

01;09

©1994 г.

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ЭКРАНА БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

*В.В.Артемов, В.Н.Плотников, С.И.Эминов*

Новгородский государственный университет,  
173003, Новгород, Россия  
(Поступило в Редакцию 16 марта 1994 г.)

Развиты аналитический аппарат для качественного анализа и численно-аналитический метод расчета интегральных уравнений дифракции электромагнитных волн на экране, когда источники первичного поля расположены вблизи экрана. Приведены результаты численных расчетов.

### Введение

В последние годы в построении теории интегральных уравнений дифракции электромагнитных волн на тонких экранах достигнут значительный прогресс. Вместе с тем класс интегральных уравнений с особыми правыми частями, как известно нам из литературы, еще не обозначен. Под особой полагаем функцию, которая локализована в небольшой области и имеет в ней резкий экстремум.

Классическим примером интегрального уравнения с особой правой частью является уравнение относительно плотности тока на идеально проводящей поверхности полосы (ленты), когда источником первичного поля является узкий лист магнитного тока ( $H$ -поляризация) или нить электрического тока, близко расположенная к полосе ( $E$ -поляризация).

Характерным математическим свойством особой функции является то, что она представляется медленно сходящимся рядом. Поэтому решение интегрального уравнения наиболее известными численными методами (метод Галеркина, метод коллокации, метод механических квадратур и др.) неэффективно и неэкономично.

В работе предлагается новый численно-аналитический метод (ЧА метод) решения интегральных уравнений с особыми правыми частями.

# 1. Одномерные интегральные и интегродифференциальные уравнения

В работе ограничимся рассмотрением двух видов уравнений

$$(Au)(\tau) + (Mu)(\tau) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 u(t) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt + \int_{-1}^1 u(t) M(\tau, t) dt = h(\tau), \quad (1)$$

$$(Lu)(\tau) + (Nu)(\tau) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u(t) \ln \frac{1}{|\tau - t|} dt + \int_{-1}^1 N(\tau, t) dt = e(\tau). \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает задачу дифракции  $H$ -поляризации на криволинейном экране [1]. Уравнение (2) возникает в задаче дифракции  $E$ -поляризации на криволинейном экране [2].

Необходимо отметить, что развиваемые ниже идеи методологически могут быть перенесены и на другие уравнения электродинамики и математической физики.

## 2. Метод Галеркина. Вывод бесконечных систем Фредгольма второго рода

Оператор является положительно-определенным, а ортонормированный базис энергетического пространства этого оператора имеет вид [3]

$$\varphi_i(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi i}} \sin [i \arccos(\tau)], \quad i = 1, 2, \dots$$

Разложим неизвестную функцию  $u(\tau)$  по базису

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(\tau) \quad (3)$$

и применим к уравнению (1) метод Галеркина. В результате получим бесконечную систему Фредгольма второго рода

$$c_i + \sum_{j=1}^{+\infty} M_{ij} c_j = h_i, \quad 1 \leq i \leq +\infty, \quad (4)$$

где

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M(\tau, t) \varphi_j(t) \varphi_i(\tau) dt d\tau,$$

$$h_i = \int_{-1}^1 h(\tau) \varphi_i(\tau) d\tau.$$

А теперь выведем систему для уравнения (2). С этой целью представим  $u(\tau)$  в виде

$$u(\tau) = \rho(\tau)f(\tau), \quad \rho(\tau) = (1 - \tau^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Функцию  $f(\tau)$  будем рассматривать как элемент весового пространства  $L_{2,\rho}[-1, 1]$ . Базис этого пространства задается в виде

$$\psi_1(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad \psi_i(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos[(i-1) \arccos(\tau)], \quad i = 2, 3, \dots$$

$$\int_{-1}^1 \psi_i(t)\psi_j(t)\rho(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

