

01;05

©1994 г.

# ГИСТЕРЕЗИСНАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ И ГЕНЕРАЦИЯ ГАРМОНИК МАГНИТНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ: АНАЛИЗ СПЕКТРА ГАРМОНИК НАМАГНИЧЕННОСТИ НА ПРИМЕРЕ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

*Н. Д. Кузьмичев*

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева,  
430000, Саранск, Россия  
(Поступило в Редакцию, 18 февраля 1994 г.)

Получены формулы для действительных и мнимых частей амплитуд высших гармоник намагниченности в виде рядов Тейлора для коэффициентов Фурье в гистерезисном случае. Показано, что на основе полученных зависимостей можно усовершенствовать модуляционную методику измерения и применять ее для произвольных амплитуд модуляции. Выполнен качественный анализ экспериментальных кривых эдс гармоник сигнала отклика, полученных при исследовании  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  в модулированном магнитном поле, и выводится приближенная начальная кривая намагниченности. Развитую методику можно применять также для восстановления вольт-амперных и иных характеристик материалов.

## Введение

Хорошо известно, что реальные свойства магнитных материалов, например, высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) обладают сложным поведением. Так, слабые магнитные поля напряженностью  $H \leq 1$  Э проникают в ВТСП и их намагниченность является нелинейной функцией напряженности магнитного поля и обнаруживает гистерезис. Кроме того, захваченный образцом магнитный поток релаксирует.

В связи с этим возникает необходимость развития новой более детальной методики обработки экспериментальных данных по магнитным измерениям. Особый интерес представляют исследования магнитных свойств материалов путем обработки спектра гармоник сигнала отклика на модулированное магнитное поле. Как будет показано ниже, амплитуды гармоник указанного спектра содержат богатую информацию об аналитических свойствах и симметрии функции намагниченности  $M(H)$ .

Одним из наиболее распространенных методов исследования магнитных свойств ВТСП является исследование его отклика на внешнее постоянное и переменное магнитные поля по известной методике [1-4] с помощью "двухкатушечного" метода. При этом измеряется величина эдс отклика  $\varepsilon_t$ , которая пропорциональна скорости изменения намагниченности образца

$$\varepsilon_t = -\mu_0 N S \frac{dM}{dt}, \quad (1)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $N$  — число витков приемной (или равной компенсационной) катушки, внутри которой находится образец;  $S$  — площадь сечения катушки (образца);  $M$  — намагниченность образца, равная  $(1-\beta)M_\infty$ ,  $M_\infty$  — намагниченность бесконечно длинного цилиндра,  $\beta$  — фактор размагничивания образца ( $M_\infty$  и  $\beta$  являются функциями внешнего поля).

Магнитный момент и соответственно намагниченность образца ВТСП зависит от предистории его состояния, внешнего поля  $H$ , температуры  $T$  и времени  $t$ . Поэтому для обработки эксперимента и определения магнитных параметров образца необходимо разработать математический аппарат, учитывающий как воздействие двух магнитных полей  $H_-$  (постоянного)  $H_- \cos \omega t$  (переменного), так и гистерезис намагниченности. До сих пор в основном анализ магнитных свойств материалов основывался на сравнении экспериментальных зависимостей с соответствующими зависимостями, полученными из априорных теоретических моделей (см., например, [1,4]).

Для детального анализа функции  $M(H)$  нам поможет аппарат рядов Фурье и Тейлора.

### Коэффициенты Фурье для гистерезисной намагниченности

Известно, что при воздействии магнитного поля  $H = H_- + H_- \cos \omega t$  на образец ВТСП он откликается сигналом сложной формы, в составе которого имеются высшие гармоники с номерами  $n$  до 40 включительно и более. Их амплитуды в полях  $H_- > 10-20$  Э зависят от предистории состояния образца, т.е. обнаруживают гистерезис.

