

01:07:12

©1995 г.

## АНАЛИЗ СВЕТОФОКУСИРУЮЩИХ СВОЙСТВ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ГРАДИЕНТНЫХ ЛИНЗ, ПОЛУЧЕННЫХ МЕТОДОМ ДИФФУЗИОННОГО ОБМЕНА В ПЛАНАРНОЙ МАТРИЦЕ

*И.Е.Скляр, А.Ш.Тухватулин, В.И.Косяков, Т.Л.Бухбиндер*

Санкт-Петербургский государственный технический университет,  
195251, Санкт-Петербург, Россия  
(Поступило в Редакцию 16 мая 1994 г.)

Рассмотрены оптические характеристики аксиально-симметричных градиентных линз, полученных методом диффузионного обмена. На основе модели диффузии Фика численно рассчитаны профили концентрации компонентов диффузии и распределения показателя преломления для различных моментов времени. Полученные данные использованы для численного расчета хода лучей в неоднородной среде и определения продольной сферической аберрации градиентных линз. Изложенная процедура моделирования применима к расчету оптических характеристик градиентных линз как на основе стекла, так и на основе полимерных материалов.

Особенностью градиентных оптических линз (граданов) является факт, что если в обычных оптических системах изменение направления луча происходит за счет преломления или отражения на поверхности, то в градиентной линзе изменение направления распространения излучения определяется внутренним распределением показателя преломления. Граданы обладают рядом преимуществ перед линзами из однородных оптических материалов. С появлением граданов возникает, например, возможность управления оптическими свойствами за счет изменения показателя преломления, что дает дополнительную степень свободы при конструировании оптических систем.

Перспективными как по широте применений, так и с точки зрения массового производства представляются линзы с аксиально-симметричным градиентом показателя преломления, создаваемые в плоской пластине при помощи диффузии через малое отверстие в непроницаемой маске [1]. В настоящей работе используются методы математического моделирования процессов, формирующих оптические свойства таких линз, и проводится анализ особенностей этих процессов для выяснения возможностей улучшения оптических характеристик градиентных линз.

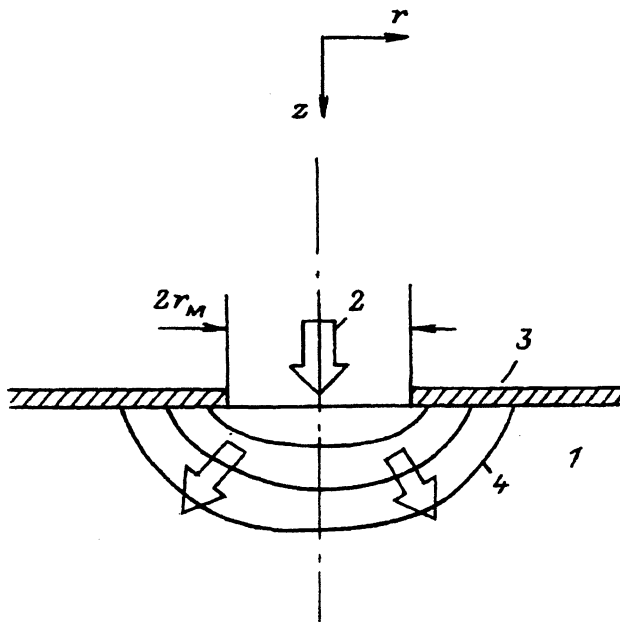


Рис. 1. Формирование распределения показателя преломления в градиентной линзе в процессе диффузии под маску.

Один из возможных способов получения градианов с аксиально-симметричным профилем показателя преломления схематично показан на рис. 1. В плоскую подложку, изготовленную из материала с относительно невысоким показателем преломления 1, проводят диффузию пенетранта 2, который повышает показатель преломления подложки ( $n_2 (n_2 > n_1)$ ). Входящий диффузионный поток ограничен отверстием маски (как правило, круглой формы радиуса  $r_M$ ) 3. В результате внутри подложки формируется распределение показателя преломления 4, причем области с большим значением показателя преломления находятся вблизи маски и около оси.