А теперь разложим неизвестную функцию  $f(\tau)$  по базису

$$f(\tau) = \sum_{i=1}^{+\infty} d_i \psi_i(\tau). \quad (6)$$

Применим к уравнению (2) метод Галеркина и учтем известное соотношение [4]

$$[L(\rho(t)\psi_i(t))](\tau) = \lambda_i \psi_i(\tau), \quad \begin{cases} \lambda_1 = \ln 2, \\ \lambda_i = \frac{1}{i-1}, & i = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (7)$$

В результате получим бесконечную систему Фредгольма второго рода

$$d_i + \sum_{j=1}^{+\infty} N_{ij} d_j = e_i, \quad 1 \leq i \leq +\infty, \quad (8)$$

где

$$N_{ij} = \frac{1}{\lambda_i} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N(\tau, t) \rho(t) \psi_j(t) \rho(\tau) \psi_i(\tau) dt d\tau,$$

$$e_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_{-1}^1 e(\tau) \rho(\tau) \psi_i(\tau) d\tau.$$

Кроме того что бесконечные системы (4) и (8) являются системами Фредгольма второго рода, они к тому же обладают рядом замечательных свойств.

### 3. Качественный анализ систем Фредгольма второго рода

Ограничимся анализом системы (4). Аналогично может быть анализирована и система (8). Для исследования системы (4) необходима информация о матричных элементах  $M_{ij}$ .

Известно [1,3], что функция  $M(\tau, t)$  имеет логарифмическую особенность при совпадении аргументов  $\tau$  и  $t$ . Поэтому асимптотическое поведение матричных элементов  $M_{ij}$  с точностью до постоянной такое же, как и матричных элементов  $M'_{ij}$ , где

$$M'_{ij} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|\tau - t|} \varphi_j(t) \varphi_i(\tau) dt d\tau.$$

Матричные элементы  $M'_{ij}$  в свою очередь найдем аналитически. При этом ограничимся случаем  $i = 2m - 1$ ,  $j = 2n - 1$ ,  $m + n > 2$ . Используя табличные интегралы [5]

$$\ln \frac{1}{|t|} = C + \int_0^1 \frac{\cos(\kappa t) - 1}{\kappa} d\kappa + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\kappa t)}{\kappa} d\kappa, \quad C = 0.5772, \quad (9)$$

$$\int_0^1 \cos(\kappa t) \varphi_{2m-1} dt = (-1)^{m-1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2m-1} \frac{J_{2m-1}(\kappa)}{\kappa}, \quad (10)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{J_{2m-1}(\kappa) J_{2n-1}(\kappa)}{\kappa^3} d\kappa = \frac{\Gamma(m+n-2)}{4\Gamma(2+m-n)\Gamma(m+n+1)\Gamma(2+n-m)} \equiv L(m, n), \quad (11)$$

найдем матричные элементы

$$M'_{ij} = (-1)^{m+n} 2\pi \sqrt{(2m-1)(2n-1)} L(m, n). \quad (12)$$

Из анализа выражений (11) и (12) сделаем два важных вывода: во-первых, матрица  $M'_{(2m-1)(2n-1)}$  является трехдиагональной  $M'_{(2m-1)(2n-1)} = 0$ ,  $|m - n| \geq 2$ ; во-вторых, элементы, лежащие на диагоналях, при больших  $n$  ведут себя как  $c_1/n^2$ , где  $c_1$  — постоянная.

### 4. Явление быстрой сходимости. Численно-аналитический метод решения бесконечных систем

Явление быстрой сходимости наблюдается во многих задачах электродинамики. Характерную задачу для этого явления представляет собой дифракция плоской волны на идеально проводящей полосе. Для определения плотности поверхностного тока методом Галеркина, например, для полуволновой полосы достаточно ограничиться

