01;04;10

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА (η,ε)-ДИАГРАММ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БУРСИАНА

В.И.Кузнецов, А.В.Соловьев, А.Я.Эндер

Физико-технический институт им.А.Ф.Иоффе РАН,
194021, Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 27 февраля 1994 г.)

Используется техника (η,ε)-диаграмм для изучения вакуумного диода с моноэнергетическим потоком электронов. Состояния такого диода при нулевой разности потенциалов между электродами теоретически изучались Бурсианом и Павловым в 1923 г. [1]. Было обнаружено существование нескольких стационарных решений задачи.

Проведена полная классификация стационарных распределений потенциала в зависимости от внешнего напряжения и величины межэлектродного зазора. Получены аналитические выражения для всех типов распределений потенциала. Построены (η,ε)-диаграммы и вольт-амперные характеристики. Найдены значения параметров, для которых возможны несколько распределений потенциала при одном внешнем напряжении.

Введение

В [1] была решена задача о распределении потенциала при прохождении электронного пучка между двумя эквипотенциальными сетками. Один из чрезвычайно интересных результатов этой работы состоит в том, что при одних и тех же внешних параметрах можно найти несколько различных режимов прохождения электронного пучка — несколько самосогласованных распределений потенциала, удовлетворяющих одним граничным условиям.

В [1] задача формулировалась следующим образом. С плоского электрода, помещенного в начало координат (в дальнейшем будем называть его эмиттером), поступает одномерный поток электронов, представляющий собой пучок с энергией частиц, много большей их теплового разброса, и движется по направлению ко второму электроду (будем называть его коллектором), расположенному на расстоянии L праллельно эмиттеру. Потенциалы эмиттера и коллектора полагались одинаковыми и равными нулю. Для удобства представления результатов [1] перейдем к безразмерным величинам, используя принятые в

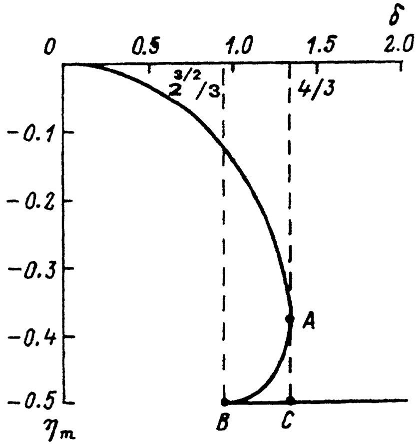

Рис. 1. Зависимость минимального значения на распределении потенциала η_m от величины межэлектродного зазора δ при нулевой разности потенциалов между электродами.

настоящее время при изучении пучков в плазме характерные энергию и длину,

$$W = mv_0^2, \quad \lambda_D = \left(\frac{W}{4\pi e^2 n_0}\right)^{1/2}, \tag{1}$$

где m, e, v_0, n_0 — масса и заряд электрона, скорость и концентрация электронов у эмиттера соответственно.

Тогда безразмерные потенциал, координата и расстояние между электродами будут равны соответственно

$$\eta = e\Phi/W, \quad x = z/\lambda_D, \quad \delta = L/\lambda_D. \tag{2}$$

Отметим, что в [1] характерная энергия выбиралась равной $W/2$, а характерная длина — $\lambda_D/2^{3/2}$.

Режим прохождения электронного пучка характеризуется единственным параметром δ (в [1] использовался безразмерный параметр, численно равный $2\delta^2$).

Ясно, что, для того чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям на электродах, потенциал должен иметь минимум η_m в одной из внутренних точек промежутка $(0, L)$. Зависимость η_m от параметра δ (рис. 1) дает возможность определить число решений: при δ, лежащих в интервалах $(0, 2^{3/2}/3)$ и $(4/3, \infty)$, реализуется только одно распределение потенциала, в то время как при $\delta \in 2^{3/2}/3, 4/3$ могут существовать сразу три различных распределения потенциала.

Особо отметим решения с $\eta_m = -1/2$, где в точке минимума потенциала потенциальная энергия электронов совпадает с их начальной кинетической энергией $mv_0^2/2$, т.е. скорость электронов обращается в нуль. Авторы [1] строят такие решения, вводя модель частичного отражения. Дело в том, что при расчете распределений потенциала с $\eta_m = -1/2$ необходимо учитывать, что электроны пучка имеют разброс по скоростям (хотя бы и очень малый). Тогда при бесконечно малом изменении потенцала η_m вблизи значения $-1/2$ отношение потоков прошедших и отраженных электронов будет изменяться и, варьируя это отношение, можно получить все решения с частичным отражением.

При увеличении параметра δ, например, путем увеличения плотности тока пучка в момент достижения им значения 4/3 величина η_m изменяется скачком: режим без отражения электронного пучка (рис. 1, точка A) сменяется режимом с его частичным отражением (точка C). Этот скачок происходит вследствие развития неустойчивости, получившей название неустойчивости Бурсиана. В [1] отмечалось, что решения на участке AB (рис. 1) не являются устойчивыми.

Результаты [1] обсуждались в работах [2,3]. В [2], кроме того, проведен анализ устойчивости решений с полным прохождением пучка. Рассмотрение в [2], носит качественный характер, так как делается предположение о постоянстве заряда пучка во всем межэлектродном зазоре.

В настоящей работе с помощью техники (η, ε)-диаграмм исследуются состояния вакуумного диода с моноэнергетическим пучком электронов, причем в отличие от [1] разность потенциалов V между электродами не полагается равной нулю, а является варьируемым параметром. Ранее (η, ε)-диаграммы применялись для изучения состояний плазмы в модели Пирса и в кнудсеновском диоде с поверхностной ионизацией (КДПИ) [4–7]. Задача данной работы — изучить, при каких δ и V возникают неединственные решения, и найти значения параметров, при которых развивается неустойчивость Бурсиана.

1. Основные уравнения. Решение для полупространства

Будем искать стационарные самосогласованные распределения потенциала, которые могут возникнуть в диоде при распространении одномерного электронного потока. Для предварительного анализа в этом разделе будем считать, что коллектор располагается на бесконечном расстоянии от эмиттера, и рассматривать задачу для полупространства.