Как было отмечено во Введении,  $M \doteq M(H, T, t)$ . Рассмотрим случай фиксированной температуры  $T$  и частоты  $\omega$ , для которого справедливо  $2\pi/\omega \ll t_0$ , где  $t_0$  — некоторое характерное время релаксации магнитного момента. При этих условиях можно считать, что  $M = M(H_- + H_- \cos \omega t)$  и гистерезис обусловлен только захватом магнитного потока образцом, а не его релаксацией. Рассмотрим произвольную гистерезисную функцию намагниченности  $M(H)$  (рис. 1). При наложении на образец модулированного магнитного поля  $H = H_- + H_- \cos \omega t$  его намагниченность становится периодической функцией времени  $t$ .

Разложим намагниченность  $M$  в ряд Фурье, учитывая, что она включает в себя две ветви:  $M_-$  (убывающее поле) и  $M_+$  (возрастающее поле), т.е. ветвь  $M_-$  определяется моментами времени  $t$ , для которых  $0 \leq \omega t < \pi$ , а  $M_+$  —  $\pi \leq \omega t < 2\pi$ . Коэффициенты ряда Фурье

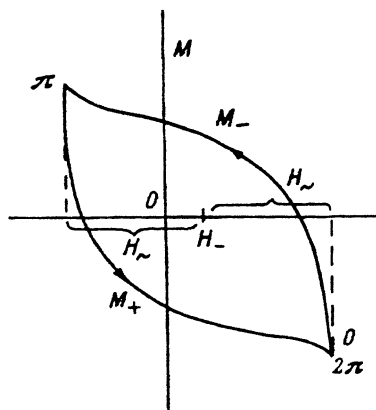


Рис. 1. Пример петли гистерезиса намагниченности для сверхпроводника.

$M_+$  — восходящая ветвь петли,  $M_-$  — нисходящая. Цикл намагниченности начинается с  $\omega t = 0$  и заканчивается для  $\omega t = 2\pi$ .

будут определяться по формулам

$$M'_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t) \cos(n\omega t) d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \right], \quad (2)$$

$$M''_n = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\pi M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t) \sin(n\omega t) d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \right]. \quad (3)$$

Используя свойства функций  $\cos(n\omega t)$ ,  $\sin(n\omega t)$  и  $M(\cos \omega t)$ , получим

$$M'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t) + M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t)}{2} \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (4)$$

ввиду того, что интервалы интегрирования  $(0, \pi)$  и  $(\pi, 2\pi)$  одинаковы для подынтегральных функций  $M_+$ ,  $M_-$  и  $\cos(n\omega t)$ .

Таким образом, мы получаем, что вклад в действительные части эдс гармоник сигнала отклика дает средняя кривая намагниченности

$$\bar{M} = \frac{M_+ + M_-}{2}. \quad (5)$$

Для мнимой части получается

$$M''_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [M_-(H_- + H_\sim \cos \omega t) - M_+(H_- + H_\sim \cos \omega t)] \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (6)$$

из-за того, что  $\sin(n\omega t) = \sin\omega t[\varphi_n(\cos\omega t)]$ , и поэтому мы вправе записать  $\sin(n\omega t)d(\omega t) = -\varphi_n(x)dx$ . Здесь  $\varphi_n$  — полином степени  $n$  от  $x = \cos(\omega t)$ .

Следовательно, в  $M_n''$  дает вклад только разность (разностная кривая) намагниченностей в возрастающем и убывающем полях

$$\Delta M = M_- - M_+. \quad (7)$$

Таким образом,  $M(t)$ , будет представлена рядом Фурье вида

$$M(t) = \frac{M_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [M_n' \cos(n\omega t) + M_n'' \sin(n\omega t)]. \quad (8)$$

ЭДС сигнала отклика определяется выражением (1) и равна

$$\varepsilon_t = -\mu_0 N S \omega \sum_{n=1}^{\infty} [-M_n' n \sin(n\omega t) + M_n'' n \cos(n\omega t)]. \quad (9)$$

Исходя из формул (4)–(7) можно сделать ряд выводов относительно функции  $M(H)$ . В отсутствие гистерезиса в  $M(H)$  имеем  $M_- = M_+$ , поэтому

$$M_n'' \equiv 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad M_n' \neq 0,$$

