{eff}}(x)}{T}\right], \tag{3}$$

где $\Phi(T)$ — эффективная свободная энергия, T — эффективная температура.

В соотношении (3) две неизвестных величины $C(T)$ и $T(\Delta a)$. Определим их так. Для нахождения $C(T)$ используем условие нормировки распределения (3)

$$\int \tilde{f}_0(x)dx = 1, \qquad [C(T)]^{-1} = \int \exp\left[-\frac{H_{\text{eff}}(x)}{T}\right]dx. \tag{4}$$

Функцию $T(\Delta a)$ найдем из условия равенства энергий состояний 0 и 1

$$\langle H_{\text{eff}}(x)\rangle = \int H_{\text{eff}}(x,a_0)\tilde{f}_0(x)dx = \int H_{\text{eff}}(x,a_0)f_1(x)dx. \tag{5}$$

Решая уравнение (5), находим эффективную температуру $T_{\text{eff}}(\Delta a)$, которая собственно и обеспечивает равенство энергий (5). Если в результате решения

$$T_{\text{eff}}(\Delta a) \geqslant 1 \tag{6}$$

(равенство достигается при $\Delta a=0$), т. е. для выполнения условия (5) систему в состоянии 0 нужно “подогреть”, то сделанное выше предположение о большей неупорядоченности состояния 0 верно. Соотношения (4) и (5) дают возможность найти явный вид перенормированного распределения $\tilde{f}_0(x)$ и, следовательно, определить разность энтропий

$$\Delta\tilde{S} = S_1 - \tilde{S}_0 = -\int f_1(x, a_0 + \Delta a) \ln \frac{f_1(x, a_0 + \Delta a)}{\tilde{f}_0(x, a_0, \Delta a)}\, dx \leqslant 0 \qquad (7)$$

при условии, что $\langle H_{\text{eff}}(x)\rangle = \text{const}$. Разность энтропий и является количественной мерой относительной степени упорядоченности при переходе от состояния 0 в состояние 1. Результаты (6), (7) решают поставленную задачу о сопоставлении относительной степени упорядоченности выделенных состояний 0 и 1 рассматриваемой открытой системы. Результат (6) оправдывает выбор состояния 0 в качестве более хаотичного, а (7) дает количественную меру относительной степени упорядоченности; если условие (6) не выполняется, то нужно изменить выбор наиболее хаотичного состояния [8,9].

Соотношения (1)–(7) задают алгоритм расчета степени относительной упорядоченности состояний системы при условии, что заданы распределения (1). Однако в качестве распределений не обязательно использовать функции распределения координат экспериментальных реализаций $x(t)$. По ряду причин более предпочтительно в качестве распределений рассматривать зависимость спектральной функции от частоты (фурье-преобразование $F(\omega)$ реализации $x(t)$). При этом в выражениях (1)–(7) нужно заменить $f_0(x)$ на $F_0(\omega)$, $f_1(x)$ на $F_1(\omega)$, $\tilde{f}_0(x)$ на $\tilde{F}_0(\omega)$ и x на ω.

Для расчета степени упорядоченности (7) с использованием распределений спектра $F(\omega)$ была разработана программа и произведено ее тестирование. В качестве тестовых систем вначале были рассмотрены отображение Фейгенбаума и модель генератора с инерционной нелинейностью [3]. Обе системы реализуют переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения. Этот классический переход порядок–беспорядок детально исследован и может служить тестовым примером.

Рассматривалось отображение вида

$$x_{n+1} = a\, x_n(1 - x_n), \qquad 3 \leqslant a \leqslant 4. \qquad (8)$$

С целью получения непрерывного распределения спектра $F(\omega)$ в систему (8) аддитивно вводился δ-коррелированный шум. Слабое шумовое воздействие решало проблему вычисления эффективного гамильтониана (2) и практически не оказывало влияния на динамику системы. Анализировались дискретные последовательности длительности $n = 3{\cdot}10^5$, спектр усреднялся по 18 периодограммам длительности $n_0 = 16384$. В качестве исходного состояния системы 0 была выбрана точка $a = 3.0$ (первая бифуркация удвоения периода). Результаты представлены на рис. 1. Из графиков видно, что степень упорядоченности режимов монотонно увеличивается с ростом параметра a вплоть до критической точки перехода к хаосу $a_{\text{cr}} \cong 3.57$. Этот результат был получен нами ранее другими методами применительно к режимам генератора с инерционной нелинейностью [10].