Используя (2), введем безразмерные время, скорость, концентрацию и напряженность электрического поля: $\tau = tv_0/\lambda_D$, $u = v/v_0 = dx/d\tau$, $\rho = n/n_0$, $\varepsilon = eE\lambda_D/W = -\partial\eta/\partial x$. Обозначим через ε_0 напряженность электрического поля на эмиттере. В зависимости от значения этого параметра могут реализовываться распределения потенциала различного типа. Очевидно, что при больших отрицательных ε_0 потенциал монотонно возрастает с ростом x. При больших положительных ε_0 потенциал монотонно убывает до $-\infty$, при этом электроны долетают только до точки с потенциалом $-1/2$, т.е. происходит полное отражение. В определенном интервале ε_0 реализуются распределения потенциала, при которых происходит частичное отражение электронного потока.

Стационарные состояния диода описываются системой, состоящей из трех уравнений: уравнения Пуассона, условия постоянства потока и уравнения движения Ньютона. В одномерном случае с учетом возможного отражения электронов эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial\varepsilon(x)}{\partial x} = -\rho(x), \tag{3а}$$

$$\rho(x)u(x) = \nu(x), \tag{3б}$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\varepsilon(x). \tag{3в}$$

Безразмерный поток $\nu(x)$ определяется следующим образом:

$$\nu = (1+r)\cdot\Theta(x_1 - x) + (1-r)\cdot\Theta(x - x_1), \tag{4}$$

где r — коэффициент отражения, представляющий собой долю электронного потока, возвращающегося на эмиттер ($0 \leqslant r \leqslant 1$); x_1 — координата точки отражения; Θ — функция скачка Хевисайда.

Для режимов без отражения поток постоянен, $\nu \equiv 1$. Связь между потенциалом η и скоростью u находится из закона сохранения энергии

$$\eta = \left(u^2 - 1\right)/2. \tag{5}$$

Если речь идет о построении стационарного решения, то уравнение (5) эквивалентно (3в), поскольку оно дает необходимую для замыкания системы уравнений (3) связь между скоростью и потенциалом. В отличие от нестационарного случая здесь нет необходимости вычислять зависимость координаты от времени для каждого электрона, т.е. решать уравнение (3в). Однако при анализе решений часто оказывается удобным использовать дополнительный параметр τ — время пролета электрона от эмиттера до рассматриваемой точки. Такой подход использовался в [8] для исследования модели Пирса. Уравнение для определения траектории электрона, движущегося по направлению к коллектору, получается после дифференцирования (3) по τ с учетом того, что в стационарном поле $d\varepsilon/d\tau = u\cdot\partial\varepsilon/\partial x$,

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = \nu(x). \tag{6}$$

При заданном ε_0 имеем следующие начальные условия для (6):

$$x|_{\tau=0} = 0, \quad \left(\frac{dx}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 1, \quad \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}\right)_{\tau=0} = -\varepsilon_0. \tag{7}$$

Остановимся на наиболее общем случае, когда имеет место частичное отражение электронов. Пусть τ_1 — время пролета электрона до точки отражения. При $\tau < \tau_1$ величина ν постоянна и из (6), (7) с использованием (3в) легко получаем

$$x = \frac{1+r}{6}\tau^3 - \frac{\varepsilon_0}{2}\tau^2 + \tau, \tag{8}$$

$$u = \frac{1+r}{2}\tau^2 - \varepsilon_0\tau + 1, \tag{9}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - (1+r)\tau. \tag{10}$$

В точке отражения скорость равна нулю, а потенциал равен $-1/2$. При частичном отражении этот потенциал должен быть минимальным, поскольку существование точки с меньшим потенциалом привело бы к полному отражению. Следовательно, напряженность электрического поля в точке отражения должна обращаться в нуль. Таким образом, имеем

$$u(\tau_1) = 0, \quad \varepsilon(\tau_1) = 0. \tag{11),(12}$$

Из (9), (10) и условий (11), (12) находим τ_1 и ε_0

$$\tau_1 = \left(\frac{2}{1+r}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

$$\varepsilon_0(r) = [2(1+r)]^{1/2}. \tag{14}$$

Подставляя (13), (14) в (8), находим координату точки отражения

$$x_1(r) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{1+r}\right)^{1/2} \tag{15}$$

Используя условия (11), (12), для тех электронов, которые смогли преодолеть потенциальный барьер, можно получить решение (6) правее точки отражения ($\tau > \tau_1$)

$$x = x_1 + \frac{(\tau-\tau_1)^3}{6}(1-r). \tag{16}$$

Для u и ε тогда имеем

$$u = \frac{(\tau-\tau_1)^2}{2}(1-r), \tag{17}$$

$$\varepsilon = (\tau-\tau_1)(1-r). \tag{18}$$

Исключая τ из уравнений (16), (17) и используя (5), для потенциала правее точки отражения ($x \geqslant x_1$) получаем

$$\eta = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{4/3}\left[x - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{2-j}\right)^{1/2}\right]^{4/3} j^{2/3} - \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Здесь $j = 1 - r$ — безразмерная плотность тока, т.е. доля электронного потока, прошедшего за точку отражения. Учитывая (14), находим связь между j и ε_0

$$j = 2 - \varepsilon_0^2/2. \tag{20}$$

Как видно из (14), режиму частичного отражения соответствует интервал $2^{1/2} \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 2$ (распределения потенциала *1–5* на рис. 2,*б*).

