КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

01 *Журнал технической физики, т. 65, в. 6, 1995*

ДВУХСОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С КОНДЕНСАТНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Х.О.Абдуллоев, Х.Х.Муминов, В.Г.Маханьков, Ф.К.Рахимов, Х.С.Якубова

Таджикский государственный университет,
734025, Душанбе, Таджикистан
(Поступило в Редакцию 1 июня 1994 г.)

Как известно, в последние годы алгебро-геометрический метод интегрирования [1,2] стал одним из методов построения широкого класса решений ряда фундаментальных нелинейных уравнения математической физики. Этот метод позволяет получить в явном виде известные и новые многосолитонные решения данных уравнений, в частности нелинейного уравнения Шредингера [3] (НУШ), и является одним из методов, позволяющих получать решения и в тех случаях, когда для вспомогательных нелинейных задач нет последовательного решения прямой и обратной задачи рассеяния [1].

Впервые этот метод был предложен И.А. Чередником для построения решений векторных версий НУШ [1] и в дальнейшем развит в [2–6]. Однако, частота при исследовании нелинейных волновых процессов используются системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих взаимодействие конечного числа волн,

$$iU_t + U_{xx} + \Phi(x,t)U = 0. \tag{1}$$

Здесь роль потенциала выполняет низкочастотная волна, описываемая следующими уравнениями:

$$(\partial_t + \partial_x)\Phi = \pm|\Psi|^2_x \quad [^7], \tag{2}$$

$$(0 + \alpha\partial_x^4)\Phi - \beta\partial_x^2\Phi = -|\Psi|^2_{xx} \quad [^8]. \tag{3}$$

Следует отметить, что соотношения (1)–(3) в подавляющем большинстве случаев описывает магнитные кристаллы, обладающие слоистой структурой, в которых взаимодействие между слоями влияет на динамическое поведение кристалла. В низкотемпературном пределе их можно отождествить с моделями бозе-газа.

Особенно большой интерес представляет получение и исследование новых, ранее неизвестных решений некоторых версий НУШ. Как известно, широкий класс нелинейных явлений физики конденсированного состояния, плазмы, нелинейной оптики и т.д. описывается этим же уравнением. Как показали недавние экспериментальные результаты, распространение оптических импульсов в волоконных световодах хорошо описывается НУШ.

Для передачи информаций в волоконных световодах предпочтение отдается многосолитонным конфигурациям, исключающим переход к линейному режиму с существенным подавлениям дисперсии [9]. В связи с этим представляет интерес нахождение новых многосолитонных решений НУШ, которые в частном случае можно использовать в качестве носителя информации в световолокне.

В настоящей работе, используя метод делинеаризации, который был разработан в [5], нами построены и исследованы двухсолитонные неубывающие решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера (СНУШ) с потенциалами, которые описываются уравнениями (2) и (3).

В рамках этой теории рациональная функция $E(k)$ и условия самосогласования для потенциала $\Phi(x,t)$, который описывается уравнениями Яджима–Ойкава, имеет следующий вид:

$$E(k) = k^2 + \alpha k + \varepsilon \frac{b^2}{k - k_1} \tag{4}$$

и

$$\frac{\dot{U}}{2} + \alpha \frac{U'}{2} = \varepsilon |\Phi(x,t)_x|^2 - \left(\sum_{i,j=1}^{2} \bar{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j \right)_x . \tag{5}$$

Сама рациональная функция $E(k)$ и условие самосогласования для исходного потенциала записываются соотношением

$$E(k) = k^3 + \beta k^2 + \gamma k + \frac{\varepsilon b^2}{k - k_1} \tag{6}$$

и

$$\frac{3}{8}\ddot{U} - \frac{1}{8}(U_{xx} - 6UU_x)_x + \beta \frac{\dot{U}_x}{2} + \gamma \frac{U_{xx}}{2} = \varepsilon |\Psi|^2_{xx} - \left(\sum_{i,j=1}^{2} \bar{\Psi}_i E_{ij} \Psi_j \right), \tag{7}$$

где

$$E_{ij} = C_{ij}(\overline{E(\varkappa_i)} - E(\varkappa_j)). \tag{8}$$

Для построения неубывающих (осциллирующих) решений НУШ возьмем функцию $E(k)$ следующего вида:

$$E(k) = k + \varepsilon \frac{b^2}{k - k_1}. \tag{9}$$

Эрмитова форма (E_{ij}) вида (8) обязана быть нулевой. Другими словами, должны выполняться условия склейки

$$E\overline{(\varkappa_i)} = E(\varkappa_j) \quad \text{при}\, C_{ij} \neq 0. \tag{10}$$