Далее, для значений $a > a_{\text{cr}}$ степень упорядоченности уменьшается, что обусловлено развитием динамического хаоса. Разность энтропий (7) реагирует на появления окон периодичности за критической

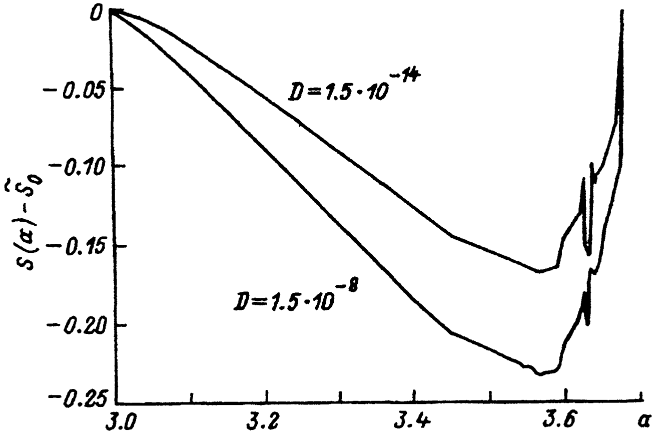

Рис. 1. Зависимость $\Delta\tilde{S}$ от параметра a для системы (8). Опорное состояние $a = 3.0$.

точкой. На рис. 1 четко видно увеличение упорядоченности в области окна, отвечающего циклу периода 6 ($a \cong 3.627$). Выход из окна устойчивости осуществляется также через каскад удвоений, в этой области график зависимости $S(a)-\tilde{S}_0$ повторяет в уменьшенном масштабе форму графика рис. 1 (ср. рис. 1 и 2). Критерий (7) отражает масштабно-инвариантные свойства динамики отображения (8).

Важным свойством критерия (7) в отличие от ляпуновского показателя является заметная чувствительность к эффекту перемежаемости. Как видно из рис. 2, вблизи точки $a \cong 3.625$ раждения цикла периода 6 имеет место резкое увеличение разности $S(a)-\tilde{S}_0$, свидетельствующее об уменьшении степени упорядоченности. Именно в этой области реализуется перемежаемость типа цикл–хаос за счет взаимодействия режима хаоса и цикла периода 6.

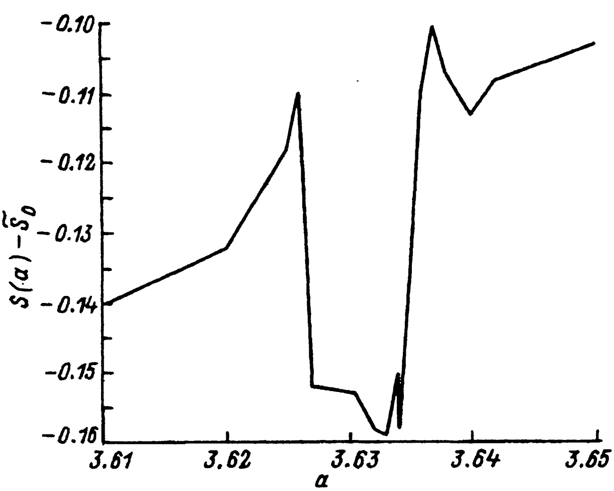

Рис. 2. Зависимость относительной степени упорядоченности $\Delta\tilde{S}$ от параметра a вблизи окна устойчивости цикла периода 6. Опорное состояние $a = 3.0$.