При $\varepsilon_0 \in (-\infty, 2^{1/2})$ реализуются решения без отражения. Действительно, полагая в (9) $r = 0$, убеждаемся, что для таких ε_0 скорость электрона неотрицательна при всех $\tau > 0$. Формулы (8)–(10) при $r = 0$

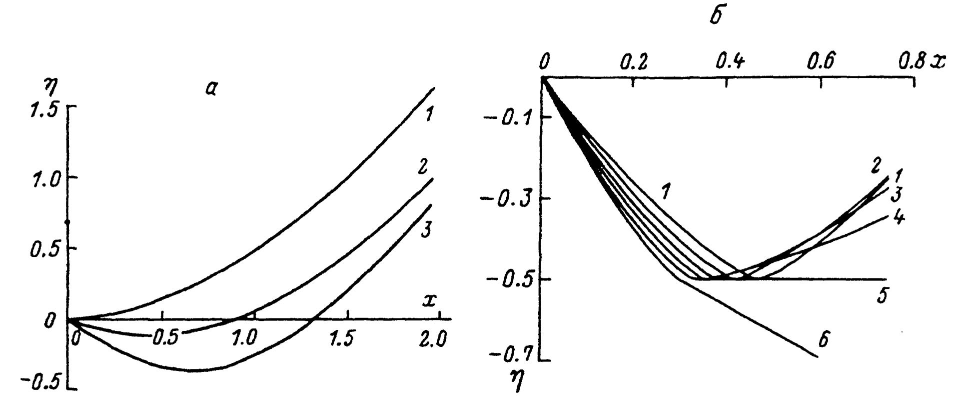

Рис. 2. Примеры распределений потенциала в режиме без отражения электронного потока (*а*) и с отражением (*б*).

а: *1* — $\varepsilon_0 = 0$, *2* — 0.5, *3* — 1.0; *б*: *1* — $r = 0$, *2* — 0.25, *3* — 0.5, *4* — 0.75, *5* — 1.0 (частичное отражение), *6* — $\varepsilon_0 = 2.1$ (полное отражение).

описывают как монотонные ($\varepsilon_0 \leqslant 0$) (рис. 2,*а*, кривая *1*), так и немонотонные ($0 < \varepsilon_0 \leqslant 2^{1/2}$) распределения потенциала без отражения электронов (рис. 2,*а*, кривые *2* и *3*).

При $\varepsilon_0 \geqslant 2$ происходит полное отражение электронного потока (распределение потенциала *6* на рис. 2,*а*). В этом случае потенциал в точке отражения не является минимальным и выполнения условия (12) требовать не надо. Полагая в (8)–(10) $r = 1$ и используя (11), находим τ_1, x_1 и напряженность электрического поля в точке отражения — ε_1

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} - \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 - 1\right]^{1/2} \tag{21}$$

$$x_1 = \frac{\varepsilon_0}{2} - \frac{2}{3}\left\{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^3 - \left[\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 - 1\right]^{3/2}\right\}, \tag{22}$$

$$\varepsilon_1 = \left(\varepsilon_0^2 - 4\right)^{1/2} \tag{23}$$

В данном случае концентрация частиц правее точки отражения равна нулю. Поэтому при $x \geqslant x_1$ напряженность электрического поля остается постоянной и потенциал η равен

$$\eta(x) = -\frac{1}{2} - \varepsilon_1(x - x_1). \tag{24}$$

Рассмотрим, в каких пределах изменяется координата точки отражения x_1. Введем следующие обозначения: $\delta_1 = 1/3$, $\delta_2 = 2^{1/2}/3$. Используя формулы (22) и (15), можно показать, что при полном отражении $x_1 \leqslant \delta_1$, а в режиме частичного отражения $\delta_1 < x_1(r) < \delta_2$. Отметим, что во всех случаях x_1 убывает с ростом ε_0.

2. Построение (η, ε)-диаграмм

Пусть теперь на расстоянии δ от эмиттера расположен второй электрод — коллектор. Для изучения состояний такого диода удобно использовать (η, ε)-диаграмму. В общем случае в плоском плазменном диоде при заданном распределении ионов по зазору каждому значению ε_0 отвечает определенное распределение потенциала. На этом распределении можно найти потенциал на расстоянии δ от эмиттера η_δ. Зависимость η_δ от ε_0 называется (η, ε)-диаграммой.

В [5,6,9–12] (η, ε)-диграмма использовалась для изучения модели Пирса в КДПИ. В модели Пирса пучок электронов распространяется через фон однородно распределенных ионов. В КДПИ ионы и электроны поступают с поверхностей электродов с полумаксвелловскими функциями распределения по скоростям и движутся в межэлектродном промежутке без столкновений. КДПИ является хорошей моделью термоэмиссионного преобразователя энергии в кнудсеновском режиме [13] и Q-машины [14]. В [5] с помощью техники (η, ε)-диаграмм исследовалась модель Пирса, а в [6] изучались состояния плазмы в КДПИ на ионном фоне, соответствующем полностью самосогласованному стационарному решению задачи. В [9–12] эта же техника применялась в КДПИ для исследования решений на ионном фоне, который изменяется в ходе нестационарного ионного процесса. С помощью (η, ε)-диаграммы находились все электронные состояния и исследовалась их устойчивость относительно малых электронных возмущений. Если состояние оказывается неустойчивым, то в диоде развивается апериодическая неустойчивость типа неустойчивости Пирса и происходит переход в одно из устойчивых состояний.

Применим технику (η, ε)-диаграмм для изучения состояний вакуумного диода с пучком электронов. Отсутствие ионного фона не вносит существенных изменений в эту технику. В случае $\delta > \delta_2$ для построения (η, ε)-диаграммы можно воспользоваться распределениями потенциала, полученными в предыдущем разделе. Для этого на рис. 2 проведем прямую $x = \delta$ и будем находить значения η в точках пересечения этой прямой с распределениями потенциала. Учитывая, что каждому распределению потенциала соответствует определенное значение ε_0, получаем (η, ε)-диаграмму для зазора δ.

Зависимость η_δ от ε_0 можно построить аналитически. Для режимов с частичным и полным отражением она находится по формулам (19), (20) и (24) при $x = \delta$. Для режима без отражения явная зависимость η_δ от ε_0 приведена в Приложении. Отметим, что самосогласованные распределения потенциала при прохождении ионного пучка через плоский слой в отсутствие электронов изучались в [15]. Эта задача сводится к рассматриваемой нами задаче об электронном пучке, если изменить знаки у потенциала и напряженности. В [15] изучался режим без отражения с монотонными распределениями потенциала, а аналитические зависимости $\eta(x)$ были получены только для диапазона $-2^{3/2}/3^{1/2} \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 0$.

