01;05;08

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НЕКОЛЛИНЕАРНЫХ СИНХРОННЫХ УПРУГИХ ТРИПЛЕТОВ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

Е.К.Гусева

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, 197376
(Поступило в Редакцию 15 декабря 1993 г.)

Комбинационные сигналы, возникающие при нелинейном рассеянии звука на звуке, несут информацию о пространственной структуре полей внутренних напряжений и деформаций в твердом теле. Амплитуда комбинационного сигнала является функцией упругих постоянных второго и третьего порядков, причем последние в существенно более высокой степени чувствительны к надмолекулярной структуре твердого тела, чем линейные модули. В связи с этим представляет интерес исследование эффективности параметрических взаимодействий неколлинеарных синхронных упругих триплетов в твердом теле. Ранее [1] нами рассматривалось взаимодействие квазипоперечных волн в плоскости симметрии упругих свойств YZ кварца. Этот случай характерен тем, что здесь реализуются отличные от нуля константы упругости третьего порядка, а возникающие волны и соответствующие лучи комбинационных сигналов остаются в той же плоскости YZ. Наряду с требованием выполнения условий фазового синхронизма здесь необходим также надлежащий выбор направлений распространения комбинационных сигналов в секторе с хорошо выраженной анизотропией групповой и фазовой скоростей при однозначной зависимости между направлениями лучей и волновых нормалей. Этим требованиям удовлетворяет, например, взаимодействие квазипоперечных волн, распространяющихся в плоскости YZ кварца в направлениях 107.5 и 110° с осью Z. В настоящей работе проделан количественный анализ эффективности взаимодействий в неколлинеарных триплетах на основе уравнения движения с квадратичной нелинейностью при гетеродинном преобразовании

$$\rho\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

где

$$\sigma_{rs}=\left(\frac{\partial U}{\partial u_{\alpha\beta}}\right)\left[\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial x_s}\right)}\right]=\Bigg[C_{ijkl}\Big(u_{ij}\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta}+u_{kl}\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\Big)+$$

$$+\frac{1}{6}C_{ijklmn}\Big(u_{ij}u_{kl}\delta_{m\alpha}\delta_{n\beta}+u_{ij}u_{mn}\delta_{k\alpha}\delta_{l\beta}+u_{kl}u_{mn}\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta}\Big)\Bigg]\frac{\partial u_{\alpha\beta}}{\partial\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial x_s}\right)}.$$

Уравнение для внутренней энергии твердого тела используется с точностью до констант упругости третьего порядка

$$U = \frac{1}{2}C_{ijkl}u_{ij}u_{kl} + \frac{1}{6}C_{ijklmn}u_{ij}u_{kl}u_{mn}.$$

Решение первого приближения уравнения (1) представляется в виде суперпозиции двух взаимодействующих волн с круговыми частотами ω_1 и ω_2, амплитудами смещений $\xi_1 = \xi_2 = \xi_0$, направляющими косинусами волновых нормалей и векторов поляризации смещений $\mathbf{l}^{(1)}$, $\mathbf{l}^{(2)}$ и $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ соответственно

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \boldsymbol{\xi}_1 \exp j(\omega_1 t - \mathbf{k}^{(1)}\mathbf{r}) + \boldsymbol{\xi}_2 \exp j(\omega_2 t - \mathbf{k}^{(2)}\mathbf{r}) + \text{к.с.}$$

Решение второго приближения $\xi^{(\prime\prime)}$ описывает волну разностной частоты Ω и находится из уравнения движения с правой частью, квадратичной по смещениям взаимодействующих волн,

$$\rho\frac{\partial^2 \xi_i^{(\prime\prime)}}{\partial t^2} - C_{ijkl}\frac{\partial^2 \xi_k^{(\prime\prime)}}{\partial x_j \partial x_l} =$$

$$= j\xi_0^2\omega_1\omega_2\gamma\Gamma_i\Big(C_{ijkl}, c_{ijklmn}, \mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{l}^{(2)}, \mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}\Big)\exp j\Big(\Omega t - \mathbf{k}_\Omega \mathbf{r}\Big),$$

$$\gamma = \omega_2/\omega_1, \qquad \Omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Здесь Γ_1 — нелинейный параметр, является функцией анизотропии кристалла и поляризационных эффектов взаимодействующих волн.

