

01;09;10;12

©1994 г.

ВОЛНОВОДНЫЙ СЕПАРАТОР ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ*Ю.Г.Павленко, Ю.А.Афиногенов, С.И.Зеленский*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Специализированный учебно-научный центр,
121357, Москва, Россия
(Поступило в Редакцию 27 декабря 1993 г.)

Рассмотрено движение релятивистских и нерелятивистских частиц в квадрупольном конденсаторе конечной длины, который можно возбудить как открытый резонатор или волновод. Показано, что через резонатор могут пройти частицы с ограниченным энергетическим спектром, ширина которого зависит от параметров системы. При прохождении нерелятивистского пучка через два квадрупольных волновода с противоположно направленными бегущими волнами формируется пучок в ограниченной области продольных скоростей частиц.

Введение

Электроны и ионы, локализованные в электромагнитных ловушках, представляют уникальный объект для постановки широкого круга экспериментов в области прикладной и фундаментальной физики [1,2]. В частности, эксперименты со статической ловушкой Пеннинга позволили наблюдать индуцированное излучение электронов [3,4] и провести сверхточное измерение g -фактора электрона [5,6]. Захват ионов возможен и в радиочастотных ловушках, использующих переменные поля, порождаемые квадратичными потенциалами [7-9]. Особый интерес представляет двумерное переменное поле квадрупольного конденсатора, создаваемое гиперболическими электродами. Такая конфигурация позволила реализовать радиочастотный масс-спектрометр высокого разрешения [10,11].

Настоящая работа посвящена исследованию движения частиц в квадрупольном конденсаторе конечной длины, учитывающему волновой характер электромагнитного переменного поля. Рассматриваемую систему можно возбудить как открытый резонатор или волновод. Учет в уравнениях движения неоднородного переменного магнитного поля приводит к предсказанию новых эффектов. Показано, что в релятивистском случае резонатор может быть использован для разделения частиц пучка по энергиям. Другой эффект возникает при прохождении пучка через два квадрупольных волновода с противоположно направленными бегущими волнами. В этом случае система представляет собой сепаратор частиц по продольным скоростям.

Электромагнитное поле

Рассмотрим движение частицы в полях, представляющих суперпозицию электростатического и электромагнитного полей. Напряженность электрического поля $\mathbf{E}_0 = (-x, y, 0)V_0/R^2$ с потенциалом $\varphi = (x^2 - y^2)V_0/2R^2$ создается четырьмя гиперболическими электродами, расположенными симметрично относительно оси z . Область пространства, ограниченная гиперболическими поверхностями, заключенными между плоскостями $z = 0$ и $z = L$, представляет собой волновод или открытый резонатор. В этом случае в системе можно возбудить основную поперечно-электромагнитную волну с критической частотой, равной нулю [12]. Основная волна распространяется в волноводе со скоростью света при любой частоте ω источника возбуждения поля. Уникальной особенностью этой системы является тождественность конфигураций электростатического поля и электрического поля основной волны.

Решение уравнений Максвелла для холодного волновода можно представить в терминах 4-потенциала $A^\mu = (A_0, \mathbf{A})$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla A_0, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}. \quad (1)$$

Основная волна определяется соотношениями

$$A_0 = \frac{\partial G}{\partial z}, \quad \mathbf{A} = (0, 0, -\frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial t}), \quad (2)$$

где $G(t, \mathbf{x})$ — потенциал Герца [13].

Функция G представляет собой решение скалярного волнового уравнения. Решение, удовлетворяющее граничным условиям на металлической поверхности электродов, имеет вид

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{V}{2R^2} (x^2 - y^2) f(t, z), \quad 0 \leq z \leq L. \quad (3)$$

Рассмотрим две реализации этой системы.