Имея связь $\eta_\delta(\varepsilon_0)$, т.е. (η, ε)-диаграмму и учитывая то, что ток j однозначно связан с ε_0, легко построить и вольт-амперную характеристику (ВАХ) диода — зависимость $j(\eta_\delta)$. На участке с частичным

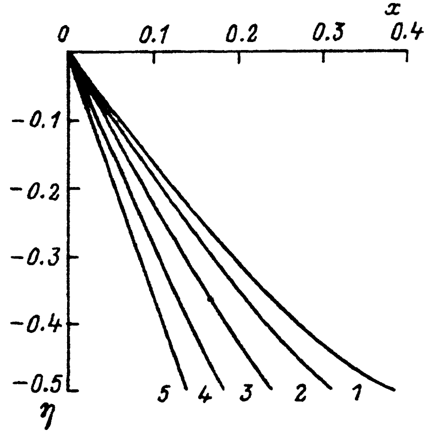

Рис. 3. Примеры распределений потенциала в режиме с частичным отражением электронов 2-го рода при $r = 0.5$.
1 — $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^1 = 1.732$, *2* — $\varepsilon_0^1 + 0.2$, *3* — $\varepsilon_0^1 + 0.4$, *4* — $\varepsilon_0^1 + 0.8$, *5* — $\varepsilon_0^1 + 1.0$.

отражением электронов величина j изменяется в интервале 0.1 в соответствии с формулой (20) в случае без отражения $j \equiv 1$, а при полном отражении ток равен нулю.

В случае $\delta \leqslant \delta_2$ помимо найденных в разделе 1 решений могут существовать распределения потенциала с частичным отражением электронов другого типа, когда точка отражения находится непосредственно на коллекторе, т.е. $\eta_\delta = -1/2$. Такие решения будем называть распределениями потенциала с частичным отражением 2-го типа в отличие от решений с частичным отражением 1-го типа, у которых точка отражения лежит внутри зазора.

Обозначим связь между ε_0 и r для решений 1-го типа (формула (14)) через $\varepsilon_0^1(r)$. Зафиксируем $r < 1$ и будем строить $\eta(x)$ по параметрическим формулам (5), (8), (9). Если $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^1(r)$, то с ростом x величина потенциала убывает и достигает значения $-1/2$ в точке $x^* < \delta_2$, причем $\varepsilon(x^*) > 0$. Продолжить решения за точку x^* нельзя, так как при этом $\eta(x)$ становится более отрицательным, что соответствует полному отражению и противоречит выбору $r < 1$. Если поместить коллектор в точке x^*, т.е. положить $\delta = x^*$, то получится решение с частичным отражением 2-го типа. На рис. 3 в качестве примера представлены распределения потенциала 2-го типа при $r = 0.5$ для ряда значений $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0^1(r)$. По пересечению этих кривых с прямой $\eta = -1/2$ можно найти зависимость δ от ε_0. Таким графическим методом можно построить $\delta(\varepsilon_0)$ и для других r и найти функцию $\varepsilon_0(r)$ при фиксированном δ. Участок (η, ε)-диаграммы, соответствующий этим решениям, будет отрезком прямой $\eta = -1/2$.

Зависимость $\varepsilon_0(r)$ для решений 2-го типа можно найти и аналитически. Учитывая, что в точке отражения, которая в данном случае находится на коллекторе, скорость электрона обращается в нуль, т.е. $u(\delta) = 0$, из (9) находим выражение для ε_0 через τ_δ

$$\varepsilon_0 = \frac{1+r}{2}\tau_\delta + \frac{1}{\tau_\delta}. \tag{25}$$

Величина τ_δ находится из кубического уравнения, которое получается подстановкой (25) в (8). При его решении необходимо выбирать положительный корень, для которого, кроме того, напряженность электрического поля на коллекторе неотрицательна. Такой корень оказывается единственным

$$\tau_\delta = 2\left(\frac{2}{1+r}\right)^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi+\pi}{3}\right), \quad \text{где} \quad \varphi = \arccos\left[3\delta\left(\frac{1+r}{2}\right)^{1/2}\right]. \tag{26}$$

Формулы (25), (26) имеют смысл только для $\delta \leqslant \delta_2$. При $\delta \leqslant \delta_1$ решения с частичным отражением второго типа существуют для всех r, а при $\delta_1 < \delta \leqslant \delta_2$ — только при $r \in (0, r^C)$, где

$$r^C = 2(\delta_1/\delta)^2 - 1. \tag{27}$$

Отметим, что при фиксированном δ величина ε_0 растет с ростом r.

3. Анализ (η, ε)-диаграмм и ВАХ

Существуют три значения δ (δ_1, δ_2 и $2\delta_2$), при переходе через которые изменяется вид (η, ε)-диаграмм и ВАХ. На рис. 4 представлены характерные (η, ε)-диаграммы, а на рис. 5 — соответствующие ВАХ. Точками A–E на кривых отмечены границы областей, различающихся либо режимом прохождения электронов, либо характером устойчивости диода. При $\varepsilon_0 < \varepsilon_0^D$ (точка D на рис. 4 и 5) реализуется режим без отражения электронов и $j = 1$. При этом, когда $\varepsilon_0 \leqslant 0$, распределения потенциала монотонны и η_δ убывает с ростом ε_0. При $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_0^D$ распределения потенциала, как правило, немонотонны. При $\varepsilon_0^D \leqslant \varepsilon_0 < \varepsilon_0^A$ (участок DA на рис. 4 и 5) реализуется режим с частичным отражением и ток убывает от 1 до 0 с ростом ε_0. Области $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon_0^A$ соответствует режим с полным отражением, в котором $j = 0$; здесь η_δ всегда убывает с ростом ε_0.

Рассмотрим подробнее (η, ε)-диаграммы для разных величин зазора. При $\delta \geqslant \delta_2$ (рис. 4,*а*,*б*) величина ε_0^D не зависит от δ и равна $2^{1/2}$. В этом случае значение потенциала η_δ^D, соответствующее ε_0^D, находится из (19) при $j = 1$

$$\eta_\delta^D = 2\left[\frac{3}{4}(\delta - \delta_2)\right]^{4/3} - \frac{1}{2}. \tag{28}$$

В режиме без отражения электронов зависимость η_δ от ε_0 немонотонна и принимает минимальное значение в точке E; в этом режиме участок (η, ε)-диаграммы описывается формулами (П.4)–(П.6), (5) и (9). Для построения участка диаграммы DA, отвечающего частичному отражению, используются формулы (19) и (20). Переход к режиму с полным отражением происходит при $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^A = 2$, а диаграмма на этом участке строится по формулам (22)–(24).