Направление генерации бегущей волны определяется условием синхронизма, при котором комбинационная волна синфазно "подкачивается" взаимодействующими волнами и излучается из области взаимодействующих под углом φ звуковых пучков

$$k_\Omega^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2\cos\varphi, \qquad F = f_2 - f_1,$$

$$F = f_2\frac{-\frac{1}{C_1^2} + \frac{\cos\varphi}{C_1C_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{\cos\varphi}{C_1C_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{C_\Omega^2} - \frac{1}{C_1^2}\right)\left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} - \frac{2\cos\varphi}{C_1C_2}\right)}}{\frac{1}{C_\Omega^2} - \frac{1}{C_1^2}}.$$

При этом ограничения по скорости для волны комбинационной частоты получается в форме

$$C_\Omega \leqslant \frac{C_1^2 + C_2^2 - 2C_1C_2\cos\varphi}{1 - \cos^2\varphi}.$$

Это условие реализуется для рассеянных комбинационных квазипоперечных волн в секторе $114\ldots144^\circ$ с осью Z, где имеется хорошо выраженная анизотропия групповой и фазовой скоростей, при взаимодействующих квазипоперечных накачек со скоростями $C_1 = 4816.5$ м/с, $C_2 = 4766.3$ м/с и соответствующими направлениями волновых векторов 107.5 и 110° относительно оси Z, $\varphi = 2.5°$. Поляризация векторов смещения взаимодействующих волн соответственно $p_2^{(1)} = 0.2898$,

$p_3^{(1)} = 0.9571$, $p_2^{(2)} = 0.484$, $p_3^{(2)} = 0.875$. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное соотношение по оценке эффективности параметрического взаимодействия как отношение амплитуды рассеянного сигнала A_p к накачке A_0

$$\frac{A_p}{A_0} = \frac{A_0 \omega_1^2 \gamma L \Gamma_i}{2\rho(\gamma - 1) C_\Omega C_1 C_2},$$

где L — характерный размер области взаимодействия.

Принимая $f_1 = 30$ МГц, $L = 10^{-2}$ м, число Маха $M = 10^{-6}$, находим для $\gamma = 1.06$ $A_p/A_0 = 0.9 \cdot 10^{-3}$ и для $\gamma = 1.2$ $A_p/A_0 = 1 \cdot 10^{-3}$. Направляющие косинусы вектора смещения комбинационного сигнала при изменении направления его волнового вектора от 114 до 144° принимают значения $p_2 = 0.3897 \ldots 0.399$, $p_3 = -0.921 \ldots -0.917$. Косвенным подтверждением полученных результатов по эффективности параметрических взаимодействий могут служить эксперименты по рассеянию звука на звуке в алюминиевом поликристаллическом блоке [2]. При взаимодействии поперечных волн и напряжении на излучателях накачки, равном 750 В, рассеянный сигнал на кварцевой резонансной приемной пластике составлял $\sim 10^{-3} \ldots 10^{-4}$ от напряжения на одном из контрольных приемников, расположенных по ходу распространения одного из взаимодействующих сигналов.

В работе [3] теоретически с привлечением функции Грина анализируется рассеяние двух коллимированных монохроматических плоских волн в изотропной среде. Представляется интересным оценить по этой методике эффективность взаимодействий поперечных волн в изотропной среде, близкой к кристаллическому кварцу.

Проделаем расчеты для плавленного кварца с упругими модулями третьего порядка, приведенными в работе [4]: $C_{pqr} \cdot 10^9$ Н/м^2: $C_{111} = 530$, $C_{112} = 240$, $C_{123} = 500$, $C_{144} = 90$, $C_{155} = 70$, $C_{456} = 10$.

