1995 ЖУРНАЛ ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ Том 65, в. 3
1995 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 65, N 3

01;09

О СВЯЗИ МЕЖДУ ЧАСТОТНЫМИ И ФАЗОВЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

В.Б.Зоммер

Морской технический университет,
190008, Санкт-Петербург, Россия
(Поступило в Редакцию 25 октября 1993 г.
В окончательной редакции 25 апреля 1994 г.)

Рассмотрены параметрические частотные характеристики линейных импульсных систем, широко применяемые при исследовании динамики таких систем в непрерывном времени. Приведены функциональные соотношения, связывающие между собой интегральные и параметрические частотные характеристики произвольной линейной импульсной системы. Для параметрических частотных характеристик причинно обусловленной линейной импульсной системы получены дисперсионные соотношения типа Крамерса–Кронига, устанавливающие соответствие между вещественной и мнимой, а также между амплитудной и фазовой параметрическими частотными характеристиками.

Введение

При исследовании динамики линейных импульсных систем в непрерывном времени большое значение имеют параметрические частотные характеристики [1,2]. С точки зрения моделей типа вход–выход для линейных импульсных систем как с сосредоточенными, так и с распределенными параметрами эти характеристики являются исчерпывающими системными характеристиками, которые в случае асимптотической устойчивости соответствующей системы могут быть определены экспериментальным путем [2,3]. Существенной особенностью экспериментального определения параметрических частотных характеристик (ПЧХ) в отличие от соответствующих частотных характеристик линейных стационарных систем является то, что параметрические вещественная и мнимая частотные характеристики определяются в процессе эксперимента практически одновременно, причем экспериментальное определение одной из этих характеристик оказывается не более сложным, чем другой. С другой стороны, в силу сложного (квазипериодического) характера реакции линейной импульсной системы на гармоническое возмущающее воздействие непосредственно экспериментальное определение как амплитудной, так и фазовой ПЧХ оказывается в большинстве случаев затруднительным. Напомним, что при экспериментальном исследовании линейных стационарных систем часто встречаются случаи, когда легко может быть определена какая-либо одна из частотных характеристик системы — амплитудная или фазовая, а определение второй характеристики затруднительно. При этом большое практическое значение приобретает тот факт, что амплитудная и фазовая, а также вещественная и мнимая частотные характеристики причинно обусловленной линейной стационарной системы являются взаимозависимыми функциями и, зная какую-либо одну из них, с помощью известных соотношений [4,5] можно восстановить другую. Как будет показано далее, соответствующие ПЧХ линейных импульсных систем также являются при определенных условиях взаимозависимыми функциями. При этом вследствие особенностей экспериментального метода соотношения, связывающие между собой вещественную и мнимую ПЧХ, служат преимущественно для верификации результатов соответствующих экспериментов. Необходимость последней обусловливается тем, что на практике вследствие неидеальности технических устройств и ряда других хорошо известных причин при определенных условиях эксперимент по определению ПЧХ может оказаться критическим [3] и соответствующие ПЧХ исказятся. Тогда наличие и величина методических погрешностей могут быть определены с помощью упомянутых выше соотношений, которые будут играть в этом случае роль критерия корректности эксперимента. В следующих разделах данной работы устанавливаются соотношения, связывающие между собой параметрические вещественную и мнимую, амплитудную и фазовую частотные характеристики линейных импульсных систем, аналогичные соответствующим формулам теории стационарных систем, а также некоторые дополнительные соотношения, обусловленные внутренней структурой параметрических частотных характеристик.

Параметрические частотные характеристики линейных импульсных систем

Математической моделью широкого класса линейных импульсных систем являются линейные импульсные периодические операторы $\mathcal{L}_T$ [6], действующие в пространстве функций $f(t)$, определенных при $-\infty < t < \infty$, и такие, что действительны соотношения

$$y(t) = \mathcal{L}_T\Big\{x(t)\Big\}, \qquad y(t-T) = \mathcal{L}_T\Big\{x(t-T)\Big\}. \tag{1}$$

При этом если $x(t) = f(t)r(t)$, $r(t+T) = r(t)$, $\tilde{x}(t) = f(t)r(+0)$, то

$$y(t) = \mathcal{L}_T\Big\{x(t)\Big\} = \mathcal{L}_T\Big\{\tilde{x}(t)\Big\},$$

где x, $\tilde{x}$, y — процессы на входе и выходе системы соответственно; T — период системы.