При $\delta < \delta_2$ на (η, ε)-диаграмме внутри области DA появляется участок, отвечающий режиму с частичным отражением 2-го типа (рис. 4,*в*,*г*). Для $\delta_1 \leqslant \delta < \delta_2$ этот режим реализуется при $\varepsilon_0^D < \varepsilon_0 < \varepsilon_0^C$

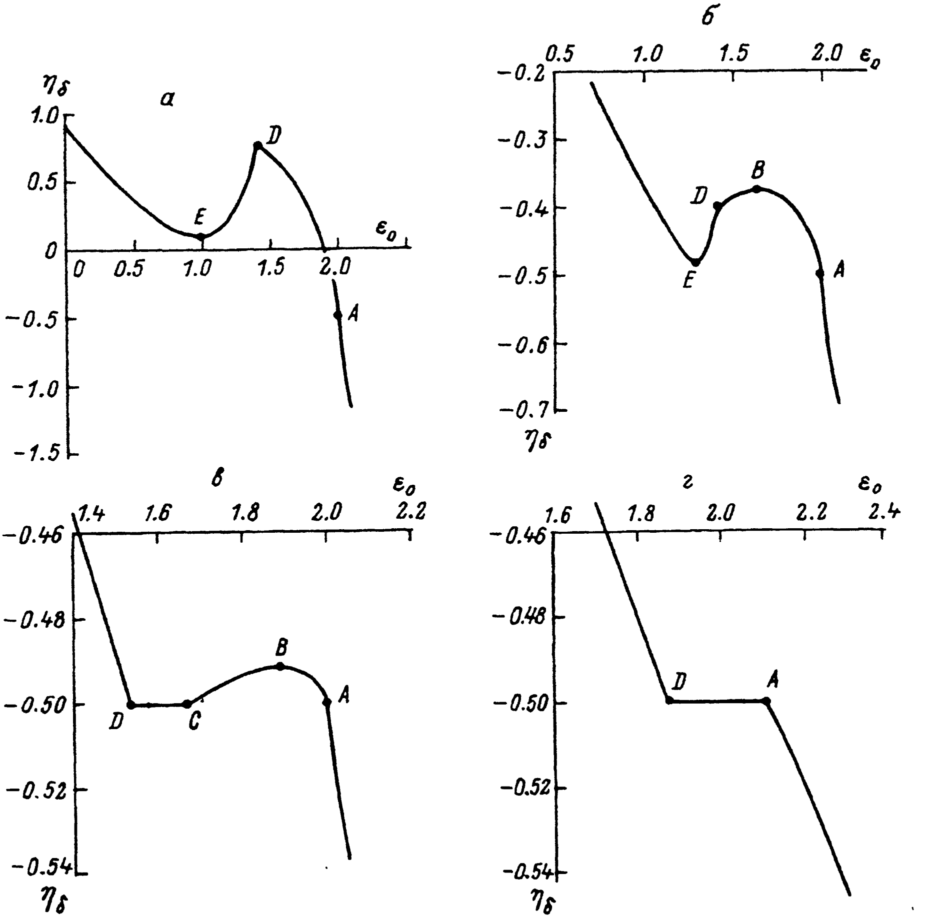

Рис. 4. Примеры (η, ε)-диаграмм для разных величин зазора, *а* — $\delta = 3 \cdot \delta_2$, *б* — $1.3 \cdot \delta_2$, *в* — $1.2 \cdot \delta_1$, *г* — $0.9 \cdot \delta_1$.

(отрезок прямой с $\eta_\delta = -1/2$ на рис. 4,*в*). Значение ε_0^D находится из формул (25), (26) при $r = 0$, а ε_0^C — из формул (27) и (14)

$$\varepsilon_0^C = 2 \cdot \delta_1/\delta. \tag{29}$$

С уменьшением δ участок CA, отвечающий решениям с частичным отражением первого типа, сокращается и при $\delta = \delta_1$ исчезает. При $\delta < \delta_1$ весь участок DA (рис. 4,*г*) соответствует решениям второго типа, а ε_0^A находится из (25) и (26) при $r = 1$.

Описанная выше классификация различных режимов диода наглядно представлена на рис. 6, где на плоскости ε_0, δ изображены границы областей с решениями различного типа. Здесь вертикальные пунктирные линии соответствуют примерам из рис. 4 и 5 ($\delta = 3 \cdot \delta_2$, $1.3 \cdot \delta_2$, $1.2 \cdot \delta_1$ и $0.9 \cdot \delta_1$). Решения с частичным отражением на рис. 6 лежат в полосе, ограниченной сверху линиями *1* и *3*, а снизу — линиями *2* и *6*. Ниже этой полосы реализуются состояния без отражения, выше — с полным