Если затем направить на такую структуру пучок лучей света, то в соответствии с принципами геометрической оптики лучи, проходящие через зону с неоднородным показателем преломления, будут отклоняться в сторону областей с большими значениями показателя преломления и при определенном распределении показателя преломления могут быть сфокусированы (рис. 2).

Заранее, однако, не ясно, какие именно распределения показателя преломления нужно создавать, чтобы линза имела наименьшие аберрации. Поэтому актуальным является решение задачи об оптимальном с точки зрения оптических характеристик профиле показателя преломления полученной указанным образом градиентной среды.

Для решения поставленной задачи естественно поступить следующим образом. В предположении выполнения определенных законов диффузии при заданных граничных и начальных условиях рассчитать распределение концентрации диффузанта во всех точках в различные моменты времени. Далее, используя связь концентрации компонентов с показателем преломления (например, по Лоренц-Лорентцу или по Гладстону-Далю), получить значения показателя преломления в лю-

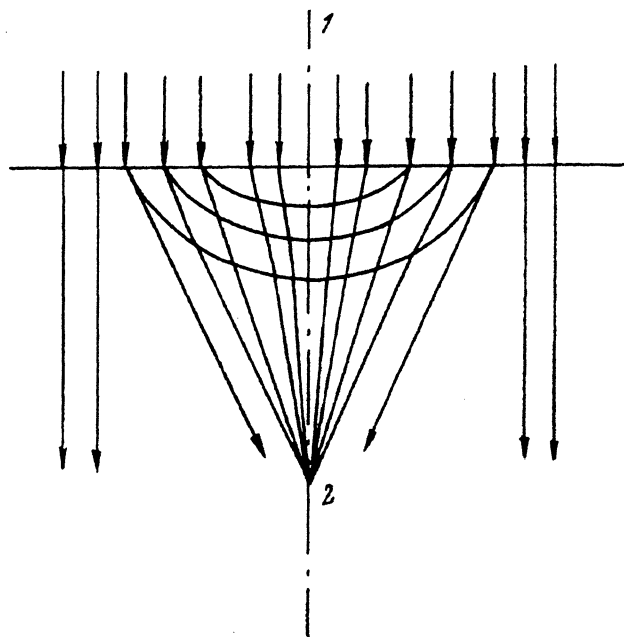


Рис. 2. Фокусировка пучка лучей градиентной линзой.  
1 — пучок лучей, 2 — точка фокуса.

бой точке среды. И наконец, пользуясь известным уравнением Эйлера, связывающим траекторию луча с распределением показателя преломления в среде, рассчитать фокусирующие (абберационные) характеристики для полученной линзы. Исходя из этого, выполненное нами в настоящей работе моделирование оптических характеристик градиентов включало в себя три этапа: 1) численный расчет распределения концентрации диффузанта в пластине в различные моменты времени и при различных условиях диффузии, 2) сплайн-интерполяцию рассчитанных или полученных экспериментально распределений концентрации и расчет профилей показателя преломления в пластине, 3) определение траекторий распространения лучей в аксиально-симметричной оптической среде.

На первом этапе при расчете профиля концентрации диффузанта в пластине принималось, что диффузия подчиняется закону Фика с постоянным коэффициентом диффузии. Иными словами, задача ставилась следующим образом:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial c}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$c(z, r, 0) = 0, \quad (2)$$

$$c(0, r, t) = c_0, \quad r \leq 1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}(0, r, t) = 0, \quad r > 1, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(z, 0, t) = 0, \quad z > 0, \quad (5)$$

$r = r_p/r_m$ ;  $z = z_p/r_m$ ;  $t = (Dt_p/r_m^2)$ ;  $c$  — концентрация диффузанта в пластине;  $c_0$  — концентрация диффузанта на границе диффузионная ванна-пластина;  $r_m$  — радиус отверстия в маске;  $r_p$ ,  $z_p$ ,  $t_p$  — реальные (размерные) координаты и время;  $D$  — коэффициент диффузии.