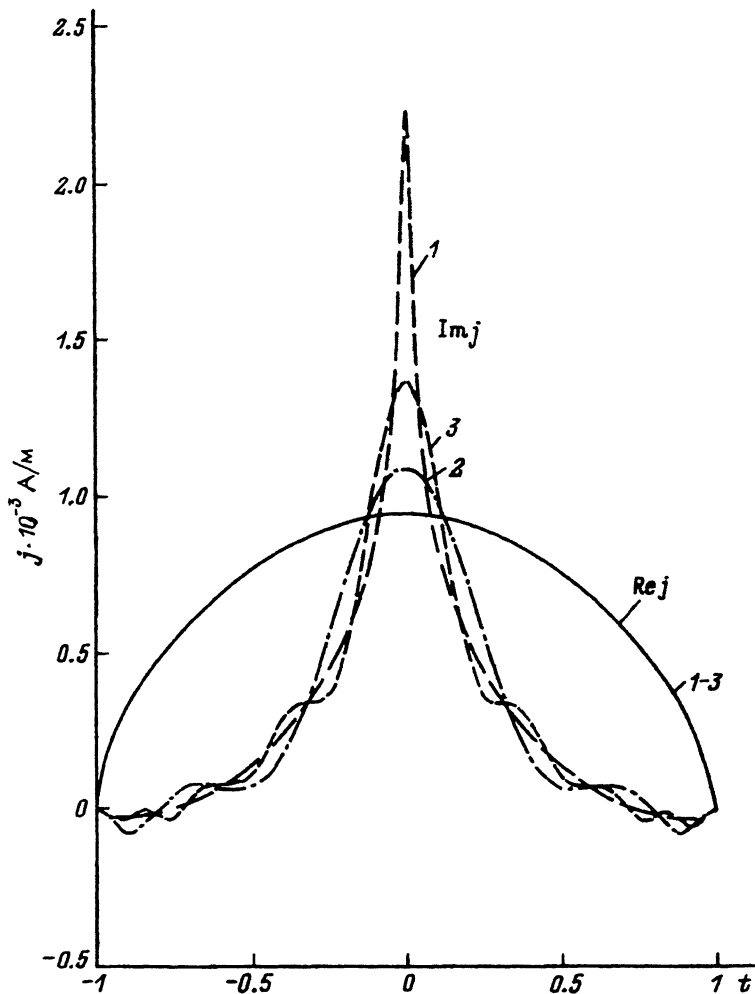


Рис. 1.

двумя-тремя членами в разложении по базису и найти плотность тока с большой точностью.

Приведенный в предыдущем разделе анализ полностью объясняет явление быстрой сходимости. Связано оно с тем, что вполне непрерывный оператор с матричными элементами  $M_{ij}$  не влияет на асимптотическое поведение решения при  $n \rightarrow +\infty$ . Причиной же медленной сходимости метода Галеркина, когда источники первичного поля расположены вблизи экрана, является поведение правых частей бесконечных систем. На основании этого положения предлагается численно-аналитический метод решения бесконечных систем. Решение системы в этом методе ищется в виде

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(\tau) + \sum_{i=N+1}^{+\infty} c_i \varphi_i(\tau), \quad (13)$$