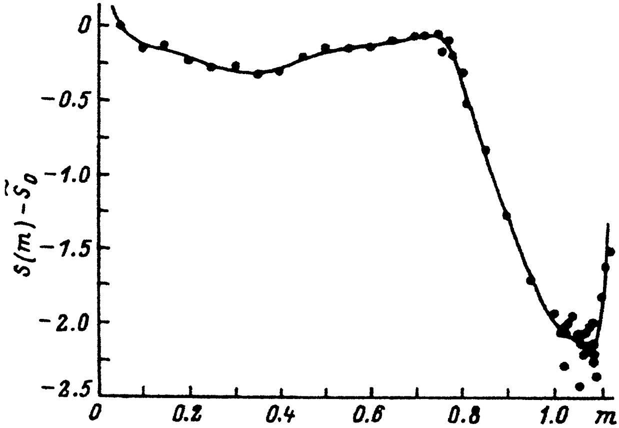

Рис. 3. Зависимость $\Delta\tilde{S}(m)$ для модели (9). Опорное состояние выбрано вблизи порога генерации $m = 0.03$.

В качестве второго примера рассматривался каскад бифуркаций удвоения периода в модели генератора [3]

$$\dot{x} = mx + y - xz, \qquad \dot{y} = -x,$$
$$\dot{z} = -g\left[z - I(x)x^2\right],$$
$$I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

в интервале изменений $0 \leqslant m \leqslant 1.12$ для $g = 0.3$. За исходное состояние принимается порог возникновения генерации $m = 0.03$. Анализ проводился в условиях действия аддитивного шума интенсивности $D = 10^{-6}$.

Результаты расчетов представлены на рис. 3. Степень упорядоченности (7) в среднем увеличивается в области $0 < m \leqslant m_{cr} = 1.085$ и далее уменьшается в области хаоса. Однако в отличие от дискретной системы (8) в дифференциальной модели (9) разность $S(m){-}\tilde{S}_0$ изменяется немонотонно, демонстрируя локальные максимумы в окрестности точек бифуркаций удвоения. Обсуждение этих деталей не входит в задачу настоящей работы. Отметим лишь то, что эти эффекты на первом этапе обусловлены особенностями в поведении интенсивностей гармоник основной частоты f_0. На рис. 3 указанный эффект отражается наличием локального максимума вблизи точки первой бифуркации удвоения $m = 0.77$. При подходе к критической точке m_{cr} существенно возрастают ошибки в расчете спектров мощности. В связи с эффектом накопления бифуркаций и ошибками в расчете спектра при подходе к критической точке на рис. 3 приведена усредненная кривая зависимости $S(m){-}\tilde{S}_0$. О наличии локальных максимумов для значений $m > 1.0$ можно судить по точкам, нанесенным на рис. 3.

Проведенные эксперименты на простых моделях показали, что критерий (7) реагирует не только на бифуркацию типа порядок-беспорядок, соответствующего моменту рождения динамического хаоса, но и позволяет количественно сравнивать степень упорядоченности как регулярных, так и хаотических рижимов при вариации параметра.

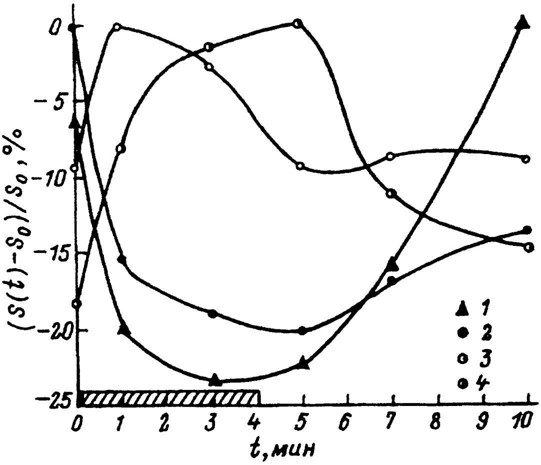

Рис. 4. Типичные зависимости относительной степени упорядоченности $\Delta\tilde{S}$ от времени в условиях шумового стресса.