Для начала матрицу (C_{ij}) примем в диагональном виде

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{12} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Решения этих уравнений дают такие результаты:

$$(\alpha_1 - k_1)^2 + \beta_1^2 = \varepsilon b^2, \tag{12}$$

$$(\alpha_2 - k_1)^2 + \beta_2^2 = \varepsilon b^2.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon = 1$ и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ лежат на окружности с центром в точке к вещественной оси. При выборе матрицы (11) мы приходим к решению НУШ с отталкиванием

$$i\dot{\varphi} - \varphi_{xx} + 2(|\varphi|^2 - b^2)\varphi = 0. \tag{13}$$

В явном виде решение уравнения (13) выражается следующим образом:

$$\varphi = b\left[1 + \frac{B_3\,\mathrm{ch}(\beta^-(x+v^-t) - h_3) + B_4 e^{\beta^+(x+v^+t)}}{B_1\,\mathrm{ch}(\beta^+(x+v^+t) + h_1) + B_2\,\mathrm{ch}(\beta^-(x+v^-t) + h_2)}\right] e^{ik_1(x+k_1t)}, \tag{14}$$

где

$$B_1 = \left(\frac{c_{11}c_{22}|\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2\varkappa_m\varkappa_{22}}\right)^{1/2}, \quad e^{h_1} = \left[\frac{|\varkappa_{12}|^2}{c_{11}c_{22}\varkappa_{11}\varkappa_{22}|\bar{\varkappa}_{12}|^2}\right]^{1/2},$$

$$B_2 = \left(\frac{c_{11}c_{22}}{\varkappa_{11}\varkappa_{22}}\right)^{1/2}, \quad e^{h_2} = \left[\frac{c_{11}\varkappa_{11}}{c_{22}\varkappa_{22}}\right]^{1/2},$$

$$B_3 = \left[\frac{c_{11}c_{22}}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)}\right]^{1/2}, \quad e^{-h_3} = \left[\frac{c_{22}(k_1 - \varkappa_2)}{c_{11}(k_1 - \varkappa_1)}\right]^{1/2},$$

$$B_4 = -\frac{\bar{\varkappa}_{12}}{2}\left[\frac{1}{\varkappa_{21}\varkappa_{11}(k_1 - \varkappa_1)} - \frac{1}{\varkappa_{12}\varkappa_{22}(k_1 - \varkappa_{11})}\right],$$

$$V^{\pm} = \frac{2(\alpha_2\beta_2 \pm \alpha_1\beta_1)}{\beta_2 \pm \beta_1}, \varkappa_{ij} = \varkappa_i - \varkappa_j, \bar{\varkappa}_{ij} = \bar{\varkappa}_{ij} - \varkappa_j,$$

$$\beta^{\pm} = \beta_1 \pm \beta_2; \quad i,j = 1,2. \tag{15}$$

Обратимся теперь к матрице (c_{ij}) антидиагонального вида

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Условия склейки имеют следующий вид:

$$E(\overline{\varkappa_1}) = E(\varkappa_2), \quad E(\overline{\varkappa_2}) = E(\varkappa_1). \tag{17}$$

Решая эти равенства, имея в виду (9), получим

$$\alpha_1 - \beta_1 = \varepsilon b^2 \frac{\alpha_2 - k_1}{(\alpha_2 - k_1)^2 + \beta_2^2},$$

$$\beta_1 = \varepsilon b^2 \frac{\beta_2}{(\alpha_2 - k_1)^2 + \beta_2^2}. \tag{18}$$

Поскольку матрица (C_{ij}) антидиагональна, то условие “перегонки” полюсов $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ в одну полуплоскость без изменения решения не выполняется. Поэтому при $\varepsilon = -1$, что соответствует НУШ с притяжением,

$$i\dot{\varphi} - \varphi_{xx} - 2(\varphi^2 - b^2)\varphi = 0. \tag{19}$$

Решения уравнения (19) можем написать в виде:

$$\varphi = b\left(1 + \frac{C_3\cos(qx + \omega t + \omega_{02}) + C_4 e^{\beta^+(x+v^+t)}}{C_1\,\mathrm{ch}(\beta^+(x+v^+t) + h_1) + C_2\cos(qx + \omega t + \omega_{01})}\right) e^{ik_1(x+k_1t)}, \tag{20}$$

