1995 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 65, N 3

01;09

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФРАКЦИИ H-ПОЛЯРИЗАЦИИ НА ПОЛОСЕ ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

В.В.Артемьев, В.Н.Плотников, С.И.Эминов

Новгородский государственный университет,
173003 Новгород, Россия
(Поступило в Редакцию 10 ноября 1993 г.
В окончательной редакции 27 апреля 1994 г.)

Рассматривается интегральное уравнение дифракции электромагнитных волн на идеально проводящей полосе (H-поляризация). Доказана эквивалентность исходного уравнения интегральному уравнению Фредгольма второго рода в некотором функциональном пространстве. Также показано, что однородное уравнение имеет лишь нулевое решение. Для приближенного решения применяется метод Бубнова-Галеркина. Рассмотрены примеры численного расчета и показана высокая эффективность предлагаемого метода.

Введение

Пусть на полосу ширины $2a$ падает первичная H-поляризованная волна (см. рисунок). Она наводит на обеих сторонах полосы поверхностные электрические токи. Знание токов позволяет провести полный электродинамический анализ. Определение поверхностных токов сводится к решению уравнения [1]

$$\frac{1}{\hat{a}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} j(at)\frac{\partial}{\partial t}H_0^{(2)}(\hat{a}|\tau-t|)dt-\hat{a}\int\limits_{-1}^{1} j(at)H_0^{(2)}(\hat{a}|\tau-t|)dt=-4\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(a\tau), \tag{1}$$

где $\hat{a}=k\cdot a$.

Остальные обозначения, принятые при записи уравнения (1), соответствуют обозначениям работы [1].

Сведения к стандартному виду

В этом разделе сведем уравнение (1) к стандартному виду путем выделения сингулярного оператора. Функция Ханкеля $H_0^{(2)}(x)$ имеет логарифмическую особенность. Эта особенность выражена в следующей лемме.

Л е м м а. Имеет место представление

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[H_0^{(2)}(x)-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{|x|}\right]=\frac{2i}{\pi}\ln|x|+f(x), \qquad (2)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция.

Доказательство этой леммы непосредственно вытекает из представления интегралом фурье-функции Ханкеля и логарифмической функции. Теперь преобразуем уравнение (1) с учетом (2)

$$\frac{2i}{\hat{a}\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} j(at)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+$$

$$+\frac{1}{\hat{a}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} j(at)\frac{\partial}{\partial t}\left[H_0^{(2)}(\hat{a}|\tau-t|)-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\right]dt-$$

$$-\hat{a}\int\limits_{-1}^{1} j(at)H_0^{(2)}(\hat{a}|\tau-t|)dt=-4\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^0(a\tau). \qquad (3)$$

Запишем уравнение (3) в лаконичной форме. Одновременно перейдем от плотности тока $j(a\tau)$ к новой функции $j(a\tau)=\rho(\tau)u(\tau)$, где $\rho(\tau)=\sqrt{1-\tau^2}$. В результате получим следующее уравнение:

$$\frac{2i}{\hat{a}}(Au)(\tau)+(Bu)(\tau)=\frac{2i}{\hat{a}}\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau-t|}dt+$$

$$+\int\limits_{-1}^{1} u(t)\rho(t)B(\tau,t)dt=e(\tau). \qquad (4)$$

Отметим важное свойство функции $B(\tau,t)$. При совпадении аргументов τ и t эта функция имеет логарифмическую особенность.

Собственные функции сингулярного оператора. Метод Бубнова—Галеркина

Здесь вначале опишем собственные функции оператора

$$(Au)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_{-1}^{1} u(t)\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt. \tag{5}$$

Введем весовое пространство $L_{2,\rho}[-1,1]$ с весом $\rho(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}$. Ортонормированным в $L_{2,\rho}$ является базис

$$\varphi_m(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\rho^{-1}(\tau)\cdot\sin[m\cdot\arccos(\tau)],\ m = 1,2,3,\ldots,$$

$$\int\limits_{-1}^{1}\varphi_m(\tau)\varphi_n(\tau)\rho(\tau)d\tau = \delta_{m,n} = \begin{cases}1, & m = n,\\ 0, & m \neq n.\end{cases}$$

Используя известное соотношение [2]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\cos[m\cdot\arccos(t)]}{\rho(t)}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt = \frac{1}{m}\cos[m\cdot\arccos(\tau)],\ m = 1,2,\ldots,$$