Оператору $\mathcal{L}_T$ можно сопоставить так называемую параметрическую передаточную функцию (ППФ) $W(p,t)$, определяемую по формулам

$$W(p,t) = \mathcal{L}_T \left\{ e^{pt} \right\} e^{-pt}, \qquad W(p,t+T) = W(p,t), \tag{2}$$

где p — комплексная переменная.

При этом если

$$X(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-pt} dt$$

— это преобразование Лапласа [7] процесса на входе системы, то в соответствующей области сходимости процесс на выходе определяется формулой [6]

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(p,t) X(p) e^{pt} dp. \tag{3}$$

При переходе комплексной переменной p на мнимую ось $p = j\nu$, ν — вещественное число ($-\infty < \nu < \infty$), интеграл (3) приводится к виду

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\nu, t) X(j\nu) e^{j\nu t} d\nu. \tag{4}$$

В интеграле (4) фигурирует функция

$$\Phi(j\nu, t) = W(p,t)\Big|_{p=j\nu}, \qquad \Phi(j\nu, t+T) = \Phi(j\nu, t), \tag{5}$$

которую по аналогии с теорией стационарных систем естественно назвать параметрической частотной характеристикой. При этом интеграл (4) напоминает аналогичную формулу теории стационарных систем и отличается от нее только наличием аргумента t в функции $\Phi(j\nu, t)$. Если ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$ известна, то соотношение (4) может быть использовано для исследования переходных и установившихся процессов в линейных импульсных системах аналогично использованию соответствующих формул теории стационарных систем. Физический смысл ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$ определяется вытекающим из (2), (5) соотношением [2]

$$Y(j\nu, t) = \Phi(j\nu, t) e^{j\nu t},$$

где $Y(j\nu, t)$ — установившаяся реакция линейной импульсной системы на гармонический входной сигнал $X(j\nu, t) = e^{j\nu t}$.

При этом функции $P(\nu, t) = \operatorname{Re} \Phi(j\nu, t)$ и $Q(\nu, t) = \operatorname{Im} \Phi(j\nu, t)$ естественно назвать вещественной и мнимой, а функции $A(\nu, t) = |\Phi(j\nu, t)|$ и $\varphi(\nu, t) = \arg \Phi(j\nu, t)$ амплитудной и фазовой параметрическими частотными характеристиками соответственно.

Связь между вещественной и мнимой параметрическими частотными характеристиками линейных импульсных систем

Покажем, что если линейная импульсная система причинно обусловлена, то аналогично стационарному случаю вещественная и мнимая ПЧХ являются взаимозависимыми функциями. Имеет место теорема.

Т е о р е м а 1. Вещественная $P(\nu,t)$ и мнимая $Q(\nu,t)$ параметрические частотные характеристики причинно обусловленной линейной импульсной системы в любой момент времени t связаны между собой в частотной области преобразованиями Гильберта

$$Q(\nu,t) = \mathcal{L}_\nu\Big\{P(\nu,t)\Big\}, \qquad P(\nu,t) = -\mathcal{L}_\nu\Big\{Q(\nu,t)\Big\}, \tag{6}$$

где $\mathcal{L}_\nu$ — это оператор Гильберта

$$\mathcal{L}_\nu\Big\{f(\nu,t)\Big\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(u,t)}{u-\nu}du$$

и соответствующий интеграл при $u=\nu$ понимается в смысле главного значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Назовем, следуя [6], импульсной характеристикой линейного периодического импульсного оператора $\mathcal{L}_T$ функцию

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}\tilde{W}(p)e^{pt}dp, & t>0,\\ 0, & t<0. \end{cases} \tag{7}$$

Процесс на выходе системы, описываемой оператором $\mathcal{L}_T$, выражается через импульсную характеристику следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT+0)h(t-kT).$$

В соотношении (7) функция $\tilde{W}(p)$ — это интегральная передаточная функция (ИПФ) оператора $\mathcal{L}_T$

$$\tilde{W}(p) = \int\limits_0^T W(p,t)dt.$$

При этом ППФ этого оператора определяется суммой ряда Фурье

$$W(p,t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{W}(p+kj\omega)e^{kj\omega t}, \qquad \omega = 2\pi/T. \tag{8}$$

Далее ограничимся рассмотрением нерезонансного случая, когда ИПФ $\tilde{W}(p)$ не имеет особенностей в точках $p = kj\omega$. Из (5), (8) для ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$ имеем

$$\Phi(j\nu, t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(j\nu + kj\omega) e^{kj\omega t}, \qquad \omega = 2\pi/T, \tag{9}$$

где

$$\tilde{\Phi}(j\nu) = \tilde{W}(p)\Big|_{p=j\nu} \tag{10}$$

— интегральная частотная характеристика (ИЧХ) оператора $\mathcal{L}_T$.