Область определения задачи является условие  $z \geq 0$ . В силу аксиальной симметрии достаточно определить профиль концентрации в любой плоскости, проходящей через ось  $z$ . Ограничим области изменения переменных  $z$ ,  $r$ ,  $t$  соответственно отрезками  $[0, z_{\max}]$ ,  $[0, r_{\max}]$ ,  $[0, T]$ , положим при этом  $r_{\max} = z_{\max}$ .

Следуя [2], разобьем отрезки  $[0, z_{\max}]$  и  $[0, r_{\max}]$  при помощи точек (узлов) на  $N$  одинаковых частей с шагом  $h = r_{\max}/N$ :  $0 = z_0 < z_1 < \dots < z_{N-1} < z_N = z_{\max}$ ;  $z_i = ih (i = 0, 1, \dots, N)$ ;  $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{N-1} < r_N = r_{\max}$ ;  $r_j = jh (j = 0, 1, \dots, N)$ .

При выборе шага  $h$  руководствуются характером решения (при плавном изменении решения  $c(r, z, t)$  шаг  $h$  может быть взят более крупным) и точностью, с которой желательно получить решение (чем больше требуемая точность, тем более мелкий шаг необходим).

Аналогично отрезок  $[0, T]$  изменения переменной  $t$  разобьем на  $s$  одинаковых частей с шагом  $l = T/s$ , так что  $t_k = kl$ ; ( $k = 0, 1, \dots, s$ );  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = T$ . Шаг  $l$  выбирается по тем же соображениям, что и шаг  $h$ , а также из соображений устойчивости.

Совокупность узлов, образующихся в результате пересечения прямых  $z = ih$ , ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) и  $r = jh$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ), создает квадратную сетку на выбранной нами плоскости, проходящей через ось  $z$ . Поскольку такие сетки можно построить для каждого момента времени  $t_k = kl$  ( $k = 0, 1, \dots, s$ ), то мы получим трехмерную сетку (рис. 3).

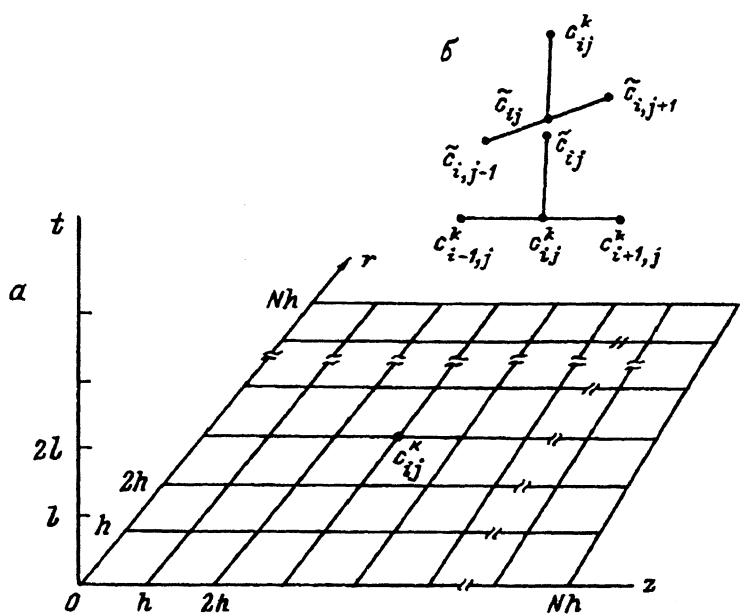


Рис. 3. Сетка (а) и шаблон (б) для решения задачи (1)–(5) по разностной схеме (6)–(11).