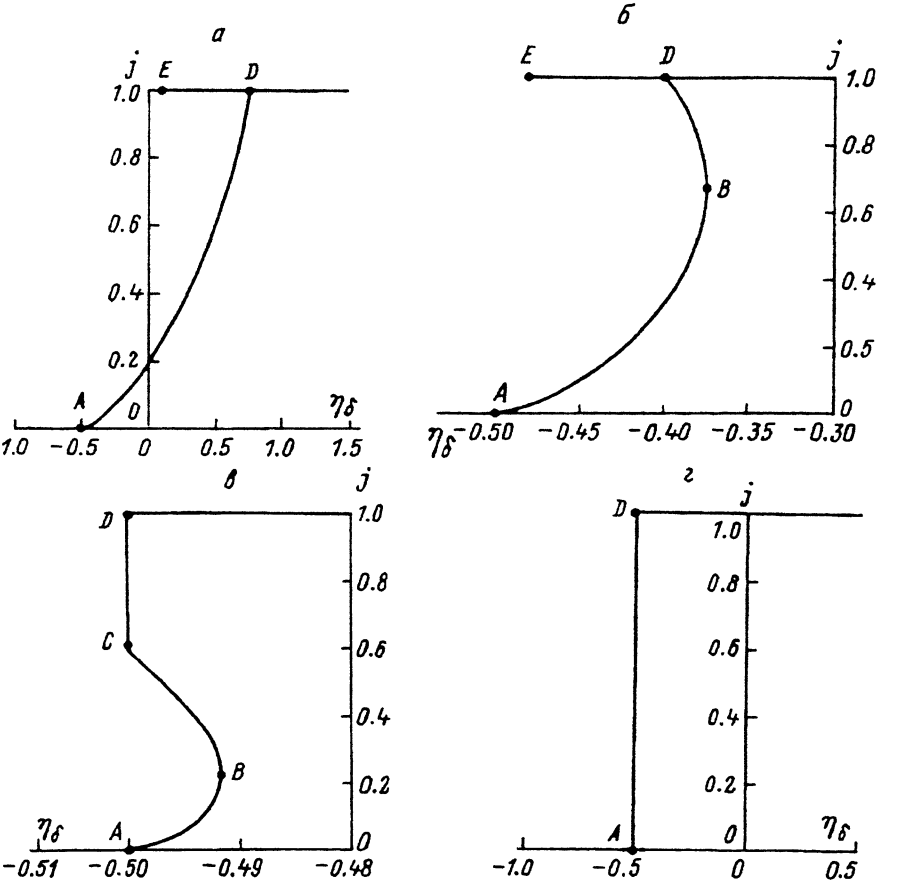

Рис. 5. Примеры ВАХ диода для разных величин зазора (значения δ те же, что и на рис. 4).

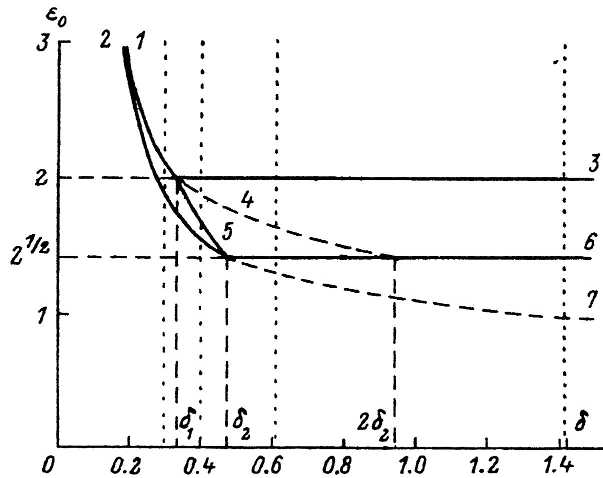

Рис. 6. Области существования решений различного типа на плоскости ε_0, δ.

отражением. Внутри этой полосы правее линии *5* лежат решения с частичным отражением 1-го, а левее — 2-го типа.

Приведем сводку формул, описывающих границы областей, показанных на рис. 6 сплошными линиями: линия *1* описывается формулами (25), (26) при $r = 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_1$; линия *2* — (25), (26) при $r = 0$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_2$; линия *3* — $\varepsilon_0 = 2$, $\delta_1 \leqslant \delta < \infty$; линия *5* — (29), $\delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2$; линия *6* — $\varepsilon_0 = 2^{1/2}$, $\delta_2 \leqslant \delta < \infty$.

4. Исследование устойчивости

Используя (η, ε)-диаграмму, можно исследовать диод на устойчивость [5–7]: устойчивому состоянию соответствует $d\eta_\delta/d\varepsilon_0 < 0$, в неустойчивом состоянии $d\eta_\delta/d\varepsilon_0 > 0$.

а) В режиме без отражения ($r = 0$) производная $d\eta_\delta/d\varepsilon_0$ находится с использованием формул (5), (8) и (9)

$$\frac{d\eta_\delta}{d\varepsilon_0} = \frac{d\eta_\delta}{du_\delta}\frac{du_\delta}{d\tau_\delta}\frac{d\tau_\delta}{d\varepsilon_0} = \frac{\tau_\delta^3}{6} - \delta. \tag{30}$$

На границе устойчивости (точка E на рис. 4,*а*,*б*; 5,*а*,*б*) время пролета электрона через зазор τ_δ^E равно $(6\delta)^{1/3}$, а ε_0^E и η_δ^E находятся из (8), (5) и (9)

$$\varepsilon_0^E = \left(\frac{4}{3\delta}\right)^{1/3}, \tag{31}$$

$$\eta_\delta^E = \frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{\delta}{\delta_2}\right)^{2/3} - 1\right]^2 - 1\right\}. \tag{32}$$

Решения устойчивы для $\varepsilon \in (-\infty, \varepsilon_0^E)$ и неустойчивы для $\varepsilon_0 \in (\varepsilon_0^E, 2^{1/2})$ (участок ED на рис. 4,*а*,*б*). На рис. 6 граница устойчивости в режиме без отражения (31) показана штриховой линией *7*.

Формулы (31), (32) имеют смысл только при $\delta \geqslant \delta_2$. При $\delta < \delta_2$ участок (η, ε)-диаграммы для решения без отражения электронов $\varepsilon_0 \in (-\infty, \varepsilon_0^D)$ монотонен (рис. 4,*в*,*г*) и все такие состояния устойчивы (точка E на рис. 4,*в*,*г* отсутствует).

б) Для режима с частичным отражением 1-го типа параметры границы устойчивости η_δ^B, ε_0^B и j_B (точка B на рис. 4,*б*,*в*; 5,*б*,*в*) находятся из условия $d\eta_\delta/d\varepsilon_0 = 0$ с использованием формул (19), (20)

$$\eta_\delta^B = \frac{1}{2}\left\{\left[(3\delta)^{2/3} - 1\right]^2 - 1\right\}, \tag{33}$$

$$\varepsilon_0^B = 2\cdot(3\delta)^{-1/3}, \tag{34}$$

$$j_B = 2\cdot[1 - (3\delta)^{-2/3}]. \tag{35}$$

Состояния, лежащие правее точки B, устойчивы (участок BA на рис. 4,*б* и *в*), а левее нее — неустойчивы (участок DB на рис. 4,*б* и

CB на рис. 4,*в*). На рис. 6 граница устойчивости в режиме с частичным отражением 1-го типа, рассчитанная по (34), показана штриховой линией *4*. Выше этой линии состояния диода устойчивы.