где

$$C_3 = -\left[\frac{c_{12}c_{21}}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)}\right], \quad e^{i\omega_{02}} = \left[\frac{c_{12}}{c_{21}}\frac{k_1 - \varkappa_2}{k_1 - \varkappa_1}\right]^{1/2},$$

$$C_4 = -\frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\varkappa}_{21}}{(k_1 - \varkappa_1)\bar{\varkappa}_{22}\bar{\varkappa}_{12}}\right] + \left[\frac{\bar{\varkappa}_{12}}{(k_1 - \varkappa_2)\bar{\varkappa}_{21}\bar{\varkappa}_{22}}\right],$$

$$C_1 = \left[\frac{|c_{12}|^2|\varkappa_{12}|^2}{|\bar{\varkappa}_{12}|^2\bar{\varkappa}_{11}\bar{\varkappa}_{22}}\right]^{1/2}, \quad e^{h_1} = \left[\frac{|\varkappa_{12}|^2}{|c_{12}|^2\bar{\varkappa}_{11}\bar{\varkappa}_{22}|\bar{\varkappa}_{12}|^2}\right],$$

$$C_2 = \left[\frac{c_{12}c_{21}}{\bar{\varkappa}_{12}\bar{\varkappa}_{21}}\right]^{1/2}, \quad e^{i\omega_{01}} = \left[\frac{c_{12}\bar{\varkappa}_{12}}{c_{21}\bar{\varkappa}_{21}}\right]^{1/2},$$

$$q = \alpha_2 - \alpha_1, \quad \omega = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + (\beta_1^2 - \beta_2^2). \tag{21}$$

Для вычисления сдвиг фаз солитонов необходимо вычислить их асимптотики $|x| \to \pm\infty$ при $\beta^+ > 0$, где решение (14), (20) дает

$$\varphi_{x\to-\infty} = be^{ik_1(x+k_1t)},$$

$$\varphi_{x\to+\infty} = be^{ik_1(x+k_1t)+ih},$$

что приводит к сдвигу фаз

$$\Delta\Theta = \Theta_{+\infty} - \Theta_{-\infty} = ih,$$

где

$$\eta = i\ln\left[\frac{(k_1 - \bar{\varkappa}_1)(k_1 - \bar{\varkappa}_2)}{(k_1 - \varkappa_1)(k_1 - \varkappa_2)}\right].$$

В случае $\beta^+ < 0$ асимптотики по x меняются местами. Следует отметить, что в зависимости от взаимного расположения полюсов k_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ решение (14) может быть как солитонным, так и квазипериодическим.

1) $$\beta_1 + \beta_2 = 0$$
$$\varphi\left(x + \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \varphi(x,t)e^{2\pi i k_1\left(\frac{1}{q} + \frac{k_1}{\omega}\right)}, \tag{22}$$
т.е., как видно, решение квазипериодично по x и t.

2) $$\beta_1 + \beta_2 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$
$$\varphi\left(x + \frac{2\pi}{T}, t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \varphi(x,t)e^{2\pi i k_1/q}. \tag{23}$$

Решение квазипериодично по x.

3) $$\beta_1 + \beta_2 = 0 \quad \alpha_1 = \alpha_2$$
$$\varphi(x,t) = be^{ik_1(x+k_1t)}. \tag{24}$$

Решение имеет вид плоской волны.

4) Случай, когда $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$, $\alpha_2^2 - \alpha_1^2 \neq 0$, самый интересный. Он приводит к новому двухсолитонному решению, имеющему вид
$$\varphi(x,t) = b\left[1 + \frac{C_3\cos(qx + \tilde{\omega}t + \omega_{02}) + C_4e^{\beta^+\xi}}{C_1\,\mathrm{ch}(\beta^+\xi + h_1) + C_2\cos(q\xi + \omega t + \omega_{01})}\right]e^{ik_1(\xi+k_1t)}, \tag{25}$$
где
$$\tilde{\omega} = \omega - qv^+, \quad k_1' = k_1 - v^+.$$

Из (25) видно, что решение локализовано по переменной ξ, т.е. это действительно солитон. При этом центр масс солитона движется со скоростью v^+, а форма солитона изменяется с периодом T
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega - qv^-}.$$

Вариация формы солитона экспоненциально затухает на бесконечности по ξ. На наш взгляд, солитон такого типа принципиально отличается от известных своей динамикой и наличием внутренней степени свободы, характеризуемой частотой $\tilde{\omega}$. Поэтому по аналогии с бризерами уравнения SG назовем это решение бризером СНУШ. Как и бризеры SG, эти бризеры обладают энергией связи. Известно, что величина энергии связи зависит от значения констант ω и q в (20). В пределе ω, $q \to 0$ энергия связи тоже стремится к нулю энергия бризера состоит из суммы энергии каждого солитона, энергия i-го солитона определяется полюсом $\varkappa_i$. Введем функцию
$$E(\varkappa_i, \varkappa_j) = \int [|\varphi_x(\varkappa_i, \varkappa_j)|^2 - (|\varphi(\varkappa_i, \varkappa_j)|^2 - b^2)^2]dx. \tag{26}$$