Имея в виду известные соотношения между модулями третьего порядка в матричной форме и модулями третьего порядка для изотропного твердого тела Мэрнагала (m, n, l) и Ландау (A, B, C), получаем

$$A = n, \qquad B = m - \frac{1}{2}n, \qquad C = l - m + \frac{1}{2}n,$$

$$l = \frac{1}{2}C_{112}, \qquad m = C_{115}, \qquad n = 4C_{456}.$$

Численные значения для модулей в ГПа следующие: $A = 40$, $B = 90$, $C = 70$. Далее требуется рассчитать линейные модули сдвига μ и коэффициент всестороннего сжатия K. Для плавленного кварца имеем $\rho_0 = 2.2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $C_l = 5930$ м/с, $C_t = 3750$ м/с, $\lambda = 1.548 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\mu = 3.093 \cdot 10^{10}$ Н/м^2. Воспользуемся известными соотношениями

$$K = \frac{E}{2(1 - 2\mu)}, \qquad E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda},$$

получаем $K = 5.41 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $E = 7.217 \cdot 10^{10}$ Н/м^2.

Амплитуда рассеянной волны зависит от поляризации основных волн. Если одна из взаимодействующих волн поляризована перпендикулярно к плоскости волновых векторов $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, а другая — в плоскости $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, то рассеянной волны не существует. При поляризации же обеих волн перпендикулярно к плоскости $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ амплитуда рассеянной волны A_p имеет вид [3]

$$A_p = \frac{A_0 B_0 V \omega_1^3}{16\pi\rho_0 r C_t^4 C_l}\left\{-\left(\mu + \frac{A}{4}\right)\left[(a^3+1)(C^2-1) + a(a+1)(C^2+1)\right] - \right.$$

$$\left. - \left(K + \frac{\mu}{4} + \frac{A}{4} + B\right)\left[C^2(3C^2-1)(a+a^2) + C^2(C^2-1)(a^3-1)\right]\right\},$$

где $a = \omega_2/\omega_1$; $C = C_t/C_l$.

Имея в виду резонансные условия для этого случая [3] $0.338 < a < 2.955$, рассчитаем эффективность взаимодействия двух поперечных волн. Оценим отношение амплитуды смещения комбинационного сигнала к амплитуде смещения накачки. Зададим объем области взаимодействия $V = 10^{-6}$ м^3, число Маха $M = 10^{-6}$, $f_1 = 30$ МГц (из соображений сопоставления с [1]), тогда получим при $a = 1.2$ $A_p/A_0 = 6.7 \cdot 10^{-3}$, при $a = 0.6$ $A_p/A_0 = 5.7 \cdot 10^{-3}$.

Как видно, оценка эффективности параметрических преобразований, выполненная по двум разным методикам на близких материалах, согласуется с точностью до порядка, что представляется удовлетворительным. Вместе с тем существуют определенные преимущества расчета энергетики путем решения нелинейного волнового уравнения в рамках [1], а именно возможность исключения из рассмотрения функции Грина и громоздких преобразований, с ней не связанных, уже на уровне изотропного твердого тела. Кроме того, подход, развитый в [3], не представляется очевидным, да и возможным для монокристаллического вещества.

Следует заметить, что гетеродинное преобразование частоты на основе нелинейного взаимодействия квазипоперечных волн могло бы найти техническое приложение, в частности, для панорамных устройств, сканирующих кристалл. В звукопроводе происходит геометрическая развертка сигнала при изменении частоты накачки, и по наличию отклика на одном из приемных преобразователей, расположенных в определенном секторе плоскости YZ, представляется возможным судить о структуре вещества в заданном направлении.

Список литературы

[1] *Гусева Е.К., Неронова М.П., Чиж И.В.* // Матер. XIII Всесоюз. конф. по акустоэлектронике. Киев, 1986. С. 88–89. *Гусева Е.К.* Нелинейные акустические взаимодействия в интроскопии. Учебное пособие. Л.: ЛЭТИ, 1991.

[2] *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966.

[3] *Jones G.L., Kobbet D.R.* // JASA. 1961. Vol. 23. N 1. P. 185–193.

[4] *Hearmon R.F.S. Landolt-Börnstein* // Lahlenwerte und Functionen. Nene Serie. 1984. III/11. S. 265.