Отметим, что формулы (33)–(35) имеют смысл только при $\delta \in [\delta_1, 2\delta_2]$. При $\delta > 2\delta_2$ участок (η, ε)-диаграммы, соответствующий решениям с частичным отражением (участок DA на рис. 4,*а*), монотонен и все такие состояния устойчивы. При $\delta < \delta_1$ решения с частичным отражением 1-го типа отсутствуют. При $\delta = \delta_1$ точка B совпадает с точкой A, а при $\delta = 2\delta_2$ — с точкой D.

в) В режиме с частичным отражением 2-го типа $d\eta_\delta / d\varepsilon_0 \equiv 0$. В этом случае для определения характера устойчивости состояний требуется более детальный учет разброса по скоростям у электронов.

г) В режиме с полным отражением производная $d\eta_\delta / d\varepsilon_0$, определяемая с использованием формул (22)–(24), всегда отрицательна и все такие состояния устойчивы.

5. Обсуждение результатов. Бинарные состояния

При рассмотрении (η, ε)-диаграмм (рис. 4) обращает на себя внимание то, что зависимость η_δ от ε_0, как правило, является немонотонной. Эта немонотонность приводит к тому, что для любого $\delta > \delta_1$ существует интервал внешних напряжений $(\eta_\delta^{\min}, \eta_\delta^{\max})$, в котором одному η_δ отвечают три разных значения ε_0, т.е. три состояния с различающимися распределениями потенциала. Из рис. 4 следует

$$\eta_\delta^{\min} = \begin{cases} -1/2 & \delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2 \quad (\text{рис.}\,4,\textit{в}), \\ \eta_\delta^E & \delta \geqslant \delta_2 \qquad\quad\; (\text{рис.}\,4,\textit{а},\textit{б}), \end{cases}$$

$$\eta_\delta^{\max} = \begin{cases} \eta_\delta^B & \delta_1 \leqslant \delta \leqslant 2\delta_2 \quad (\text{рис.}\,4,\textit{б},\textit{в}), \\ \eta_\delta^{\mathrm{B}} & \delta \geqslant 2\delta_2 \qquad\quad (\text{рис.}\,4,\textit{а}). \end{cases}$$

Зависимости $\eta_\delta^{\min}$ и $\eta_\delta^{\max}$ от δ (кривые *1* и *2* на рис. 7) определяют границы области неоднозначности на плоскости η_δ, δ. Заметим, что при $\eta_\delta = 0$ неоднозначность имеет место для $2\delta_2 \leqslant \delta \leqslant 4/3$, что совпадает с результатами [1] (рис. 1).

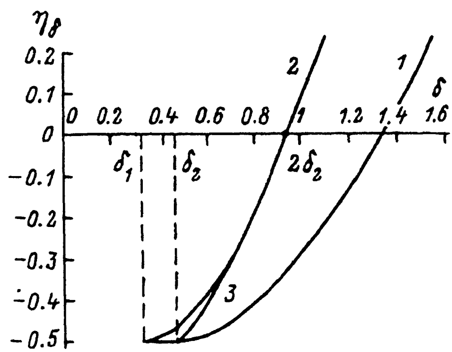

Рис. 7. Области существования нескольких состояний на плоскости η_δ, δ.

Можно выделить два типа неоднозначностей. Если $\delta \geqslant 2\delta_2$ (рис. 4,*а*), то η_δ, лежащим в интервале $(\eta_\delta^E, \eta_\delta^D)$, отвечают два состояния без отражения (устойчивое состояние с меньшим ε_0 и неустойчивое — с бóльшим) и одно устойчивое состояние с отражением электронов — первый тип неоднозначности. При $\delta_2 < \delta < 2\delta_2$ (рис. 4,*б*) в интервале $\eta_\delta \in (\eta_\delta^E, \eta_\delta^D)$ сохраняется первый тип неоднозначности, а в интервале $\eta_\delta \in (\eta_\delta^D, \eta_\delta^B)$ возникает второй тип неоднозначности: одно устойчивое состояние без отражения и два с отражением электронов (неустойчивое с меньшим ε_0 и устойчивое — с бóльшим). При $\delta_1 < \delta \leqslant \delta_2$ остается только неоднозначность второго типа. На рис. 7 граница между этими типами неоднозначности показана линией *3*.

Из проведенного выше рассмотрения видно, что в области неоднозначности существуют два устойчивых решения, т.е. в вакуумном диоде с моноэнергетическим пучком электронов реализуются бинарные состояния. Пороговое значение зазора, при котором возникает это явление, равно $\delta_1 = 1/3$.

В общем случае будем называть бинарными состояниями в вакуумном или плазменном диодах такие состояния, когда при одном потенциале коллектора имеются два устойчивых относительно малых электронных возмущений полностью самосогласованных решения. Заметим, что в КДПИ также могут существовать несколько устойчивых электронных состояний [6,9–12]. При развитии неустойчивости Пирса за время порядка времени пробега электронов через зазор диод переходит в одно из этих состояний (распределение ионов за это время не меняется). Однако результирующее состояние не является согласованным с распределением ионов; в дальнейшем за время порядка времени пробега ионов через зазор происходят перераспределение ионов и перестроение потенциала. В отличие от КДПИ в вакуумном диоде, где ионы отсутствуют, найденные решения являются полностью самосогласованными.

Рассмотренное явление неоднозначной зависимости ε_0 от η_δ в вакуумном диоде приводит к гистерезису на ВАХ диода. Рассмотрим для примера случай $\delta_1 \leqslant \delta \leqslant \delta_2$ (рис. 4,*б* и 5,*б*). Приложим к диоду напряжение и будем увеличивать его со стороны отрицательных значений. Когда η_δ превысит значение $-1/2$, через диод потечет ток, возрастая с увеличением η_δ. В точке B (рис. 5,*б*) ток скачком изменяется до значения, равного 1 (режим с частичным отражением сменяется режимом без отражения), и при дальнейшем увеличении η_δ перестает изменяться. При обратном ходе (при уменьшении η_δ) ток диода остается равным 1 пока не достигнет точки E. После этого происходит скачкообразное уменьшение тока: из режима без отражения диод переходит в режим с частичным отражением.