Заменив на построенной сетке производные конечными разностями, можно получить вместо дифференциального уравнения (1) систему алгебраических уравнений. В настоящей работе использовалась система неявных сеточных уравнений [2-4], которая характеризуется улучшенной по сравнению с явной схемой сходимостью, что позволило уменьшить общее время вычислений

$$\frac{\tilde{c}_{ij} - c_{ij}^k}{l} = \frac{c_{ij+1}^k - 2c_{ij}^k + c_{ij-1}^k}{h^2} + \frac{1}{jh} \frac{c_{i,j+1}^k - c_{i,j-1}^k}{2h}, \quad (6)$$

$$\frac{c_{ij}^{k+1} - \tilde{c}_{ij}}{l} = \frac{\tilde{c}_{i+1,j} - 2\tilde{c}_{ij} + \tilde{c}_{i-1,j}}{h^2}. \quad (7)$$

Таким образом, вычисления выполнялись за два шага: сначала по значениям  $c_{ij}^k (i = 0, \dots, N)$  рассчитывались промежуточные значения  $\tilde{c}_{ij}$ , а затем на их основе рассчитывались значения  $c_{ij}^{k+1} (j = 0, \dots, N)$ .

Уравнения (6), (7) были дополнены граничными и начальными условиями. Граничное условие на оси ( $r = 0$ ) получалось из условия

$$\left. \frac{\partial c}{\partial r} \right|_{r,0,t} = 0,$$

что означает отсутствие потока диффузанта на границе по направлению  $r$

$$\tilde{c}_{i,0} = \frac{c_{i,0}^k + 4 \frac{l}{h^2} \tilde{c}_{i,1}}{1 + 4 \frac{l}{h^2}}, \quad (8)$$

где величина  $c_{i,0}^k$  известна из предыдущего шага вычислений, а величина  $\tilde{c}_{i,1}$  рассчитывается по формулам (6), (7). Граничное условие в области ( $r \leq 1$ ) окна  $c_{ij}^k = c_0$  выбиралось из соотношения

$$\left. \frac{\partial c}{\partial z} \right|_{r,0,t} = 0.$$

Граничное условие в области маски определялось с учетом отсутствия потока через маску:

$$c_{0,j}^{k+1} = \frac{\tilde{c}_{0,j} + 2 \frac{l}{h^2} c_{1,j}^{k+1}}{1 + 2 \frac{l}{h^2}}, \quad (9)$$

где величина  $\tilde{c}_{0,j}$  известна из предыдущего шага вычислений, а величина  $c_{1,j}^{k+1}$  рассчитывается по формулам (6), (7).

Граничные условия при больших значениях  $r$  и  $z$  можно получить, предполагая, что в этих областях концентрация изменяется приблизительно по экспоненте и мала (поэтому изменение показателя преломления также малó),

$$c_{N,j} = \frac{c_{N-1,j}^2}{c_{N-2,j}}, \quad c_{i,N} = \frac{c_{i,N-1}^2}{c_{i,N-2}}. \quad (10), (11)$$

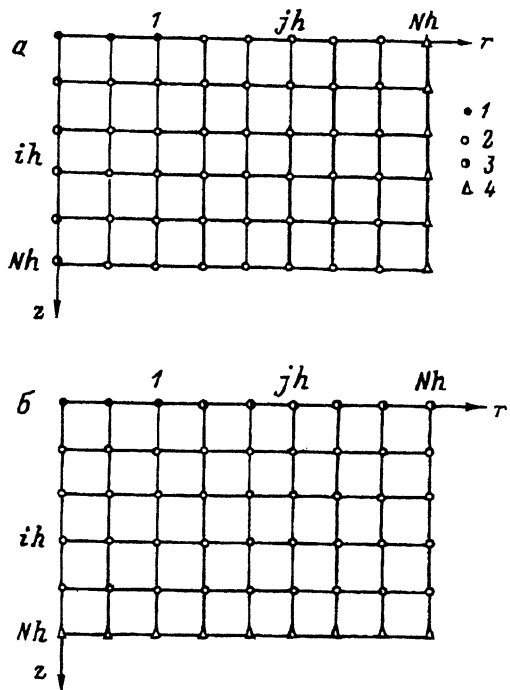


Рис. 4. Порядок вычислений  $c_{ij}^k$  по разностной схеме.