т.е. имеются только действительные амплитуды гармоник отклика

$$M_n' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(H_- + H_{\sim} \cos\omega t) \cos(n\omega t) d(\omega t). \quad (10)$$

В случае гистерезиса выпишем выражение для мнимой части первой гармоники

$$M_1'' = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (M_- - M_+) d[\cos(\omega t)] = \frac{1}{\pi H_{\sim}} \oint M(H) dH.$$

Преобразуя его в дальнейшем, получаем хорошо известное выражение

$$M_1' = \frac{\oint H dM}{\pi H_{\sim}} = \frac{Q}{\pi H_{\sim}}. \quad (11)$$

Здесь  $Q$  — энергия потерь на намагничивание образца за период поля. Мнимая часть второй гармоники намагниченности есть

$$M_2'' = \frac{2}{\pi H_{\sim}^2} \oint H M dH. \quad (12)$$

## Ряды Тейлора для коэффициентов Фурье намагниченности

В работе [5] получено для случая действительной функции  $M(H)$  и в отсутствие гистерезиса разложение  $M(H_- + H_\sim \sin \omega t)$  в ряд Тейлора с помощью подсчета числа комбинаций в  $\sin^n(\omega t)$  из  $\sin(k\omega t)$

$$M(H_- + H_\sim \cos \omega t) = \frac{M'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} M'_n \cos(n\omega t),$$

$$M'_n = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{H_\sim}{2}\right)^{2m+n} M^{(2m+n)}(H_-). \quad (13)$$

Здесь  $M^{(2m+n)}(H_-)$  — производные порядка  $2m+n$  от  $M$  в точке  $H_-$ . Мнимые гармоники отсутствуют, т.е.  $M''_n \equiv 0$ . Таким образом, опять же приходим к выводу, что отсутствие гистерезиса в  $M(H)$  приводит к нулевым амплитудам мнимых частей гармоник. Формулу (13) можно получить из выражений (4) и (6) при разложении  $M(H_- + H_\sim \cos \omega t)$  в ряд Тейлора и Фурье в точке  $H = H_-$  путем вычисления интегралов типа

$$\int_0^{2\pi} \cos^m(\omega t) \cos(n\omega t) d(\omega t).$$

Указанные интегралы вычислены в [6, с.187]. Для гистерезисного случая выражения для  $M'_n$  и  $M''_n$  будут иметь вид

$$M'_n = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{H_\sim}{2}\right)^{2m+n} \left(\frac{M_+(H_-) + M_-(H_-)}{2}\right)^{(2m+n)} \quad (14)$$

Здесь, как и в (13),  $M^{(k)}(H_-)$  — производная порядка  $k$  при  $H = H_-$

$$M''_{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [M_-(H_-) + M_+(H_-)]^{(2m+1)} \frac{H_\sim^{2m+1}}{(2m+1)!} S(2m+1, 2n),$$

$$M''_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [M_-(H_-) - M_+(H_-)]^{(2m)} \frac{H_\sim^{2m}}{(2m)!} S(2m, 2n+1), \quad (15)$$

где

$$S(m, n) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!(n+m-2j-2)!!}{(m-j)!(n+m)!!}, \quad (16)$$

$k!! = 1, 3, 5, \dots$  для нечетных  $k$  и  $k!! = 2, 4, 6, \dots$  для четных  $k$   
 $0!! = (-1)!! = 1$ .

Следует отметить, что вычисление суммы  $S$  нужно выполнять в общем виде для произвольного  $m$  и окончательная формула будет справедлива для любых  $m$  (т.е.  $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Выпишем явные выражения суммы  $S(m, n)$  для  $n = 1, 2, 3$  и  $4$

$$S(m, 0) = 0,$$

$$S(m, 1) = \frac{1}{m+1},$$

$$S(m, 2) = \frac{2}{m+2},$$

$$S(m, 3) = \frac{4}{m+3} - \frac{1}{m+1} = \frac{3m+1}{(m+3)(m+1)},$$

$$S(m, 4) = -\frac{4}{m+2} + \frac{8}{m+4} = \frac{4m}{(m+2)(m+4)}.$$

При получении выражения (15) возникают интегралы типа

$$\int_0^{\pi} \cos^m(\omega t) \sin(n\omega t) d(\omega t),$$

которые в общем случае приведены в [8] и с необходимыми поправками получены в настоящей работе.