а) Открытый резонатор: $f(t, z) = (1/k) \sin kz \cos \omega t$, $k = \omega/c$. Из (1)–(3) найдем напряженности полей

$$\mathbf{E} = (-x, y, 0) \frac{V}{R^2} \cos kz \cos \omega t,$$

$$\mathbf{B} = (-y, -x, 0) \frac{V}{R^2} \sin kz \sin \omega t. \quad (4)$$

Постоянная V связана со средним значением энергии электромагнитного поля резонатора P_0 соотношением

$$P_0 = \frac{1}{8\pi} \left\langle \int d^3x (E^2 + B^2) \right\rangle = \frac{V^2}{16\pi R^4} \int dS (x^2 + y^2).$$

б) Волновод. Если возбудить систему как волновод, то $f^{(1,2)}(t, z) = \mp(1/k) \sin(\omega t \mp kz)$. Напряженности полей

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1,2)} &= (-x, y, 0) \frac{V}{R^2} \cos \Psi^{(1,2)}, \\ \mathbf{B}^{(1,2)} &= \mp(y, x, 0) \frac{V}{R^2} \cos \Psi^{(1,2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Psi^{(1,2)} = \omega t \mp kz$.

В этом случае величина V связана со средним значением интенсивности потока излучения I через поперечное сечение волновода

$$I = \frac{c}{4\pi} \left\langle \int dS [\mathbf{E}\mathbf{B}]_z \right\rangle = \frac{cV^2}{8\pi R^4} \int dS (x^2 + y^2).$$

Уравнения движения

В релятивистской механике удобно задавать кривую, по которой движется частица в параметрической форме $t = t(\tau)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$, где τ — параметр, представляющий собой собственное время. 4-скорость частицы $\dot{x}^\mu = (\dot{t}, \dot{\mathbf{x}})$ удовлетворяет условию $c^2 \dot{t}^2 - \dot{\mathbf{x}}^2 = c^2$ [14,15]. Здесь и далее точкой обозначено дифференцирование по собственному времени τ . Трехмерная скорость

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{t}},$$

релятивистская энергия частицы $\epsilon = mc^2 \dot{t}$,

$$\dot{t} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Кинетическая энергия $T = \epsilon - mc^2$.

В трехмерной форме уравнения движения имеют вид [15]

$$mc^2 \ddot{t} = e\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}, \quad m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E}\dot{t} + \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{x}}\mathbf{B}]. \quad (6)$$

Учитывая (1), (2), запишем первое уравнение в форме закона изменения полной энергии

$$\frac{d}{d\tau} (\epsilon + e\varphi + eA_0) = \frac{eV}{2R^2} (x^2 - y^2) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z} + \frac{\dot{z}}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right]. \quad (7)$$

Начальные условия имеют вид $t(0) = 0$, $\mathbf{x}(0) = 0$, $\dot{t}(0) = \gamma$, $\mathbf{v}(0) = (v_1, v_2, u)$, $u > 0$.

Движение пучка частиц через открытый резонатор

Подставляя E, V из (4) в (6), получим систему

$$m\ddot{x} + \left[\frac{\epsilon V_0}{R^2} \dot{t} + \frac{\epsilon V}{R^2} \left(\dot{t} \cos kz \cos \omega t - \frac{\dot{z}}{c} \sin kz \sin \omega t \right) \right] x = 0, \quad (8)$$

$$m\ddot{y} - \left[\frac{\epsilon V_0}{R^2} \dot{t} + \frac{\epsilon V}{R^2} \left(\dot{t} \cos kz \cos \omega t - \frac{\dot{z}}{c} \sin kz \sin \omega t \right) \right] y = 0, \quad (9)$$

$$m\ddot{z} + \frac{eV}{cR^2} (x\dot{x} - y\dot{y}) \sin kz \sin \omega t = 0, \quad (10)$$

$$\frac{d}{d\tau} (mc^2 \dot{t} + e\varphi) + \frac{eV}{R^2} (x\dot{x} - y\dot{y}) \cos kz \cos \omega t = 0. \quad (11)$$

Предположим, что $|v_1|, |v_2| \ll u$, $eV_0 \ll mc^2\gamma$, $eV \ll mc^2\gamma$. Тогда из (10), (11) находим $\dot{t} \simeq \gamma$, $\dot{z} \simeq \gamma u$.

Далее рассмотрим два предельных случая.

а) Нерелятивистский пучок. В этом случае

$$\epsilon \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2},$$

в уравнениях (8), (9) следует произвести замену $\dot{x} \rightarrow dx/dt$, $\dot{t} = 1$, $\gamma = 1$. Если $\omega L \ll c$, $\omega L \gg u$, то уравнения (8) и (9) описывают масс-спектрограф или фильтр масс, изобретенный в 1953 г. [10].