*a* — шаг 1: вычисление  $\bar{c}_{ij}^k$  по  $c_{ij}^k$  в точках, обозначенных 1 — по формуле  $c_{ij}^k = c_0$ , 2 — по формуле (6), 3 — по формуле (8), 4 — по формуле (11);  
*б* — шаг 2: вычисление  $c_{ij}^{k+1}$  по  $\bar{c}_{ij}^k$  в точках, обозначенных 1 — по формуле  $c_{ij}^k = c_0$ , 2 — по формуле (7), 3 — по формуле (9), 4 — по формуле (10).

Начальные условия задачи достаточно просты и заключаются в том, что при  $t = 0$  концентрация во всех точках, кроме области отверстия, равна нулю; в области отверстия концентрация равна  $c_0$ .

Последовательность решения сеточной задачи показана на рис. 4. Результат решения представляет собой набор значений концентрации диффузанта в каждой выбранной точке среды для момента времени из дискретного набора в интервале  $[0 \dots T]$ . Второй и третий этапы моделирования взаимосвязаны и должны выполняться одновременно.

Рассмотрим сначала сплайн-интерполяцию полученного на первом этапе набора нормированных концентраций  $f_{ij} = c_{j,i}/c_0$ . Обозначим функцию, интерполирующую набор  $f_{ij}$ , через  $g(r, z)$ . Метод расчета значений функции  $g(r, z)$  в любой точке заключается в следующем [4].

1) Из теории сплайн-интерполяции функций двух переменных известно, что искомая функция  $g(r, z)$  должна удовлетворять следующим алгебраическим системам уравнений:

$$AG_r = HF_r, \quad AG_z = HF_z, \quad (12), (13)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} & \frac{h}{6} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h}{6} & \frac{2h}{3} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & -\frac{2}{h} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{2}{h} & \frac{1}{h} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$G_r = \begin{pmatrix} M_{1i} \\ M_{2i} \\ \dots \\ M_{N-1,i} \end{pmatrix}, \quad G_z = \begin{pmatrix} N_{j,1} \\ N_{j,2} \\ \dots \\ N_{j,N-1} \end{pmatrix}, \quad (16), (17)$$

$$M_{ji} = g_{rr}(x_j, z_i), \quad (18)$$

$$N_{ji} = g_{zz}(x_j, z_i), \quad (19)$$

$$M_{0,i} = M_{N,i} = 0, \quad (20)$$

$$N_{j,0} = N_{j,N} = 0, \quad (21)$$

$$F_r = \begin{pmatrix} f_{1i} \\ f_{2i} \\ \dots \\ f_{N-1,i} \end{pmatrix}, \quad F_z = \begin{pmatrix} f_{j,1} \\ f_{j,2} \\ \dots \\ f_{j,N-1} \end{pmatrix}. \quad (22), (23)$$

Решив каждую из этих систем (состоящие из  $N+1$  уравнений)  $N+1$  раз, определим  $N_{ji}$  и  $M_{ji}$  для всех точек сетки. Кроме того, действуя аналогично, но считая теперь за значения функции  $f_{ij}$  найденные значения  $M_{ji}$ , найдем набор  $k_{ji} = g_{rrzz}(r_j, z_i)$  также для всех точек сетки.