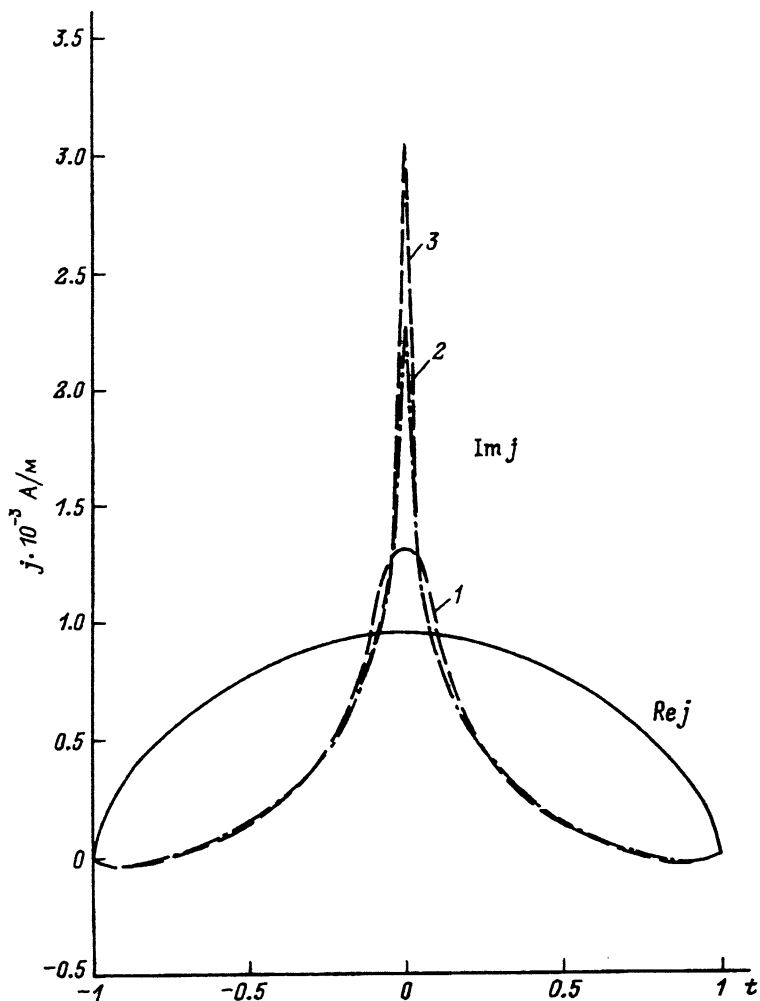


Рис. 2.

причем первые  $N$  неизвестных определяются по методу Галеркина из усеченной системы

$$c_i + \sum_{j=1}^N c_j M_{ij} = h_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (14)$$

а остальные неизвестные находятся аналитически

$$c_i = h_i, \quad N + 1 \leq i \leq +\infty. \quad (15)$$

Так как численно на ЭВМ определяются только  $N$  неизвестных, то эффективность этого метода будет определяться тем  $N$ , которое необходимо для достижения заданной точности.

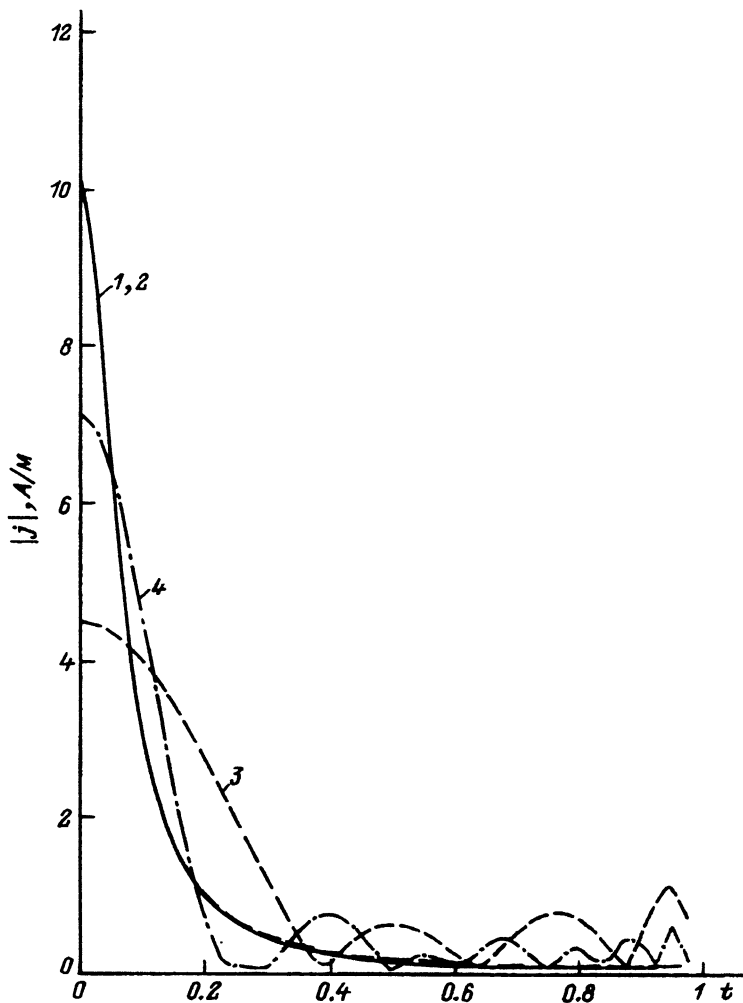


Рис. 3.