Для дальнейшего анализа выпишем в явном виде выражения действительной и мнимой частей 1-й и 2-й гармоник намагниченности

$$M_1' = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+1)!} \left(\frac{H_{\sim}}{2}\right)^{2m+1} \left[ \frac{M_+(H_-) + M_-(H_-)}{2} \right]^{(2m+1)},$$

$$M_1'' = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [M_-(H_-) - M_+(H_-)]^{(2m)} \frac{H_{\sim}^{2m}}{(2m+1)!}. \quad (17)$$

Следует обратить внимание, что выражение (17) для  $M_1''$  равно

$$M_1'' = \frac{1}{\pi H_{\sim}} \oint M(H) dH,$$

как того требует выражение (11);

$$M_2' = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+2)!} \left(\frac{H_{\sim}}{2}\right)^{2m+2} \left[ \frac{M_+(H_-) + M_-(H_-)}{2} \right]^{(2m+2)}$$

$$M_2'' = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{\sim}^{2m+1}}{(2m+1)!(2m+3)!} [M_-(H_-) - M_+(H_-)]^{(2m+1)} \quad (18)$$

Здесь также

$$M_2'' = \frac{2}{\pi H_{\sim}^2} \oint H M dH,$$

как следует из (12).

Выражения (13)–(18) справедливы в области сходимости ряда Тейлора в точке  $H_-$ , т.е.  $H_{\sim} < H_0$ , где  $H_0$  — радиус сходимости ряда. В области расходимости ряда Тейлора–Фурье необходимо пользоваться интегральными выражениями (4) и (6) для коэффициентов ряда Фурье.

Рассмотренные зависимости и выражения справедливы для любых зависимостей  $M(H)$  или для других гистерезисных физических величин, например для поляризации сегнетоэлектриков, I-V характеристики и др.

Рассмотрим гистерезисную  $M(H)$  с нечетной симметрией при  $H_- = 0$ . При этом должно выполняться условие  $M(H) = -M(-H)$ . Данное условие справедливо для ферромагнетиков в ВТСП [4,7,9] (рис. 2).

Рассмотрим петлю гистерезиса для любых  $H_{\sim}$  и  $H_- = 0$ . Для этого случая, используя формулы (14) и (15), получаем

$$M'_{2n+1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+2n+1)!} \left(\frac{H_{\sim}}{2}\right)^{2m+2n+1} M(0)^{2m+2n+1}, \quad M'_{2n} \equiv 0; \quad (19)$$

$$M''_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} M(0)^{(2m)} \frac{H_{\sim}^{2m}}{(2m)!} S(2m, 2n+1), \quad M''_{2n} \equiv 0. \quad (20)$$

Здесь  $M(0)^{(k)} = M_+(0)^{(k)}$ , так как для этого случая  $M_+^{(2k+1)} + M_-^{(2k+1)} = 2M_+^{(2k+1)}$ , а  $M_+^{(2k)} + M_-^{(2k)} = 0$ . Кроме того,  $S(2m, 2n+1)$  определяется выражением (16), а  $M_+^{(2k)} - M_-^{(2k)} = 2M(0)^{(2k)}$  и  $M_+^{(2k+1)} - M_-^{(2k+1)} = 0$ .

Таким образом, в случае нечетно-симметричной  $M(H)$  четные гармоники отсутствуют при  $H_- = 0$ , а вклад  $M'_{2n+1}$  дают нечетные производные от  $M$ , начиная с  $M(0)$ ,  $M(2)$ , и т.д. Ввиду отмеченных свойств кривой  $M(H)$  можно извлечь значительную информацию о ее виде исходя из вида гармоник отклика и их зависимостей от  $H_-$  и  $H_{\sim}$ .