2) Найдем значения  $g(r, z)$  в точках  $(r_{j-1}, z)$  и  $(r_j, z)$  по формулам (рис. 5)

$$g(r_{j-1}, z) = N_{j-1,i-1} \frac{(z_i - z)^3}{6h} + N_{j-1,i} \frac{(z - z_{i-1})^3}{6h} + \left( f_{j-1,i-1} - \frac{N_{j-1,i-1} h^2}{6} \right) \left( \frac{z_i - z}{h} \right) + \left( f_{j-1,i} - \frac{N_{j-1,i} h^2}{6} \right) \left( \frac{z - z_{i-1}}{h} \right), \quad (24)$$

$$g(r_j z) = N_{j,i-1} \frac{(z_i - z)^3}{6h} + N_{j,i} \frac{(z - z_{i-1})^3}{6h} + \left( f_{j,i-1} - \frac{N_{j,i-1} h^2}{6} \right) \left( \frac{z_i - z}{h} \right) + \left( f_{j,i} - \frac{N_{j,i} h^2}{6} \right) \left( \frac{z - z_{i-1}}{h} \right). \quad (25)$$

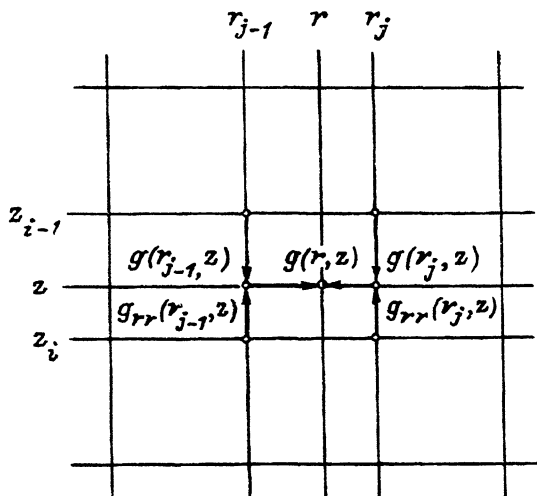


Рис. 5. Порядок вычисления сплайн-функции  $g(r, z)$ .

3) Аналогично найдем значение  $g_{rr}$  в точках  $(r_{j-1}, z)$  и  $(r_j, z)$

$$g_{rr}(r_{j-1}, z) = k_{j-1, i-1} \frac{(z_i - z)^3}{6h} + k_{j-1, i} \frac{(z - z_{i-1})^3}{6h} + \left( M_{j-1, i-1} - \frac{k_{j-1, i-1} h^2}{6} \right) \left( \frac{z_i - z}{h} \right) + \left( M_{j-1, i} - \frac{k_{j-1, i} h^2}{6} \right) \left( \frac{z - z_{i-1}}{h} \right), \quad (26)$$

$$g_{rr}(r_j, z) = k_{j, i-1} \frac{(z_i - z)^3}{6h} + k_{j, i} \frac{(z - z_{i-1})^3}{6h} + \left( M_{j, i-1} - \frac{k_{j, i-1} h^2}{6} \right) \left( \frac{z_i - z}{h} \right) + \left( M_{j, i} - \frac{k_{j, i} h^2}{6} \right) \left( \frac{z - z_{i-1}}{h} \right). \quad (27)$$

4) Наконец, определим искомую функцию  $g(r, z)$

$$g(r, z) = g_{rr}(r_{j-1}, z) \frac{(r_j - r)^3}{6h} + g_{rr}(r_j, z) \frac{(r - r_{j-1})^3}{6h} + \left[ g(r_{j-1}, z) - \frac{g_{rr}(r_{j-1}, z) h^2}{6} \right] \left( \frac{r_j - r}{h} \right) + \left[ g(r_j, z) - \frac{g_{rr}(r_j, z) h^2}{6} \right] \left( \frac{r - r_{j-1}}{h} \right). \quad (28)$$

Итак, мы описали метод, позволяющий по набору точек  $f_{ji}$  ( $j = 0 \dots N, i = 0 \dots N$ ) определить в любой точке, лежащей между исходными, гладкую функцию распределения концентраций  $g(r, z)$ , интерполирующую исходный набор данных. Очевидно, не представляет труда определение пространственных производных  $g(r, z)$ . Однако при расчете траектории луча необходимо знать не функцию  $g(r, z)$ , а профиль показателя преломления  $n(r, z)$ .