### 5. Результаты численного расчета

В качестве первого примера рассмотрим возбуждение идеально проводящей ленты узкой полоской магнитного тока ( $H$ -поляризация). Первичные поля, создаваемые полоской магнитного тока, приведены в [6]. Плотность магнитного тока зададим в виде

$$j^M(\tau) = I_0 \begin{cases} \frac{1}{2b}, & |\tau| \leq b, \\ 0, & |\tau| > b, \end{cases}$$

где  $2b$  — ширина полоски.

Будем полагать амплитуду тока  $I_0$  единичной.

Численный расчет на ЭВМ показал эффективность нового численно-аналитического метода. Для достижения графической точности достаточно положить  $N = 3, 4$  при возбуждении ленты шириной  $2a = 0.5\lambda$

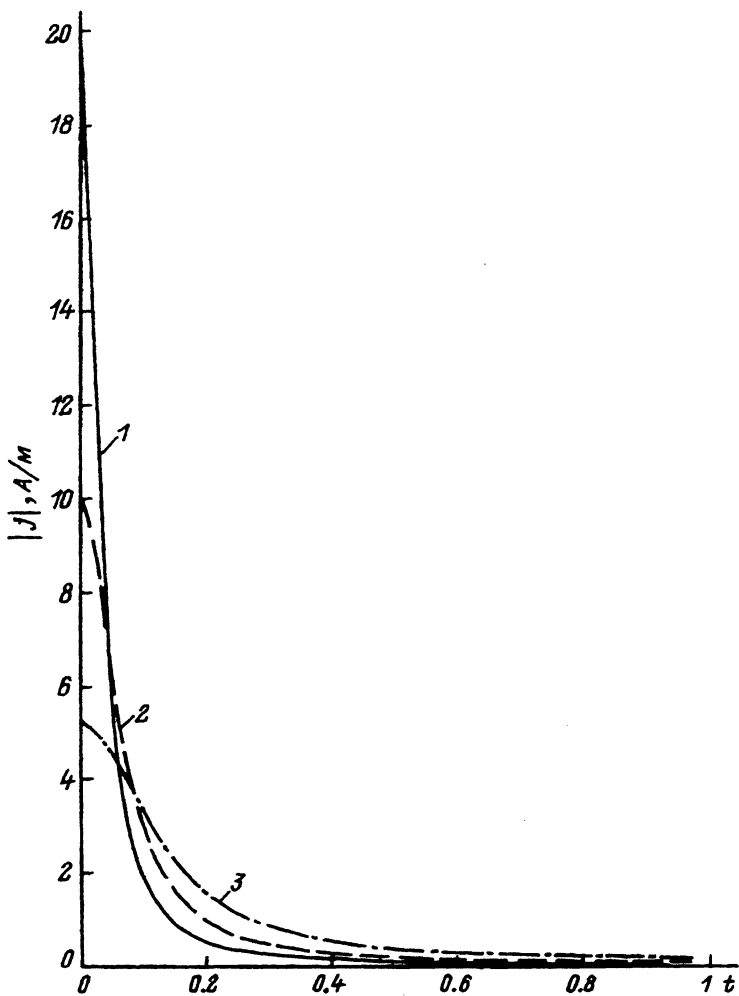


Рис. 4.

( $\lambda$  — длина волны в свободном пространстве) независимо от ширины полоски.

Сравним результаты численного расчета, полученные обычным методом Галеркина с использованием  $K$  базисных функций и ЧА методом для ширины полоски  $b = 0.01a$  (рис. 1: кривая 1 получена ЧА методом, кривые 2 и 3 — с помощью метода Галеркина для  $K = 5$  и  $K = 10$  соответственно). Из рисунка видно, что активные составляющие плотности тока совпадают для всех случаев. Реактивные же составляющие имеют различия. Видно, что для достижения графической точности при расчете методом Галеркина необходимо увеличивать число базисных функций, что приводит к существенному увеличению затрат машинного времени. Следует отметить, что при очень маленьких значениях параметра  $b$  обычный метод Галеркина не позволяет получить верные результаты.