Используя соотношение (7), формулу (9) можно привести к виду

$$\Phi(j\nu, t) = \int_0^\infty \hat{h}(t, \tau) \cos \nu\tau d\tau - j \int_0^\infty \hat{h}(t, \tau) \sin \nu\tau d\tau = P(\nu, t) + jQ(\nu, t), \tag{11}$$

где

$$\hat{h}(t, \tau) = h(\tau) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{kj\omega(t-\tau)}.$$

Отметим, что вследствие (7) интегралы в (11) хорошо определены и сходятся равномерно относительно параметра t. Тогда, в силу того что функция $P(\nu, t)$ — это косинус-преобразование Фурье функции $\hat{h}(t, \tau)$, имеем

$$\hat{h}(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(u, t) \cos u\tau du. \tag{12}$$

Из (11), (12) следует, что

$$Q(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \sin(u - \nu)\tau P(u, t) du, \tag{13}$$

где учтено, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \nu\tau d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \sin u\tau P(u, t) du = 0.$$

Изменяя в (13) порядок интегрирования, переходя к пределу и вычисляя интеграл по τ, получим, что

$$Q(\nu, t) = \lim_{\lambda \to \infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda\vartheta}{\vartheta} \Big(P(\nu + \vartheta, t) - P(\nu - \vartheta, t) \Big) d\vartheta \right\},$$

где принято обозначение $\vartheta = u - \nu$.

Предполагая далее, что вещественная ПЧХ $P(\nu, t)$ является достаточно гладкой функцией частоты ν, получим

$$Q(\nu, t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{P(\nu+\vartheta, t) - P(\nu-\vartheta, t)}{\vartheta} d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u, t)}{u-\nu} du. \tag{14}$$

Используя теперь известное свойство преобразований Гильберта $\mathcal{H}_\nu\{\mathcal{H}_\nu\{f(\nu, t)\}\} = -f(\nu, t)$ [8], из (14) немедленно получаем вторую из формул (6).

Из теоремы 1 следует, что в любой момент времени параметрическая частотная характеристика $\Phi(j\nu, t)$ причинной линейной импульсной системы остается аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной плоскости или, что эквивалентно, все полюсы параметрической передаточной функции $W(p, t)$ остаются в левой полуплоскости плоскости комплексной переменной p. В случае, когда интегральная передаточная функция $\tilde{W}(p)$ является дробно-рациональной функцией комплексной переменной p, имеет место более сильное утверждение: полюсы ППФ $W(p, t)$ в этом случае не зависят от t [9] и области аналитичности ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$ не меняются со временем t.

Для дальнейшего важно, что ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$ является функцией двух переменных — частоты ν и времени t, причем величина ПЧХ определяется суммой ряда Фурье по переменной t (9). Используя последнее обстоятельство для параметрических частотных характеристик, можно получить некоторые дополнительные соотношения, не связанные непосредственно со свойствами причинности или аналитичности. Имеют место следующие результаты.

Т е о р е м а 2. Между параметрической частотной характеристикой $\Phi(j\nu, t)$ линейной импульсной системы и соответствующей интегральной частотной характеристикой $\tilde{\Phi}(j\nu)$ имеется зависимость, выражаемая формулой

$$\frac{1}{T}\tilde{\Phi}(j\nu) = \Phi(j\nu, t) + j\mathcal{H}_t\Big\{\Phi(j\nu, t)\Big\}, \tag{15}$$

где $\mathcal{H}_t$ — это оператор Гильберта, действующий во временно́й области

$$\mathcal{H}_t\Big\{f(j\nu, t)\Big\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f(j\nu, t)}{\tau - t} d\tau,$$

и соответствующий интеграл при $\tau = t$ понимается в смысле главного значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим преобразование Гильберта ПЧХ $\Phi(j\nu, t)$

$$\mathcal{H}_t\Big\{\Phi(j\nu, t)\Big\} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau - t}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(j\nu + kj\omega) e^{kj\omega\tau} d\tau. \tag{16}$$