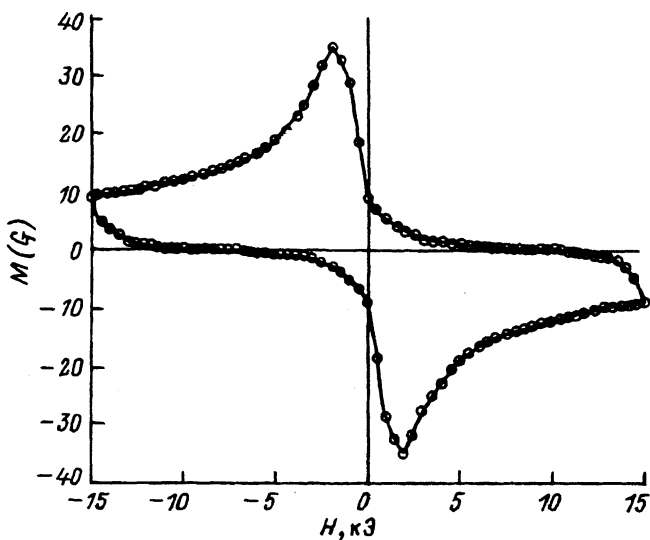


Рис. 2. Типичная кривая  $M(H)$  для поликристаллического  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  [9]. Выполняется условие нечетной симметрии, т.е.  $M(H) = -M(-H)$ .

## Модуляционная методика измерения кривой $M(H)$ в случае гистерезиса для малых $H_{\sim}$

Используя выражения (14) и (17) для первой гармоники, выпишем первые три члена разложения

$$M'_1 = H_{\sim} \overline{M(H_-)}^{(1)} + \left(\frac{H_{\sim}}{2}\right)^3 \overline{M(H_-)}^{(3)} + \frac{1}{6} \left(\frac{H_{\sim}}{2}\right)^5 \overline{M(H_-)}^{(5)} + \dots,$$

$$M''_1 = \frac{2}{\pi} \Delta M(H_-) + \frac{H_{\sim}^2}{3\pi} \Delta M(H_-)^{(2)} + \frac{H_{\sim}^4}{60\pi} \Delta M(H_-)^{(4)} + \dots \quad (21)$$

Для малых  $H_{\sim}$  можно оставить первые члены разложения

$$M'_1 \approx H_{\sim} \frac{d}{dH} \left( \frac{M_+ + M_-}{2} \right), \quad M''_1 \approx \frac{2}{\pi} (M_- - M_+). \quad (22)$$

Таким образом, мы получили, что мнимая часть  $M''_1$  при малых  $H_{\sim}$  практически не зависит  $H_{\sim}$ , а  $M'_1$  линейно зависит  $H_{\sim}$  и производной полусуммы верхней и нижней кривых намагниченности. Из рис. 3 видно, что если  $M''_1 \ll M'_1$ , то гистерезисом можно пренебречь и принять, что средняя кривая  $(M_+ + M_-)/2$  с хорошей точностью определяет начальную кривую намагниченности, производная которой содержится в амплитуде реальной части первой гармоники сигнала отклика. Таким образом, измеряя зависимости  $M'_1$  и  $M''_1$  при малых  $H_{\sim}$  при сканировании поля  $H_-$ , можно определить начальную кривую намагниченности. Учитывая высшие гармоники сигнала отклика, которые содержат производные более высших порядков, можно еще точнее восстановить  $M(H)$ . Зная аналитическую зависимость  $M(H)$ , определяются возможные физические механизмы, приводящие к таким функциям.

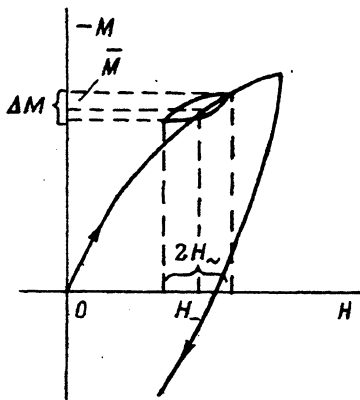


Рис. 3. Петля гистерезиса для малых  $H_{\sim}$  при медленном сканировании  $H_-$ .