Таким образом, подробная классификация всех возможных распределений потенциала, (η, ε)-диаграмм и ВАХ в вакуумном диоде с электронным пучком позволила исследовать устойчивость всех решений, определить область, в которой возникает неустойчивость Бурсиана и найти область существования бинарных состояний.

Если в дальнейшем несколько стационарных состояний удастся обнаружить и в плазменных диодах, то это, несомненно, будет иметь важное прикладное значение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Построение зависимости η_δ от ε_0 в режиме без отражения

Полагая в (8) $x = \delta$ и $r = 0$, получаем следующее кубическое уравнение для τ_δ:

$$\tau_\delta^3 - 3\varepsilon_0\tau_\delta^2 + 6\tau_\delta - 6\delta = 0. \qquad (\text{П}.1)$$

Его дискриминант имеет вид

$$D(\delta, \varepsilon_0) = 9\delta^2 + 6\varepsilon_0\left(\varepsilon_0^2 - 3\right)\delta - 3\varepsilon_0^2 + 8. \qquad (\text{П}.2)$$

В зависимости от знака дискриминанта уравнение (П.1) имеет один ($D > 0$) или три ($D < 0$) вещественных корня. Нужный корень выбирается с использованием следующих условий: величина τ_δ должна быть положительна, а зависимость x от τ (формула (8) при $r = 0$) — монотонна на участке $\tau \in (0, \tau_\delta)$.

На рис. 8 показаны четыре области на плоскости (ε_0, δ), которые различаются по числу и характеру корней уравнения (П.1). Здесь сплошные линии *1–4* соответствуют $D = 0$, а штриховая линия *5* — $\varepsilon_0 = 2^{1/2}$ при $\delta \in (\delta_2, \infty)$. Приведем сводку формул для нахождения τ_δ с учетом сформулированных выше условий.

1) Область между линиями *1* и *2* на рис. 8 ($D < 0$)

$$\tau_\delta = -2|p|^{1/2}\cos\left(\frac{\pi - \varphi}{3}\right) + \varepsilon_0, \qquad (\text{П}.4)$$

где $p = 2 - \varepsilon_0^2$, $q = -\varepsilon_0^3 + 3\varepsilon_0 - 3\delta$, $\varphi = \arccos(-q/|p|^{3/2})$.

2) Область ниже кривой *3* на рис. 8 ($D < 0$)

$$\tau_\delta = 2|p|^{1/2}\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \varepsilon_0. \qquad (\text{П}.5)$$

3) Область между линиями *2*, *5* и *3* на рис. 8 ($D > 0$)

$$\tau_\delta = \left(-q + D^{1/2}\right)^{1/3} + \left(-q - D^{1/2}\right)^{1/3} + \varepsilon_0. \qquad (\text{П}.6)$$

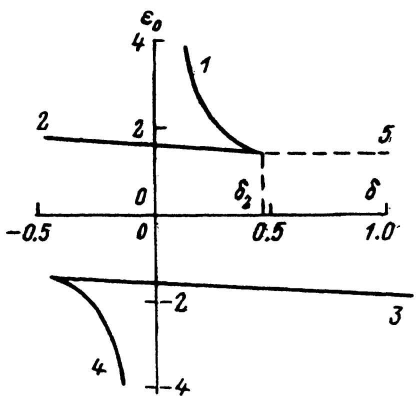

Рис. 8. Области постоянства знака дискриминанта D.

4) В области выше линий *1* и *5* ($D > 0$) решений не существует.

Определив r_δ, из уравнений (9), (5) при $r = 0$ находим η_δ, т.е. получаем зависимость $\eta(\delta, \varepsilon_0)$.

Как отмечалось в разделе 2, в [15] изучались самосогласованные монотонные распределения потенциала в вакуумном диоде с пучком заряженных частиц, движущихся без отражения. Для потенциала η было получено кубическое уравнение, дискриминант которого D_1 связан с D (формула (П.2)) следующим образом: $D_1(x, \varepsilon_0) \sim [D(x, \varepsilon_0)]^3 \cdot (x - \varepsilon_0 + {} + \varepsilon_0^3/3)$. Аналитические зависимости $\eta(x)$ в [15] были получены только для таких $\varepsilon_0 \leqslant 0$, когда $D_1 > 0$ при всех $x > 0$.

Список литературы

[1] *Бурсиан В., Павлов В.* // Журн. рус. физ.-хим. общества. 1923. Т. 55. Вып. 1-3. С. 71-80.

[2] *Незлин М.В.* Динамика пучков в плазме. М.: Энергоиздат, 1982. 263 с.

[3] *Добрецов Л.Н., Гомоюнова М.В.* Эмиссионная электроника. М.: Наука, 1966. 564 с.

[4] *Pierce J.R.* // J. Appl. Phys. 1944. Vol. 15. N 10. P. 721–726.

[5] *Смирнов В.М.* ЖЭТФ. 1966. Т. 50. Вып. 4. С. 1005–1012.

[6] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1977. Т. 47. Вып. 11. С. 2237–2246.

[7] *Norris W.T.* // J. Appl. Phys. 1964. Vol. 35. N 11. P. 3260–3268.

[8] *Godfrey B.B.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 5. P. 1553–1560.

[9] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1979. Т. 49. Вып. 10. С. 2176–2179.

[10] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1981. Т. 51. Вып. 11. С. 2250–2259.

[11] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* // ЖТФ. 1983. Т. 53. Вып. 12. С. 2329–2338.

[12] *Кузнецов В.И., Эндер А.Я.* Препринт ФТИ АН СССР. № 1061. Л., 1986.

[13] *Hatsopoulos G.N., Gyftopoulos.* Thermionic Energy Conversion. Vol. I. Processes and Devices. Vol. II. Theory, Technology and Application. MIT Press (Cambridge, MA and London), 1973, 1979.

[14] *Motley R.W.* Q-machines. New York; San Francisco; London: Academic Press, 1975.

[15] *Farouki R.T., Dalvie M., Pavarino L.F.* // J. Appl. Phys. 1990. Vol. 68. N 12. P. 6106–6116.