При $\tau = t$ интеграл в (16) понимается в смысле главного значения, а именно

$$\mathcal{H}_t\Big\{\Phi(j\nu,t)\Big\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{1}{\tau - t}\,\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(j\nu + kj\omega)e^{kj\omega\tau}d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{1}{\tau - t}\,\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(j\nu + kj\omega)e^{kj\omega\tau}d\tau\Bigg\}. \qquad (17)$$

Так как любой ряд Фурье, умноженный на функцию ограниченной вариации, можно почленно интегрировать в любых пределах [10], то в (17) операции суммирования и интегрирования можно поменять местами. Тогда, учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{d\tau}{\tau - t} + \int\limits_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau - t} = 0, \qquad (18)$$

из (17) получим

$$\mathcal{H}_t\Big\{\Phi(j\nu,t)\Big\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg\{\frac{1}{\pi T}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\tilde{\Psi}(j\nu + kj\omega)\Bigg(\int\limits_{\infty}^{t-\varepsilon}\frac{e^{kj\omega\tau}}{\tau - t}d\tau + \int\limits_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{kj\omega\tau}}{\tau - t}d\tau\Bigg)\Bigg\}. \qquad (19)$$

Используя свойство линейности преобразований Гильберта, а также известные соотношения [8] $\mathcal{H}_t\{\sin\nu t\} = \cos\nu t$, $\mathcal{H}_t\{\cos\nu t\} = -\sin\nu t$, из (19) легко получить, что

$$\mathcal{H}_t\Big\{\Phi(j\nu,t)\Big\} = \frac{j}{T}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k\neq 0}}^{\infty}\tilde{\Phi}(j\nu + kj\omega)e^{kj\omega t} = j\Phi(j\nu,t) - \frac{j}{T}\tilde{\Phi}(j\nu). \qquad (20)$$

Умножая левую и правую части (20) на j, приходим к (15).

Т е о р е м а 3. Если импульсная характеристика $h(t)$ линейной импульсной системы удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |h(t)| \leqslant M, \qquad t \geqslant +0,\\ |h(t) - h(t')| \leqslant M_1|t - t'|^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,\\ h(t) = 0, \qquad t < 0, \end{gathered} \qquad (21)$$

то вещественная $P(\nu,t)$ и мнимая $Q(\nu,t)$ параметрические частотные характеристики являются асимптотически ортогональными функциями по временно́й переменной t на периоде T системы и имеет место соотношение

$$\int\limits_0^T P(\nu,t)Q(\nu,t)dt = O(\nu^{-2-2\alpha}), \qquad \nu\to\infty. \qquad (22)$$

Доказательство. Из (15) легко получить, что

$$Q(\nu,t) = \frac{1}{T}Q(\nu) - \mathcal{H}_t\Big\{P(\nu,t)\Big\}. \tag{23}$$

Умножая левую и правую части (23) на $P(\nu,t)$ и интегрируя по времени от нуля до T, имеем

$$\int\limits_0^T P(\nu,t)Q(\nu,t)dt = \frac{1}{T}\tilde{P}(\nu)\tilde{Q}(\nu), \tag{24}$$

где учтено, что из условия периодичности (5) и свойства ортогональности преобразований Гильберта [8]

$$\int\limits_0^T P(\nu,t)\mathcal{H}_t\Big\{P(\nu,t)\Big\}dt = 0$$

$$\int\limits_0^T P(\nu,t)dt = \tilde{P}(\nu).$$

Можно показать, что если импульсная характеристика $h(t)$ удовлетворяет условиям (21), то для интегральной передаточной функции $\tilde{W}(p)$ имеет место оценка [11]

$$\tilde{W}(p) = O\left(|p|^{-\alpha-1}\right), \qquad \mathrm{Re}\, p \geqslant 0, \qquad p \to \infty,$$

или на мнимой оси

$$\tilde{\Phi}(j\nu) = O(\nu^{-\alpha-1}), \qquad \nu \to \infty. \tag{25}$$

Из (24), (25) формула (22) следует непосредственно.

Связь между амплитудной и фазовой параметрическими частотными характеристиками линейных импульсных систем

Параметрическая частотная характеристика $\Phi(j\nu,t)$ может быть представлена в виде

$$\Phi(j\nu,t) = A(\nu,t)e^{j\varphi(\nu,t)}, \tag{26}$$

где $A(\nu,t)$ — амплитудная, а $\varphi(\nu,t)$ — фазовая параметрические частотные характеристики. Заметим, что так как импульсная характеристика $h(t)$ (7) не является ни четной, ни нечетной функцией, то соответствующие интегралы в (11) не могут одновременно равняться нулю и, следовательно, амплитудная характеристика $A(\nu,t)$ ни при каких ν, t не равна нулю, за исключением тривиального случая $h(t) \equiv 0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\ln \Phi(j\nu, t) = \ln A(\nu, t) + j\varphi(\nu, t), \tag{27}$$

которую естественно назвать логарифмической параметрической частотной характеристикой (ЛПЧХ). Действительна следующая теорема.

