01;04;09
Журнал технической физики, т. 65, в. 4, 1995
© 1995 г.

ДИНАМИЧЕСКАЯ ФОКУСИРОВКА ЛУЧЕЙ В ВОЛНОВЕДУЩИХ СРЕДАХ

В.А.Буц, В.А.Чацкая

Харьковский физико-технический институт,
310108, Харьков, Украина
(Поступило в Редакцию 4 мая 1994 г.)

На распространение волн в волноведущих средах существенное влияние оказывают неоднородности. В работе [1] показано, что наличие регулярной периодической неоднородности приводит к высвечиванию лучей из волноведущей области, к разрушению первоначальной структуры пучка лучей, к формированию спекл-структуры. В настоящей работе динамика лучей исследована методом гамильтоновой механики. Показано, что при определенных значениях параметров плавной и периодической неоднородностей возможна динамическая фокусировка лучей. Фокусировка, вызванная плавной неоднородностью, аналогична эффекту автофазировки Векслера–Макмиллана в теории ускорителей заряженных частиц [2]. Фокусировка, обусловленная периодической неоднородностью, аналогична вторичному резонансу в резонансной теории возмущений гамильтоновых систем [3]. Особенно сильная фокусировка возникает при одновременном фокусирующем действии плавной и периодической неоднородностей.

1. Рассмотрим неоднородную среду, показатель преломления которой не зависит от координаты y и который можно представить в виде

$$n = n_0 + \alpha \cos(\phi),$$

где n_0 — показатель преломления однородной среды, α-константа, фаза периодической неоднородности определяется формулой

$$\phi = \int\limits_0^z k(z) \frac{dx}{dz} dz - \omega z. \tag{1}$$

Величина

$$d_z = \frac{2\pi}{\omega}$$

определяет период неоднородности вдоль оси z, а

$$d_x = \frac{2\pi}{k}$$

— период неоднородности вдоль оси x. Пусть в такой среде вдоль оси z распространяется луч. Уравнения траектории луча можно представить в виде ($p_y = \text{const} = 0$)

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{2}$$

где функция Гамильтона H равна

$$H = H(x,p,z) = -\sqrt{n^2(x,z) - p^2}.$$

Из уравнений (2), учитывая определение фазы (1), легко получить уравнение, описывающее динамику фазы,

$$\ddot{\phi} - \frac{\dot{k}}{k}(\dot{\phi} + \omega) - \frac{k^2 n^3 \alpha}{(n^2 - p^2)^2}\sin(\phi) = 0, \tag{3}$$

где $\dot{\phi} = d\phi/dz$. Если $k = \mathrm{const}$, то уравнение (3) представляет собой уравнение математического маятника

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \sin(\phi) = 0, \tag{4}$$

где

$$\Omega^2 = \frac{k^2 n^3 \alpha}{(n^2 - p^2)^2}.$$

Из формул (2) следует, что обобщенный импульс p может измениться наиболее существенно при условии $\dot{\phi} = 0$, т.е. при $k\dot{x} = \omega$. Если отождествить $\dot{x}$ со скоростью заряженной частицы, то это условие аналогично условию черенковского резонанса при взаимодействии частицы с электромагнитной волной. Аналогия оказывается еще более глубокой. Действительно, уравнения (3) и (4), описывающие динамику фазы неоднородности относительно луча, совпадают с уравнениями для фазы волны относительно частицы в теории линейных ускорителей [2]. Воспользуемся этой аналогией и введем понятие синхронного луча, т.е. луча (x_s, p_s), положение которого относительно фазы неоднородности не меняется и траектория которого описывается уравнениями

$$V_\Phi = \frac{dx_s}{dz} = \frac{p_s}{\sqrt{n^2 - p_s^2}}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\alpha k^2 V_\Phi}{\omega (n^2 - p_s^2)^{1/2}}\sin(\phi_s),$$

а синхронная фаза определяется условием $\dot{k}/k = \dot{V}_\Phi / V_\Phi$. Уравнение (3) при этом можно переписать в виде

$$\ddot{\phi} - \frac{\dot{k}}{k}\dot{\phi} + \Omega^2[\sin(\phi) - \sin(\phi_s)] = 0. \tag{5}$$

Для малых отклонений фазы от синхронной из (5) найдем

$$\ddot{\varphi} - \frac{\dot{k}}{k}\dot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0, \tag{6}$$

где

$$\Omega_0 = \frac{\alpha k^2 n_0^3}{(n_0^2 - p_s^2)^2}\cos(\phi_s).$$

Из (6) следует, что в области фаз, где $\cos(\phi_s) > 0$ лучи осциллируют вокруг положения синхронного луча. При $k < 0$ происходит динамическая фокусировка лучей, аналогичная автофазировке частиц.