Видно, что  $\overline{M}$  почти лежит на начальной  $M(H)$ , величина  $\Delta M$  — мала.



Рассмотрим экспериментальные зависимости амплитуд гармоник сигнала отклика  $\varepsilon_{n\omega} = \sqrt{(\varepsilon'_{n\omega})^2 + (\varepsilon''_{n\omega})^2}$  от  $H_-$  и  $H_\sim$  ( $n = 2, \dots, 5$ ) для керамического образца  $\text{YBa}_2\text{Cu}_2\text{O}_{7-x}$ , имеющего форму короткого цилиндра [10-12], которые приведены соответственно на рис. 4 и 5.

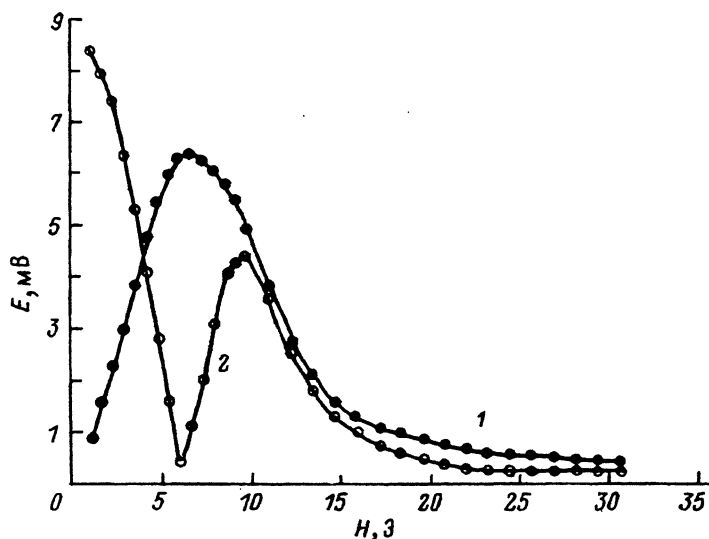


Рис. 4. Зависимость амплитуд эдс второй (1) и третьей (2) гармоник сигнала отклика от величины постоянного поля  $H_-$  для  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  [11,12].

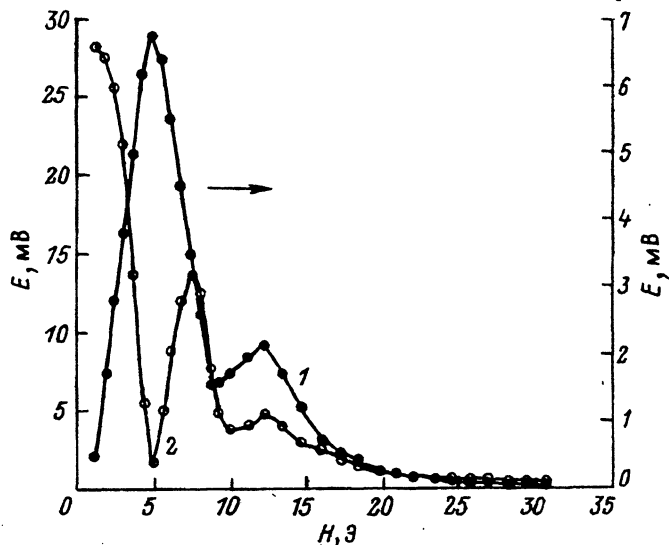


Рис. 5. Зависимость амплитуд эдс четвертой (1) и пятой (2) гармоник сигнала отклика от величины постоянного поля  $H_-$  для  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$  [11,12]. Правая ось  $E$  относится к четвертой гармонике.

Проанализируем данные результаты.

1) На рис. 4 и 5 видно, что при  $H_- = 0$  четные гармоники практически отсутствуют. В силу формул (19) и (20) заключаем, что гистерезисная петля обладает нечетной симметрией.

2) Провалы в зависимостях  $\varepsilon_{n\omega}(H_-)$  не достигают нулевого значения, хотя и очень глубокие. Это указывает на незначительный гистерезис в  $M(H)$  из-за присутствия в  $\varepsilon_{n\omega}$  мнимой части  $\varepsilon''_{n\omega}$ , малой по сравнению с реальной частью  $\varepsilon'_{n\omega}$ .