Теорема 4. Логарифмическая амплитудная $\ln A(\nu, t)$ и фазовая $\varphi(\nu, t)$ параметрические частотные характеристики причинно обусловленной линейной импульсной системы являются взаимозависимыми функциями и имеют место формулы

$$\varphi(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\nu'\nu}{(1+\nu'^2)(\nu'-\nu)} \ln A(\nu', t) d\nu',$$

$$\ln A(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\nu'\nu}{(1+\nu'^2)(\nu-\nu')} \varphi(\nu', t) d\nu' + C, \quad C = \ln W(1, t). \tag{28}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\ln \tilde{W}(z, t) = \ln W(p, t)\Big|_{p=\frac{1-z}{1+z}}. \tag{29}$$

Основываясь на изложенном ранее, можно показать, что если соответствующая система причинно обусловлена, то все полюсы функции $\ln \tilde{W}(z, t)$ в любой момент времени t расположены вне единичной окружности в плоскости комплексной переменной z. Тогда внутри области, ограниченной кругом единичного радиуса, эту функцию можно представить с помощью формулы Шварца [11] в виде

$$\ln \tilde{W}(z, t) = \frac{1}{\pi j} \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \frac{\xi + z}{\xi(\xi - z)} \operatorname{Re} \ln \tilde{W}(\xi, t) d\xi + j \operatorname{Im} \ln \tilde{W}(0, t). \tag{30}$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Im} \ln \tilde{W}(0, t) = \operatorname{Im} \ln W(1, t) = \operatorname{Im} \ln \int\limits_{0}^{\infty} \hat{h}(t, \tau) e^{-\tau} d\tau = 0$$

и выполняя преобразования $z = (1-p)/(1+p), \xi = (1-s)/(1+s)$, формулу (30) можно привести к виду

$$\ln W(p, t) = \frac{1}{\pi j} \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \frac{1 - ps}{(1-s^2)(p-s)} \operatorname{Re} \ln W(s, t) ds.$$

При переходе на мнимую ось $s = j\nu'$, $p = j\nu$ из последнего соотношения вытекает первая из формул (28). Рассматривая функцию

$$j \ln \tilde{W}(z,t) = -\operatorname{Im} \ln \tilde{W}(z,t) + j \operatorname{Re} \ln \hat{W}(z,t)$$

и выполняя преобразования, аналогичные приведенным выше, получим вторую из формул (28).

Очевидно, что во втором случае, если известна фазовая характеристика $\varphi(\nu,t)$, логарифмическая амплитудная характеристика $\ln A(\nu,t)$ может быть вычислена только в относительных единицах, что имеет место также и в теории стационарных систем [5].

Следует заметить, что результаты теорем 1 и 4 представляют собой некоторое обобщение дисперсионных соотношений типа Крамерса–Кронига [12,13] на случай линейных систем с периодически изменяющимися параметрами, в частности на случай линейных импульсных систем, и в этом смысле обусловливают мощный метод исследования аналитических свойств соответствующих характеристик.

Список литературы

[1] *Розенвассер Е.Н.* // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 52–65.

[2] *Розенвассер Е.Н.* // Автоматика и телемеханика. 1990. № 2. С. 37–50.

[3] *Зоммер В.Б., Лямпе Б., Розенвассер Е.Н.* // Автоматика и телемеханика. 1994. В печати.

[4] *Солодовников В.В.* Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 655 с.

[5] *Антокольский М.Л.* // ЖТФ. Т. 17. Вып. 2. 1947. С. 203–210.

[6] *Розенвассер Е.Н.* // ДАН СССР. 1991. Т. 320. № 1. С. 62–66.

[7] *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[8] *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с.

[9] *Розенвассер Е.Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления. М.: Наука, 1977. 344 с.

[10] *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 464 с.

[11] *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991, 448 с.

[12] *Kronig R.J.* // Opt. Soc. Amer. 1926. Vol. 12. P. 547.

[13] *Kramers H.* // Atti Congr. Intern. Fisici Como. 1927. Vol. 2. P. 545.