б) Ультрарелятивистский пучок. Пусть

$$1 - \frac{u}{c} \ll 1, \quad 1 \ll kL \ll \gamma^2, \quad \gamma \sim \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} \gg 1,$$

тогда $\epsilon \simeq mc^2\gamma \gg mc^2$,

$$\begin{aligned} \dot{t} \cos kz \cos \omega t - \frac{\dot{z}}{c} \sin kz \sin \omega t &= \frac{1}{2} \left(\dot{t} - \frac{\dot{z}}{c} \right) \cos(\omega t - kz) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\dot{t} + \frac{\dot{z}}{c} \right) \cos(\omega t + kz) \simeq \gamma \cos 2\omega\gamma\tau. \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $1 - (u/c) \simeq 1/(2\gamma^2)$. В безразмерных переменных

$$s = \omega\gamma\tau, \quad a = \frac{eV_0}{\epsilon R^2 k^2}, \quad b = \frac{eV}{2\epsilon R^2 k^2} \quad (12)$$

уравнения (8) и (9) приобретают вид

$$\frac{d^2 x}{ds^2} + (a + 2b \cos 2s)x = 0, \quad (13)$$

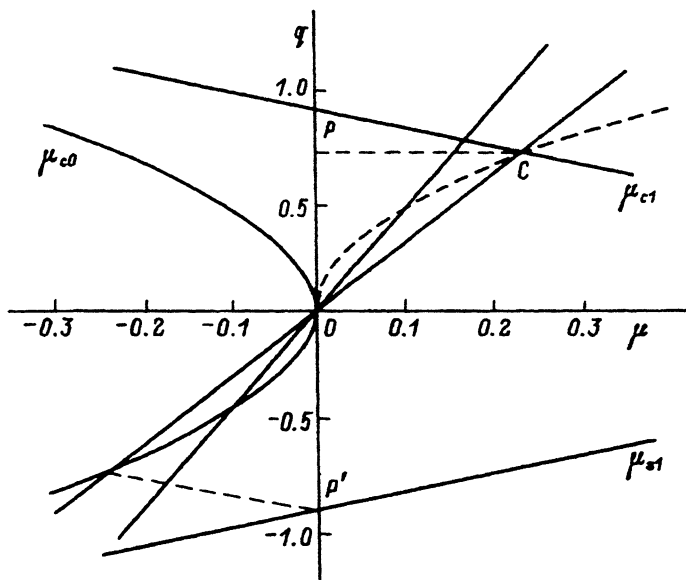


Рис. 1.

$$\frac{d^2 y}{ds^2} - (a + 2b \cos 2s)y = 0. \quad (14)$$

Эти уравнения относятся к типу уравнения Матье, которое обычно записывают в стандартной форме $u'' + (\mu + 2q \cos 2s)u = 0$ [16].

Известно, что уравнение Матье имеет два класса решений: устойчивые и неустойчивые. Для нашей задачи представляет интерес только та область устойчивости в (μ, q) -плоскости, где $|\mu| < 1$, $|q| < 1$. На рис. 1 область устойчивости лежит между кривыми $\mu_{c1}(q)$, $\mu_{s1}(q)$, $\mu_{c0}(q)$

$$\mu_{c0}(q) = -\frac{q^2}{2} + \frac{7q^4}{128} + \dots, \quad \mu_{c1}(q) = \mu_c \frac{q_m - q}{q_m - q_c} + \dots,$$

$q_m = 0.92$, $q_c = 0.706$, $\mu_c = 0.237$ [16,17].

Штриховая OC представляет собой отображение нижней части кривой μ_{c0} . Если точка $\mu = a$, $q = b$ лежит в области, ограниченной криволинейным треугольником $OC\rho$, то движение устойчиво по координатам x и y . Используя метод усреднения [18], получим решение уравнений (13), (14)

$$x(t) = \frac{2v_1}{(2+b)\omega_1} \sin \omega_1 t \left(1 + \frac{b}{2} \cos 2\omega t\right) + \dots, \quad (15)$$

$$y(t) = \frac{2v_2}{(2-b)\omega_2} \sin \omega_2 t \left(1 - \frac{b}{2} \cos 2\omega t\right) + \dots \quad (16)$$

Здесь $\omega_{1,2} = \omega \sqrt{\pm a - \mu_{c0}(b)}$.