3) Присутствие высших гармоник с номерами  $n$  до 40 и более в силу (19) и  $\varepsilon'_{n\omega} \ll \varepsilon''_{n\omega}$  указывает на то, что имеются отличные от нуля высшие производные от  $M(H)$  порядка 40 и более. Данный факт с учетом пункта 2 отражает транспедентность функции  $M(H)$ .

4) В действительную часть амплитуды  $n$ -й гармоники намагниченности  $M'_n$  наибольший вклад дает  $n$ -я производная (см. выражение (19)). Далее, в нечетные  $M'_n$  дают вклад нечетные производные, а в четные  $M'_n$  — четные производные. Осцилляции высших гармоник  $M'_n$  при сложении вкладов от  $n + 1, n + 2, \dots$  производных сильно сглаживаются. В итоге зависимость  $M_n(H_-)$  качественно напоминает  $n$ -ю производную от  $\overline{M(H)}$ .

5) Из рис. 4 и 5 видно, что выше 30 Э амплитуды гармоник сигнала отклика спадают практически до нуля. Это означает, что производные выше первой от  $M(H)$  стремятся к нулю выше 30 Э, и что сама  $\overline{M(H)}$  стремится по крайней мере к линейной зависимости. Если  $\varepsilon'_{1\omega} \rightarrow 0$ , то  $\overline{M(H)}$  будет стремиться к насыщению.

Таким образом, зная экспериментальный спектр гармоник сигнала отклика и зависимости амплитуд гармоник  $\varepsilon_{n\omega}$  от постоянного поля  $H_-$ , можно извлечь значительную информацию о свойствах функции  $M(H)$ . Информацию можно значительно пополнить, если использовать еще и зависимости по отдельности  $\varepsilon'_{n\omega}(H_{\sim})$  и  $\varepsilon''_{n\omega}(H_{\sim})$  от амплитуды переменного поля  $H_{sim}$ .

Учитывая качественный анализ экспериментальных кривых, приведенных на рис. 4 и 5, можно сделать вывод, что начальная кривая намагниченности (поле возрастает от нуля до  $H$ )  $M(H)$  по свойствам очень близка к выражению

$$M(H) = aH + M_0 \operatorname{th} \left( \frac{H}{H_0} \right),$$

где  $a, M_0$  и  $H_0$  — некоторые параметры.

Эти зависимости уже использовались для описания спектра гармоник в работе [13], исходя из модели джозефсоновских контуров для межгранулярной среды. Захват магнитного потока образцом и соответственно гистерезис в этой работе не учитывались.

Использовались и другие зависимости [4,14,15], которые довольно хорошо описывает начальную кривую намагниченности, но физические механизмы в некоторых случаях сильно отличаются.

Для решения задачи восстановления аналитической зависимости  $M(H)$  требуется детальный количественный анализ экспериментальных кривых для  $M'_n$  и  $M''_n$  с использованием расчетных формул (4), (6)

и их представления в виде рядов Тейлора (14) и (15). Задача восстановления аналитической зависимости  $M(H)$  в общем случае является некорректной в силу неоднозначности и неустойчивости. Учет амплитуд высших гармоник  $M(H)$ , содержащих в себе высшие производные от  $M(H)$  в количественном соотношении, определяемом вышеприведенными формулами при соответствующей аппроксимации хотя бы одной из амплитуд  $M_n$ , делает задачу относительно корректной.