2. Фокусировка лучей при наличии в волноведущей среде периодической неоднородности с периодом, кратным периоду осцилляций луча в волноводе, аналогична вторичному резонансу в резонансной теории возмущений гамильтоновых систем [1]. Рассмотрим случай, когда имеются как периодические, так и плавные неоднородности. Пусть в волноведущей среде вдоль оси z распространяется луч. Будем считать, что невозмущенный коэффициент преломления зависит только от координаты x. Зависимостью от координаты y, как и выше, будем пренебрегать. Траектория луча описывается системой уравнений (2). Функция Гамильтона $H = H_0(x,p)$ явно не зависит от z и обычным образом можно ввести канонические переменные — действие I и угол ϑ. Предположим, что возмущенный гамильтониан представлен в виде

$$H = H_0(I) + \varepsilon V(I, \vartheta, z),$$

где $\varepsilon \ll 1$, а возмущение V может быть задано в виде ряда

$$V = \frac{1}{2}\sum_{m,s} V_{ms}(I)\exp\left[im\vartheta + is\int\limits_0^z \varkappa(z)dz\right] + \text{к.с.}$$

Если $\varkappa$ не зависит от z, то возможны резонансы, определяемые условием

$$\dot{\phi} = m\omega(I) + s\varkappa = 0, \tag{7}$$

где $\omega(I) = \dot{\vartheta}$,

$$\phi = m\vartheta + s\int \varkappa(z)dz.$$

Когда резонансы разнесены достаточно далеко, динамика луча определяется одним изолированным резонансом

$$\dot{I} = \varepsilon m V_{ms}\sin(\phi),$$

$$\dot{\vartheta} = \omega(I) + \varepsilon\frac{\partial V_{ms}}{\partial I}\cos(\phi),$$

$$\dot{\phi} = m\omega(I) + s\varkappa. \tag{8}$$

Уравнения (8) справедливы как для постоянной величины $\varkappa$, так и для случая ее медленного изменения. При постоянной $\varkappa$ уравнения (8) эквивалентны уравнению математического маятника. При этом лучи, захваченные в изолированный резонанс (7), будут оставаться в ограниченной области фазового пространства, размер которой определяется размером нелинейного резонанса [1]. Таких областей (резонансов) может быть много и при достаточно большой амплитуде возмущения они могут перекрыться. В результате регулярное движение лучей сменится хаотическим.

Пусть

$$\varkappa(z) = \frac{2\pi}{\lambda(z)},$$

т.е. имеются периодическая и плавная неоднородности. В этом случае уравнение для определения ϕ имеет вид

$$\ddot{\phi} - \beta \sin\phi + \frac{1}{2\pi s}(\dot{\phi} - m\omega)^2 \frac{d\lambda}{dz} = 0, \tag{9}$$

где

$$\beta = m^2 \varepsilon V_{ms} \frac{\partial\omega}{\partial I}.$$

При медленной зависимости λ от z функцию можно аппроксимировать линейной функцией $\lambda = \lambda_0 + \alpha z$. Тогда уравнение (9) имеет следующие стационарные точки:

$$\phi_n = 0, \quad \phi_n = \arcsin\left[\frac{\alpha\omega^2}{2\pi s\varepsilon V_{ms}\frac{\partial\omega}{\partial I}}\right] + 2\pi n.$$

Малые отклонения фазы удовлетворяют уравнению

$$\ddot{\varphi} + -\frac{\alpha}{\lambda_0}\dot{\varphi} - \beta\cos(\phi_n)\varphi = 0. \tag{10}$$

Из (10) следует, что при $\beta\cos(\phi_n) < 0$ вокруг стационарной фазы совершаются регулярные колебания. Если $\alpha/\lambda_0 > 0$, то амплитуда этих колебаний затухает с ростом z.

Можно показать, что динамическая фокусировка (дефокусировка) лучей имеет место и при медленном изменении других параметров волноведущей среды. Действительно, в реальных волноводах коэффициент преломления $n(r)$ кроме регулярной составляющей содержит и флуктуации $n^2 = n_0^2 + q$. Последние приводят к рассеянию лучей. Так, если $\xi = \dot{q}$ представляет собой дельта-коррелированный шум $\langle\zeta(z)\zeta(z^2)\rangle = 2D\delta(z - z')$, то легко показать, что вторые моменты экспоненциально нарастают с расстоянием

$$\sigma = \sigma_0 \exp[(4D\cos(\phi_s))^{1/3}].$$

Флуктуации не будут влиять на распространение лучей, если

$$\alpha > 2\lambda_0(4D\cos(\phi_s))^{1/3}.$$

Список литературы

[1] *Абдуллаев С.С., Заславский Г.М.* // ЖЭТФ. 1981. Т. 80. С. 524–531.
[2] *Власов А.Д.* // Теория линейных ускорителей. М.: Атомиздат, 1965. 307 с.
[3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.