Для фиксированных величин R , V_0 , V и ω всем частицам с одинаковым значением ϵ соответствует одна и та же рабочая точка на диаграмме устойчивости. Поскольку отношение a/b равно

$$\frac{2V_0}{V} \equiv n,$$

то все частицы с разными энергиями лежат на прямой $a = nb$. Если постоянное напряжение $V_0 = 0$, то имеется область устойчивости в интервале $0 < b < q_m$. В этом случае система пропускает все частицы с энергиями в области $\epsilon_{\min} < \epsilon < \infty$, $\epsilon_{\min} = eV/2R^2k^2q_m$. В СИ имеем $\epsilon_{\min} = 10^{15} eV/R^2\nu^2$ эВ, $\nu = \omega/2\pi$. С увеличением напряжения V_0 интервал разрешимых энергий сужается. Границы этого интервала определяются неравенствами $b_L(n) < b < b_R(n)$, где

$$b_L(n) \simeq 2n + \frac{7n^3}{8}, \quad b_R(n) \simeq q_c \left[\left(1 - \frac{q_c}{q_m} \right) \frac{n}{n_c} + \frac{q_c}{q_m} \right]^{-1} \quad (17)$$

представляют собой корни уравнений $nb = -\mu_{c0}(b)$ и $nb = \mu_{c1}(b)$. При $n < n_c = \mu_c/q_c = 0.335$ получим искомое условие в виде $\epsilon_L < \epsilon < \epsilon_R$, $\epsilon_{L,R} = eV/2R^2k^2b_{R,L}$.

При фиксированном n сканирование по энергиям осуществляется в результате изменения частоты переменного поля. Если $n = n_c$, то рабочая кривая проходит через граничную точку (μ_c, q_c) области устойчивости. В этом случае допустимый интервал энергий приближается к $\Delta\epsilon = 0$, $\epsilon_L = \epsilon_R = eV/2R^2k^2q_c$. К сожалению, условия применимости полученных результатов

$$\frac{\omega L}{c} \gg 1, \quad \gamma \sim \frac{eV}{2mR^2\omega^2} \gg 1$$

налагают ограничения на возможность создания линейного сепаратора частиц по энергиям умеренных размеров. С другой стороны, использование резонатора в циклических ускорителях и накопительных кольцах может привести к стабилизации пучка и селекции частиц по энергиям.

Движение пучка частиц в квадрупольном волноводе

Рассмотрим движение частиц в волноводе, в котором возбуждена основная волна. Подставляя напряженности полей из (5) в (6), получим систему

$$m\ddot{x} + \left[\frac{eV_0}{R^2} \dot{t} + \frac{eV}{R^2} \left(\dot{t} \mp \frac{\dot{z}}{c} \right) \cos(\omega t \mp kz) \right] x = 0, \quad (18)$$

$$m\ddot{y} - \left[\frac{eV_0}{R^2} \dot{t} + \frac{eV}{R^2} \left(\dot{t} \mp \frac{\dot{z}}{c} \right) \cos(\omega t \mp kz) \right] y = 0,$$

$$m\ddot{z} \pm \frac{eV}{cR^2} (x\dot{x} - y\dot{y}) \cos(\omega t \mp kz) = 0,$$

$$\frac{d}{d\tau}(mc^2\dot{t} + e\varphi) + \frac{\epsilon V}{R^2}(x\dot{x} - y\dot{y}) \cos(\omega t \mp kz) = 0. \quad (19)$$

Верхние знаки соответствуют волне, распространяющейся в положительном направлении оси z , нижние — в отрицательном направлении оси z . Эти системы имеют первый интеграл

$$mc^2\dot{t} + e\varphi \mp mc\dot{z} = mc^2 \left(1 \mp \frac{u}{c}\right).$$

Предположим, что выполнены условия $|v_1|, |v_2| \ll u, \epsilon V_0, \epsilon V \ll mc^2\gamma$, найдем $\dot{t} \simeq \gamma, \dot{z} \simeq \gamma u$. Далее рассмотрим нерелятивистский случай, полагая

$$\epsilon = mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad \gamma = 1.$$