Для сравнения проанализируем  $M(H)$ , полученную теоретически для ВТПС пленок исходя из модели критического состояния [4],

$$\overline{M(H)} = -M_0 \exp(-X_{\sim}) \operatorname{sh} X,$$

$$\Delta M(H) = -2M_0 \exp(-X_{\sim})(\operatorname{ch} X - \operatorname{ch} X_{\sim}).$$

Здесь  $M_0 = (H^* r^3)/2$ ,  $H^*$  — внешнее поле, при котором оно достигает центра образца;  $X_{\sim} = H_{\sim}/H^*$ ;  $H_{\sim}$  — амплитуда переменного поля;  $H$  — текущее поле ( $-H_{\sim} \leq H \leq H_{\sim}$ ). Используя формулы (14) и (15) для  $H_- = 0$ , получим

$$\begin{aligned} M'_{2n+1} &= -4M_0 \exp(-X_{\sim}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+2n+1)!} \left(\frac{X_{\sim}}{2}\right)^{2m+2n+1} = \\ &= -4M_0 \exp(-X_{\sim}) I_{2n+1}(X_{\sim}), \end{aligned}$$

где  $I_{2n+1}(X_{\sim})$  модифицированная функция Бесселя (мнимого аргумента)  $(2n+1)$ -го порядка.

К такому же результату мы придем, если будем непосредственно вычислять интегралы по формуле (4). Для  $M''_{2n+1}$  при  $H_- = 0$  получается

$$M''_{2n+1} = -\frac{4}{\pi} M_0 \exp(-X_{\sim}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X_{\sim}^{2m}}{(2m)!} S(m, 2n+1).$$

Выражение для  $M''_1$ , представленное через элементарные функции, выглядит, как и в [14],

$$M''_1 = -\frac{4}{\pi} M_0 \exp(-X_{\sim}) \left( \frac{\operatorname{sh} X_{\sim}}{X_{\sim}} - \operatorname{ch} X_{\sim} \right).$$

### Заключение

В работе получены формулы для действительных и мнимых частей амплитуд гармоник намагниченности в виде рядов Тейлора для коэффициентов Фурье (14)–(16) в случае гистерезиса. Коэффициенты Фурье  $M_n$  являются функциями  $H_-$  и  $H_{\sim}$ .

Показано, что на основе разработанного аппарата можно усовершенствовать хорошо известную модуляционную методику и применить ее для гистерезисного случая (см. формулы (21) и (22)), не ограничивая амплитуду модуляции.

Выполнен качественный анализ экспериментальных кривых  $\varepsilon_{nw} \propto \times |M_n(H_-)|$  ( $N = 2, 3, 4, 5$ ) для ВТПС  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  и, исходя из анализа, выводится приближенная начальная кривая намагниченности  $M(H)$  для  $H < 30$  Э.

Развитую выше методику можно применять для восстановления I-V характеристик различных материалов, а также для восстановления других зависимостей.

### Список литературы

- [1] *Jeffries C., Lam Q., Kim Y. et al.* // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 37. N 16. P. 9840-9843.
- [2] *Park K., Kim J., Park J.* // Sol. St. Commun. 1989. Vol. 71. N 9. P. 743-736.
- [3] *Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Левченко И.С. и др.* // ФТТ. 1989. Т. 31. Вып. 4. С. 233-235.
- [4] *Sun J., Scharen M., Bourne L. et al.* // Phys. Rev. B. 1991. Vol. 44. N 10. P. 5275-5279.
- [5] *Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 7. С. 56-60.
- [6] *Делит Г.Б.* Таблицы интегралов. М.: Наука, 1977. 224 с.
- [7] *Мейлизов Е.З.* // СФХТ. 1989. Т. 2. № 9. С. 5-29.
- [8] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
- [9] *Georgy E., van Dover R., Jin S. et al.* // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 53. N 22. P. 2223-2225.
- [10] *Васютин М.А., Кузьмичев Н.Д.* // Письма в ЖТФ. 1992. М. 18. Вып. 23. С. 5-9.
- [11] *Кузьмичев Н.Д., Слаевкин В.В.* // Деп. в ВИНТИ. 1991. № 797-В91. 12 с.
- [12] *Головашкин А.И., Кузьмичев Н.Д., Левченко И.С. и др.* // Препринт. № 163. М., 1990. 38 с.
- [13] *Jeffries C., Lam Q., Kim Y. et al.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 39. N 16. P. 11526-11527.
- [14] *Lam Q., Kim Y., Jeffries C.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42. N 7. P. 4846-4849.
- [15] *Ishida T., Goldfarb R.* // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 41. N 13. P. 8937-8948.