найдем интегрированием по частям интеграл вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\varphi_m(t)\rho(t)\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{m\cdot\cos[m\cdot\arccos(t)]}{\rho(t)}\ln\frac{1}{|\tau - t|}dt =$$

$$= \cos[m\cdot\arccos(\tau)],\ m = 1,2,\ldots. \tag{6}$$

Теперь из (6) и определения оператора A получим

$$(A\varphi_m)(\tau) = m\varphi_m(\tau),\ m = 1,2,\ldots.$$

Кратко отметим свойства оператора A, которые следуют из определения и соотношения (6). Этот оператор является симметричным, имеет плотную область определения и, наконец, является положительно определенным. Для решения уравнения (4) применим схему Бубнова–Галеркина, а именно разложим неизвестную функцию по базису

$$u(\tau) = \sum_{m=1}^{N} c_m\varphi_m(\tau). \tag{7}$$

Подставим разложение (7) в уравнение (4) и умножим обе части уравнения на базисные функции φ_n в пространстве $L_{2,\rho}$, в результате получим следующую систему:

$$\frac{2i}{\hat{a}}n\cdot c_n + \sum_{m=1}^{N} c_m B_{mn} = b_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant N, \tag{8}$$

где

$$B_{mn} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \rho(t)\varphi_m(t)\rho(\tau)\varphi_n(\tau)B(\tau,t)d\tau dt,$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \epsilon(\tau)\rho(\tau)\varphi_n(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Пусть H_A является энергетическим пространством положительно определенного оператора A. Сформулируем теорему, доказательство которой имеется в [3].

Т е о р е м а. Пусть уравнение (4) имеет единственное обобщенное решение, а оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен в H_A. Тогда при больших N система (8) имеет единственное решение, которое сходится к точному решению в метриках H_A и $L_{2,\rho}$. Таким образом, нам необходимо доказать, что выполняются условия теоремы. Следующий раздел посвящен доказательству вполне непрерывности $A^{-1}B$ в H_A.

Критерий применимости метода Бубнова–Галеркина

Для доказательства того, что оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен, т.е. применим метод Бубнова–Галеркина, достаточно доказать выполнение условия

$$\sum_{m,n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n}B_{mn}\right|^2 < +\infty. \tag{10}$$

Опишем функции $B(\tau,t)$, которые обеспечивают условие (10). Пусть $B(\tau,t)$ имеет вид

$$B(\tau,t) = \frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t). \tag{11}$$

Преобразуем матричные элементы путем интегрирования по частям

$$\frac{1}{n}B_{mn} = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} \rho(t)\varphi_m(t)\int_{-1}^{1} \rho(\tau)\varphi_n(\tau)B(\tau,t)d\tau dt =$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho(t)\varphi_m(t)\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos[n\arccos(\tau)]}{\sqrt{1-\tau^2}}K(\tau,t)d\tau dt. \tag{12}$$

Теперь заметим, что система функций

$$\Psi_0(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi}},$$

$$\Psi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos[n\arccos(\tau)]}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad n = 1,2,\ldots$$

также образует ортонормированный базис пространства $L_{2,\rho}$. Следовательно, в (12) записана билинейная форма интегрального оператора, построенная на двух ортонормированных базисах. Поэтому доказана следующая теорема.

Т е о р е м а. Пусть функция $B(\tau,t)$ имеет вид

$$B(\tau,t)=\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t),$$

а функция $K(\tau,t)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}K^2(\tau,t)\frac{\rho(t)}{\rho(\tau)}dtd\tau<+\infty.$$

Тогда будет выполняться условие (10). Тем самым не только доказана вполне непрерывность $A^{-1}B$ в H_A, но и указан весьма широкий класс операторов B, когда применим метод Бубнова–Галеркина.

Однозначная разрешимость интегрального уравнения

Для доказательства однозначной разрешимости исходного уравнения (1) преобразуем ее, используя представление функции Ханкеля интегралом Фурье

$$H_0^{(2)}\Big(\hat{a}|\tau-t|\Big)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\hat{a}\varkappa(\tau-t)}}{\sqrt{\varkappa^2-1}}d\varkappa.$$

Тогда однородное уравнение, соответствующее (1), можно записать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{1}\rho(t)j(at)\sqrt{\varkappa^2-1}\,e^{-i\hat{a}\varkappa(\tau-t)}dt\,d\varkappa=0. \tag{13}$$

Умножим (13) на комплексно-сопряженную функцию $\overline{\rho(\tau)j(a\tau)}$ и проинтегрируем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\varkappa^2-1}\,|g(\varkappa)|^2d\varkappa=0, \tag{14}$$

где

$$g(\varkappa)=\int_{-1}^{1}\rho(t)j(at)e^{i\hat{a}\varkappa t}dt.$$

Из соотношения (14) немедленно вытекает, что однородное уравнение имеет лишь нулевое решение.

Таблица 1.