а) Волна, распространяющаяся параллельно оси z . В безразмерных переменных

$$s = \omega g t / 2, \quad a = \frac{4eV}{mR^2\omega^2 g^2}, \quad b = \frac{2eV}{mR^2\omega^2 g}, \quad (20)$$

$g = 1 - (u/c)$ уравнения (18), (19) совпадают с (13), (14). Все частицы с продольной скоростью u лежат на прямой $a = nb/g, n = 2V_0/V$. При $n = n_c$ волновод запирает пучок. Если $n = n_2 < n_c$, то неравенства

$$b_L \left(\frac{n}{g}\right) < \frac{q_c \omega_c^2}{g \omega^2} < b_R \left(\frac{n}{g}\right), \quad \omega_c^2 = \frac{2eV}{mR^2 q_c} \quad (21)$$

определяют в (u, ω) -плоскости область частот и продольных скоростей частиц, которые могут пройти через волновод. Полагая $\omega = \omega_c + \Delta\omega, n_2 = n_c - \delta n - 2$, получим из (21) искомые условия

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{q_c}{q_m}\right) \frac{u}{c} &< \frac{2\Delta\omega}{\omega_c} + \left(1 - \frac{q_c}{q_m}\right) \frac{\delta n_2}{n_c}, \\ \frac{u}{c} &< \left[\frac{\delta n_2}{n_c} \left(1 + \frac{7n_c^3}{4q_c}\right) - 2\frac{\Delta\omega}{\omega_c}\right] \frac{4q_c}{7n_c^3}. \end{aligned} \quad (22)$$

Следовательно, при изменении частоты в интервале

$$-\omega_c \left(1 - \frac{q_c}{q_m}\right) \frac{\delta n_2}{2n_c} < \Delta\omega < \omega_c \left(1 + \frac{7n_c^3}{4q_c}\right) \frac{\delta n_2}{2n_c} \quad (23)$$

через волновод пройдут частицы с продольной скоростью, удовлетворяющей условию $0 < u < u_2, u_2 = c\delta n_2/n_c$. На рис. 2,3 множество точек, ограниченное треугольником ASB , представляет собой решение неравенств (22) при $u_2 = \beta_0 c$.

Решение уравнений (18), (19) имеет вид

$$x(t) = \frac{4v_1}{(2+b)g\omega_1} \sin g\omega_1 t / 2 \left(1 + \frac{b}{2} \cos g\omega t\right) + \dots,$$

$$y(t) = \frac{4v_2}{(2-b)g\omega_2} \sin g\omega_2 t/2 \left(1 - \frac{b}{2} \cos g\omega t\right) + \dots$$

б) Волна, распространяющаяся навстречу пучку. В этом случае воспользуемся безразмерными переменными (20), в которых следует произвести замену $g \rightarrow \bar{g} = 1 + (u/c)$. При $n = n_c$ волновод пропускает все частицы пучка. Если $n = n_1 > n_c$, то после замены в (21) $n_2 \rightarrow -n_1$, $g \rightarrow \bar{g}$ получим условия прохождения частиц через волновод. Неравенства, соответствующие (22), принимают вид

$$\left(2 - \frac{q_c}{q_m}\right) \frac{u}{c} < -2 \frac{\Delta\omega}{\omega_c} + \left(1 - \frac{q_c}{q_m}\right) \frac{\delta n_1}{n_c},$$

$$\frac{u}{c} > \left[\frac{\delta n_1}{n_c} \left(1 + \frac{7n_c^3}{4q_c}\right) + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_c} \right] \frac{4q_c}{7n_c^3}, \quad (24)$$

где $\delta n_1 = n_1 - n_c$.

Следовательно, через волновод пройдут частицы со скоростями $u > u_1$, $u_1 = c\delta n_1/n_c$. На рис. 2 множество точек, лежащих выше прямых KM и NM , представляют собой решение неравенств (24) при $u_1 = \beta_0 c/2$. На рис. 3 аналогичная область при $u_1 = 0$ лежит выше прямых KO и OS .