Распределение показателя преломления рассчитывается по формуле Гладстона-Дала

$$n(r, z) = n_1 + (n_2 - n_1)g(r, z), \quad (29)$$

где  $n_0$  — исходный показатель преломления пластины;  $n_2 - n_1$  — максимально возможный перепад показателя преломления, определяемый природной матрицы и пенетранта.

Третий этап моделирования заключается в определении траектории луча в среде с известным профилем показателя преломления  $n(r, z)$ . Алгоритм такого расчета основан на численном решении уравнения Эйлера, описывающего распространение лучей в неоднородной оптической среде [5]. Пусть в какой-либо момент луч находится в точке с координатами

$$\rho_m = \begin{pmatrix} r_m \\ z_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_m = \begin{pmatrix} T_{mr} \\ T_{mz} \end{pmatrix},$$

где  $\rho_m$  — радиус-вектор  $m$ -й точки траектории;  $\mathbf{T}_m$  — лучевой вектор, компоненты которого суть оптические направляющие косинусы в данной точке.

Тогда расчет  $\rho_{m+1}$  и  $\mathbf{T}_{m+1}$  для следующей точки траектории состоит в следующем.

1) Рассчитываются вспомогательные векторы

$$\mathbf{A} = \Delta t \mathbf{D}(\rho_m), \quad (30)$$

$$\mathbf{B} = \Delta t \mathbf{D}(\rho_m), \quad (31)$$

$$\mathbf{C} = \Delta t \mathbf{D}(\rho_m), \quad (32)$$

где  $\Delta t$  — шаг траектории,  $\mathbf{D} = n \nabla n$ ,  $n = n(r, z)$  — вычисленное по описанному выше алгоритму распределение показателя преломления.

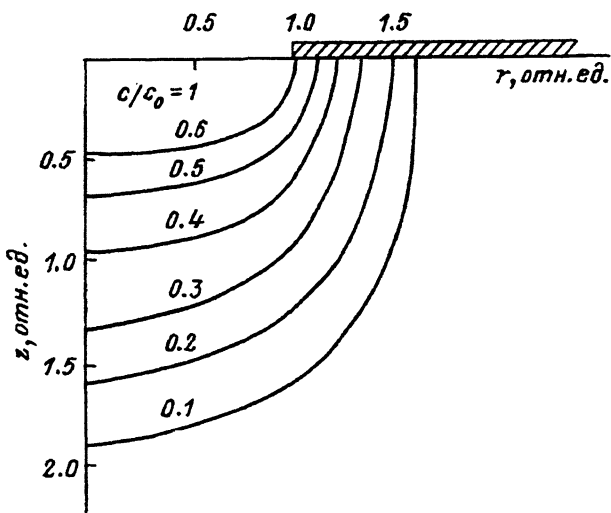


Рис. 6. Рассчитанные профили равных концентраций диффузанта.

Постоянная концентрация  $c_0$  в области окна в течение всего времени диффузии  $t_d$ , относительное время диффузии  $t = (Dt)/r_M^2 = 0.8$ .

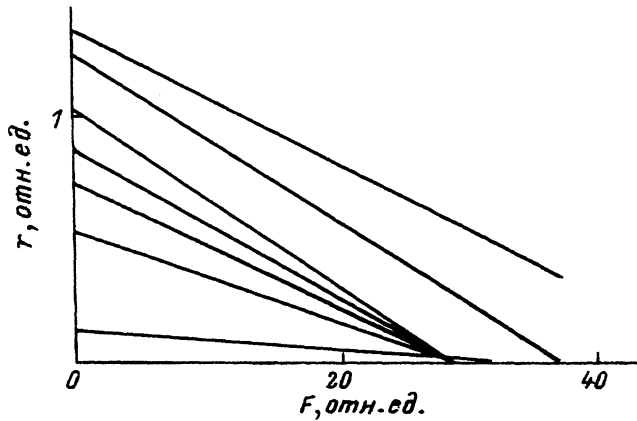


Рис. 7. Схема фокусировки лучей градиентной оптической средой.