φ	Порядковый номер	$\dot{a} = \sqrt{28}$		$\dot{a} = \sqrt{80}$	
		Re(h)	Im(h)	Re(h)	Im(h)
$\frac{\pi}{12}$	3	−.102131	−.019825	.029835	.013506
	4	−.104179	−.017707	.061332	.005330
	5	−.104220	−.017667	.068914	−.006220
	6	−.104220	−.017667	.069632	−.007704
	7	−.104220	−.017667	.069658	−.007760
	8	−.104220	−.017667	.069659	−.007761
	9	−.104220	−.017667	.069659	−.007761
$\frac{\pi}{6}$	3	−.199553	−.052312	.066627	.069372
	4	−.201351	−.048568	.126465	.031753
	5	−.201379	−.048507	.128596	.012353
	6	−.201379	−.48507	.128426	.010575
	7	−.201379	−.048507	.128418	.010520
	8	−.201379	−.048507	.128418	.010519
	9	−.201379	−.048507	.128418	.010519
$\frac{\pi}{4}$	3	−.186185	−.085025	−.021668	.113008
	4	−.185519	−.080892	.024800	.050816
	5	−.185498	−.080835	.013891	.037190
	6	−.185498	−.080835	.012490	.036571
	7	−.185498	−.080835	.012443	.036562
	8	−.185498	−.0808353	.012442	.036562
	9	−.185498	−.080835	.012442	.036562
$\frac{\pi}{3}$	3	.133909	−.066820	−.208932	−.008773
	4	.135906	−.064344	−.215846	−.014295
	5	.135944	−.064315	−.216318	−.010722
	6	.135945	−.064314	−.216174	−.010348
	7	.135945	−.064314	−.216167	−.010336
	8	.135945	−.064314	−.216167	−.010336
	9	.135945	−.064314	−.216167	−.010336
$\frac{5\pi}{12}$	3	.719206	.021664	.315727	−.050497
	4	.719279	.020961	.306957	−.028443
	5	.719277	.0209950	.313352	−.024705
	6	.719277	.020950	.314081	−.024634
	7	.719277	.020950	.314105	−.024635
	8	.719277	.020950	.314106	−.024635
	9	.719277	.020950	.314106	−.024635
$\frac{\pi}{2}$	3	1.041867	.079784	.997191	.072518
	4	1 .040229	.077326	1.013030	.043733
	5	1.040196	.077293	1.004944	.037342
	6	1.040196	.077293	1.003950	.037096
	7	1.040196	.077293	1 .003916	.037093
	8	1.040196	.077293	1.003916	.037093
	9	1.040196	.077293	1.003916	.037093

Результаты численного расчета

Рассмотрим примеры расчета поверхностных токов, наводимых плоской волной на обоих сторонах полосы, а также диаграммы направленности рассеянного поля для нормального падения волны. Целью расчетов является изучение эффективности предлагаемого в работе метода.

Рассмотрим диаграмму направленности рассеянного поля $h(\varphi)$ и сравним результаты численного расчета с результатами работы [4], где также изучался вопрос сходимости. В этой работе интегральные уравнения решаются методом механических квадратур. Результаты расчета диаграмм рассеяния для различных углов (φ) приведены в табл. 1. Как следует из этой таблицы, для графической сходимости (стабилизация трех значащих цифр) в методе Галеркина можно ограничиться тремя-четырьмя базисными функциями. А для определения точного значения (шесть значащих цифр) достаточно учесть десять базисных функций даже для широкой полосы, когда $\hat{a} = \sqrt{80}$. Из сравнения с результатами работы [4] видно, что метод Галеркина сходится значительно быстрее, чем метод механических квадратур. Это обстоятельство связано с тем, что матрица выделенного сингулярного оператора является диагональной. К сожалению, в работе [4] не приводятся

Таблица 2.

Порядковый номер	$\hat{a} = \sqrt{28}$			
	Re(j)	Im(j)	$\|j\|$	arg(j)
2	.546136	−.168139	.571433	−.298661
3	.390699	−.073786	.397606	−.186657
4	.353519	−.055042	.357778	−.154459
5	.349563	−.053278	.353600	−.151250
6	.349320	−.053160	.353341	−.151023
7	.349309	−.053154	.353330	−.151012
8	.349309	−.053154	.353330	−.151011
9	.349309	−.053154	.353330	−.151011
10	.349309	−.053154	.353330	−.151011
	$\hat{a} = \sqrt{80}$			
2	.552072	−.037481	.553343	−.67780
3	.620779	.113077	.630993	.180178
4	.765521	.036553	.766393	.047712
5	.824340	−.033927	.825038	−.41133
6	.843679	−.054095	.845411	−.064030
7	.846736	−.057114	.848660	−.067349
8	.847044	−.057434	.848989	−.067702
9	.847067	−.057460	.849014	−.67730
10	.847068	−.057462	.849015	−.067732

значения токов. А ведь при определении токов (неизвестных функций в интегральном уравнении) сходимость медленнее, чем при определении интегральных характеристик. Результаты расчетов поверхностных токов в центре полосы приведены в табл. 2. При этом амплитуда напряженности магнитного поля полагалась единичной. Как следует из табл. 2, для определения точных значений токов (реальной и вещественной частей, модуля и фазы) достаточно учесть десять базисных функций. Тем самым показана эффективность предлагаемого метода.

Список литературы

[1] *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. М.: Радио и связь, 1982. 184 с.

[2] *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.

[3] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

[4] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев.: Наукова думка. 1984. 344 с.