в) Пролет пучка через два квадраупольных волновода. Пучок, прошедший через волновод, рассмотренный в пункте а, содержит частицы с продольными скоростями в интервале $0 < u < u_R(\omega)$, $u_R(\omega) < u_2$. Если во втором волноводе, рассмотренном в пункте б, выбрать $n = n_1$,

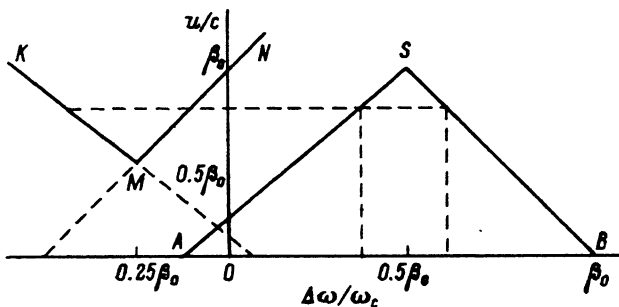


Рис. 2.

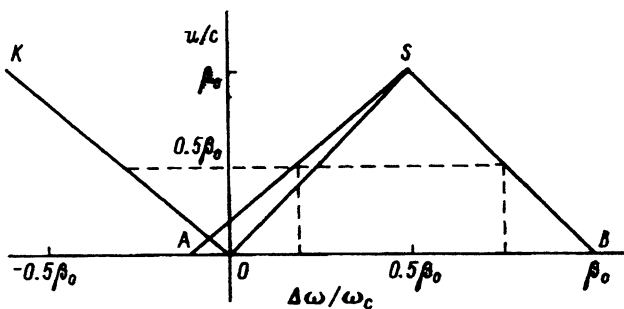


Рис. 3.

так что $u_1 < u_2$, то на выходе можно сформировать пучок, в котором в зависимости от частоты продольные скорости частиц ограничены интервалом, лежащим внутри области $u_1 < u < u_2$. При фиксированной частоте мы имеем волноводный сепаратор частиц по продольным скоростям. На рис. 2, 3 представлены диаграммы пропускания квадратурного волновода. Анализируя эти диаграммы, приходим к выводу, что два последовательно расположенных волновода можно использовать для построения функции распределения частиц пучка по продольным скоростям. Особый интерес представляет область, ограниченная на рис. 3 прямыми $K0$, $0S$ и AS . Здесь возможен режим работы, для которого частоты возбуждения волноводов имеют одно и то же значение.

Список литературы

- [1] *Тошек П.Э.* // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 451–497.
- [2] *Драбович К.Н.* // УФН. 1989. Т. 158. № 3. С. 499–510.
- [3] *Павленко Ю.Г.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. Вып. 5. С. 1286–1292.
- [4] *Graff G., Kleempt E., Werth G.* // Zs. Phys. 1969. Bd 222. S. 201.
- [5] *Van Dyck R.S., Schwinberg P.B., Dehmelt H.G.* // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. P. 310.
- [6] *Соколов А.А., Павленко Ю.Г.* // Ядерная физика. 1977. Т. 26. № 5. С. 1058–1063.
- [7] *Paul W., Osberghaus O., Fischer E.* // Forschungsber. Wirtschaft. und Verkehrsministeriums NRW. 1958. N 415.
- [8] *Dehmelt H.G.* // At. and Mol. Phys. 1967. Vol. 3. P. 53.
- [9] *Schuessler H.A., Fortson E.N., Dehmelt H.G.* // Phys. Rev. 1969. Vol. 187. P. 5.
- [10] *Paul W., Steinwedel H.* // Zs. Naturforschung, 1953. Bd 8a. S. 448.
- [11] *Пауль В.* // УФН. 1990. Т. 160. № 12. С. 109–127.
- [12] *Гольдштейн Л.Д., Зернов Н.В.* Электромагнитные поля и волны. М.: Сов. радио, 1956. 517 с.
- [13] *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1967. 87 с.
- [14] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 502 с.
- [15] *Павленко Ю.Г.* Гамильтоновы методы в электродинамике и квантовой механике. М.: 1985. 239 с.
- [16] *Уиттекер Э.Г., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. М., 1963. 257 с.
- [17] *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 102 с.
- [18] *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. М., 1991. 275 с.