1,2 — данные рассчетов $\Delta\tilde{S}$ для мужчин; *3,4* — для женщин. В качестве нормировочного коэффициента выбиралось максимальное значение энтропии $S_{max} = S_0$ для каждого испытуемого в отдельности.

Совершенно ясно, что основным преимуществом критерия (6), (7) должна быть способность анализа режимов колебаний более сложных систем по данным физического эксперимента. С этой целью проводились исследования по выявлению относительной степени упорядоченности применительно к реакции на внешнее возмущение сердечно-сосудистой системы организма человека. Определялось относительное изменение степени упорядоченности сигнала электрокардиограммы (ЭКГ) во времени у человека, находящегося в спокойном состоянии, и при действии шумового возмущения. Эксперименты состояли в следующем. Записывался сигнал ЭКГ испытуемого в исходном состоянии. Затем на человека надевались наушники и в течение 4 мин проводилось прослушивание достаточно громкого шума. Записи сигналов ЭКГ осуществлялись через 1 и 3 мин после включения шума. Далее шумовой источник выключался и снимались еще 3 кардиограммы: через 1, 3 и 6 мин после выключения шума.

Экспериментальному обследованию подвергалась группа студентов юношей и девушек с целью выявления с помощью критерия (6), (7) половых различий в реакции на слабый стресс, установленных впервые в работе [11].

Результаты представлены на рис. 4. Как видно, реакция пациентов мужского пола характеризуется резким увеличением степени упорядоченности в сравнении с исходным состоянием под действием шумового стресса. Представительницы женского пола реагируют на стресс качественно иным образом. Под действием шума у женщин резко возрастает степень относительной неупорядоченности сигнала ЭКГ. Данные, приведенные на рис. 4, полностью соответствуют результатам химико-биологических исследований половых различий в реакции на стресс, представленным в работе [12]. Однако следует отметить, что результаты рис. 4 в отличие от данных [12] получены на основе исключительно численного анализа спектров фурье-сигналов ЭКГ, что не требует оперативного вмешательства и проведения сложных химических анализов.

Данные проведенных экспериментов позволяют сделать следующие основные выводы.

1. Количественный критерий Климонтовича относительной степени упорядоченности (7), базирующийся на S-теореме, не противоречит классическим представлениям о переходе к хаосу по сценарию Фейгенбаума.

2. Критерий Климонтовича (7) в отличие от K-энтропии позволяет сравнивать степень порядка (беспорядка) не только хаотических, но и регулярных режимов функционирования открытых систем.

3. Критерий (7) является эффективной количественной характеристикой относительной степени упорядоченности режима колебаний, которая вычисляется путем компьютерной обработки спектральной функции одномерной экспериментальной реализации и не требует знания конкретного эволюционного оператора системы.

В заключение мы выражаем искреннюю благодарность Ю.Л. Климонтовичу и А.Б. Нейману за плодотворное обсуждение, ряд конструктивных замечаний и помощь в реализации программы численных экспериментов.

Список литературы

[1] *Шустер Х.Г.* Детерминированный хаос. М: Наука, 1988.
[2] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М: Мир, 1984.
[3] *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М: Наука, 1990. 311 с.
[4] *Анищенко В.С., Сапарин П.И., Сафонова М.А.* // РиЭ. 1992. Т. 37. Вып. 3. С. 467–478.
[5] *Landa P.S., Rosenblum M.G.* // Phys. D. 1991. Vol. 48. N 2. P. 232–254.
[6] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9. Вып. 23. С. 1412–1416.
[7] *Климонтович Ю.Л.* // УФН. 1989. Т. 158. № 1. С. 59–91.
[8] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 7. С. 631–634.
[9] *Климонтович Ю.Л.* Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. М: Наука, 1990.
[10] *Анищенко В.С., Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10. Вып. 14. С. 876–880.
[11] *Анищенко Т.Г.* // Успехи современной биологии. 1991. Т. 3. Вып. 3. С. 460–475.
[12] *Анищенко Т.Г.* Автореф. докт. дис. М., 1993.