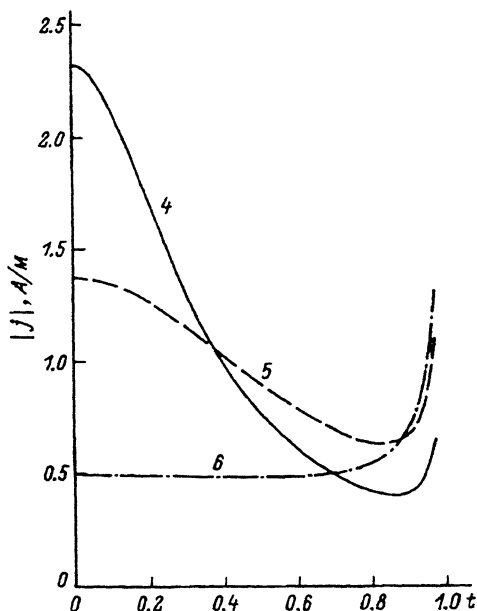


Рис. 5.

На рис. 2 показаны результаты численного расчета плотности тока в зависимости от ширины полоски. Активная составляющая не меняется при изменении ширины в пределах  $0.001a \leq b \leq 0.1a$ . Реактивная часть по мере сужения полоски вблизи  $\tau = 0$  возрастает. В пределе  $b \rightarrow 0$  (возбуждение нитью магнитного тока) реактивная часть стремится к бесконечности, что также следует из качественного анализа систем (раздел 3). На рис. 2 кривая 1 соответствует  $b = 0.1a$ , 2 —  $b = 0.01a$ , 3 —  $b = 0.001a$ .

Эффективность ЧА метода также покажем на примере возбуждения идеально проводящей полосы нитью электрического тока, расположенной вблизи полоски на расстоянии  $d$  ( $E$ -поляризация). На рис. 3 представлено сравнение результатов численного расчета модуля плотности тока, полученных обычным методом Галеркина с использованием  $K$  базисных функций и ЧА методом для расстояния  $d = 0.1a$ : кривые 1, 2 получены с помощью ЧА метода для  $K = 3, 5$  соответственно; кривые 3 и 4 — с помощью метода Галеркина для  $K = 5$  и 10. Наблюдается хорошая графическая сходимость для модуля плотности тока, рассчитанного ЧА методом при разных значениях  $K$ . Для достижения полученной точности с помощью метода Галеркина потребуется значительно большее количество базисных функций, что приведет к возрастанию затрат машинного времени.

На рис. 4 и 5 показаны результаты численных расчетов модуля плотности тока в зависимости от расстояния возбуждающей нити электрического тока до полоски  $d$ . Нить расположена над серединой полоски. Из рисунков видно, что по мере приближения нити к полоске модуль плотности тока приобретает все более ярко выраженный максимум в центре полоски. При  $d = 0.05a$  (кривая 1) ток практически весь протекает в середине полоски. По мере же удаления нити от полоски максимум в центре полоски начинает спадать (кривая 2 —  $d = 0.1a$ ,

3 —  $d = 0.2a$ , 4 —  $d = a/2$ , 5 —  $d = a$ ) и при  $d = 5a$  (кривая 6) полностью исчезает. Характер распределения модуля плотности тока вдоль полосы при возбуждении ее нитью, когда  $d \geq 5a$ , такой же, как и при возбуждении полосы плоской волной.

#### Список литературы

- [1] Эминов С.И. // Письма в ЖТФ. 1993. Т. 19. Вып. 10. С. 41–43.
  - [2] Панасюк В.В., Саерук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев: Наукова думка, 1984. 344 с.
  - [3] Эминов С.И. // РиЭ. 1993. Т. 38. № 12. С. 2160–2168.
  - [4] Воронич И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
  - [5] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.Н. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 752 с.
  - [6] Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 295 с.
-