Траектории лучей получены для распределения концентрации диффузанта, показанного на рис. 6.

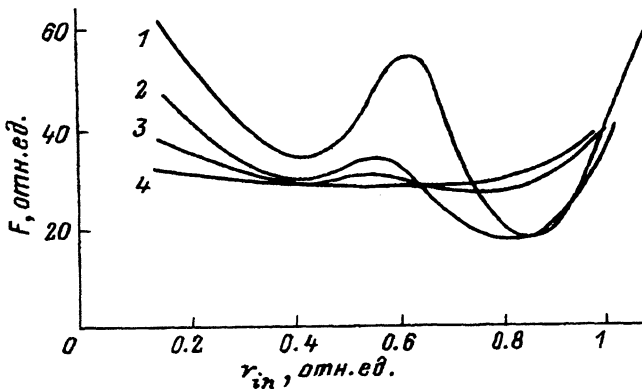


Рис. 8. Зависимость фокусного расстояния от высоты входа луча в градиентную линзу при разных временах диффузии  $t_d$ .

Постоянная концентрация диффузанта в области окна: 1 —  $t = (Dt_d)/r_M^2 = 0.2$ , 2 — 0.4, 3 — 0.8; 4 — скачок концентрации на границе: в интервале времени  $t = 0-0.36$   $c/c_0 = 0.1$ , в интервале времени  $t = 0.36-0.40$   $c/c_0 = 0.4$ .

2) Рассчитываются собственно величины  $\rho_{m+1}$  и  $T_{m+1}$

$$\rho_{m+1} = \rho_m + \Delta t \left[ T_m + \frac{1}{6}(A + 2B) \right], \quad (33)$$

$$T_{m+1} = T_m + \frac{1}{6}(A + 4B + C). \quad (34)$$

Таким образом, переходя от точки к точке, можно, зная исходные величины  $\rho_0$  и  $T_0$ , последовательно рассчитать всю траекторию луча в градиентной оптической среде. Применение данной процедуры моделирования можно проиллюстрировать примером (рис. 7, 8).

В соответствии с вышеизложенной методикой был рассчитан ряд распределений показателя преломления в градиентных линзах (рис. 8).

В качестве параметра распределения выбиралось общее время диффузионного процесса  $t_d$ . Кроме того, специально моделировался случай скачка концентрации диффузанта на границе (т.е. в окне). Для определенных таким образом распределений показателя преломления рассчитывался ход пучка лучей, падающих на градац параллельно его оси (см. рис. 7).

Результаты расчета показывают, что изменением времени диффузионного процесса можно добиться фокусировки параллельного пучка лучей. При этом удовлетворительно фокусируются лучи, точка падения которых лежит в пределах окна в маске. Лучи, точка падения которых находится дальше от оси, отклоняются линзой слабо (рис. 8).

Следует отметить, что продольная сферическая аберрация даже для лучей, точка падения которых находится в пределах отверстия маски, велика. С целью ее уменьшения рассматривалась возможность скачкообразного изменения концентрации диффузанта в окне. На рис. 8 показаны результаты расчета для одного из таких режимов. Видно, что разброс фокусных расстояний в этом случае меньше, чем для пучка лучей в случае постоянной концентрации на границе.

Изложенная процедура моделирования имеет достаточно универсальный характер, т.е. может быть применена в любых конкретных условиях, если известен закон диффузии и заданы начальные и граничные условия.

#### Список литературы

- [1] *Oikawa H., Iga K., Sanada T.* // Jap. Appl. Opt. 1981. Vol. 20. N 1. P. 51-57.
- [2] *Вазов А., Форсайт Дж.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во ин. лит., 1963. 488 с.
- [3] *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с.
- [4] *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 344 с.
- [5] *Anurag Sharma, Viziakumar D., Ghatak A.K.* // Appl. Opt. 1982. Vol. 21. N 6. P. 984-986.