Теперь посмотрим, как располагаются полюса $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Нами был исследован самый простой случай, когда в (4)–(7) $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $k = 0$. Выполняя условия склейки для (4), получаем
$$\bar{\varkappa}_1^2 - \frac{b^2}{\bar{\varkappa}_1} = \bar{\varkappa}_2^2 - \frac{b^2}{\varkappa_2}.$$

Решая это уравнение, находим

$$\varkappa_2 = -\frac{\bar{\varkappa}_1}{2}\left(1 \mp \sqrt{\bar{\varkappa}_1^2 - \frac{4b^2}{\bar{\varkappa}_1}}\right), \tag{27}$$

т.е., задавая $\varkappa_1$, можно определить положение $\varkappa_2$. Из (27) видно, что для каждой E существуют два корня $\varkappa_2^+$ и $\varkappa_2^-$ соответственно

$$\varkappa_2^{\pm} = -\frac{\bar{\varkappa}_1}{2}\left(\sqrt{\bar{\varkappa}_1^2 - \frac{4b^2}{\varkappa_1}}.\right)$$

Нами был проведен численный эксперимент, который позволяет заключить, что а) при $|\varkappa_1| \gg b$ и $\varkappa_1$ первом и втором квадрантах $\varkappa_2 \pm \bar{\varkappa}_1$ или $\varkappa_2 = 0$, 2) третьем и четвертом квадрантах $\varkappa_2 = \pm\varkappa_1$ или $\varkappa_2 = 0$; б) при $|\varphi_1| = (4b^2)^{1/3}$ и φ_1 1) в первом квадранте $\varphi_2 = -(\varphi_1/2)$ и $\varkappa_2 = -(\bar{\varkappa}_1/2)$, 2) во втором квадранте $\varkappa_2 = -(\varkappa_1/2)$ и $\varkappa_2 = -(\varkappa_1/2)$.

В четвертом и втором квадрантах $\varkappa_2$ будут такие, как в первом и третьем, но сопряжены, поскольку они симметричны относительно действительной оси.

в) Когда φ_1 находится внутри круга с радиусом b, то $\varkappa_2^+$ и $\varkappa_2^-$ находятся вне круга, один из корней будет внутри круга, а другой вне его, г) когда $|\varkappa_1| > b$ и $|\varkappa_1| < b$, то, соединяя точки $\varkappa_1$, $\varkappa_2^+$, $\varkappa_2^-$, можно построить треугольники, которые являются симметричными относительно действительной оси, т.е., зная для $\varkappa_1$ корни $\varkappa_2^+$ и $\varkappa_2^-$, можно предсказать для $\bar{\varkappa}_1$ корни (они будут соответственно $\bar{\varkappa}_2^+$ и $\bar{\varkappa}_2^-$).

Для (3) условия склейки имеют следующий вид:

$$\bar{\varkappa}_1^3 - \frac{b^2}{\bar{\varkappa}_1} = \varkappa_2^3 - \frac{b^2}{\varkappa_2}.$$

Аналогично решено и проведено численное исследование этого кубического уравнения.

В этом случае для каждой $\varkappa_1$ существует три варианта расположения $\varkappa_2$, т.е. корней уравнения $\varkappa_2(1)$, $\varkappa_2(2)$ и $\varkappa_2(3)$. По полученным данным можно заключить, что а) при $|\varkappa_1| \ll b$ и $|\varkappa_1| \gg b$ ни один из корней не находится внутри круга; б) при $|\varkappa_1| < b$ из трех корней один находится вне круга, а два из них находятся внутри.

Как нам известно, для СНУШ с отталкиванием существовали только регулярные односолитонные решения и не существовали регулярные двухсолитонные решения, а для СНУШ с притяжением, наоборот, существовали регулярные двухсолитонные решения, а для СНУШ с притяжением, наоборот, существовали регулярные двухсолитонные решения и не существовало регулярных односолитонных решений.

Проведенные нами исследования показали, что для СНУШ с потенциалами, которыми описываются уравнения Яджима–Ойкава и ММК, существуют как односолитонные, так и двухсолитонные регулярные решения с притяжением, но есть области, в которых не имеется регулярных решеняи СНУШ с этими потенциалами. Эти области мы называли “запрещенными”, в будущем исследования будут посвящены изучению таких областей.

Список литературы

[1] *Чередник И.В.* // Функциональный анализ и его приложения. 1978. Т. 12. № 3. С. 42.
[2] *Кричевер И.М.* // Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20. № 3. С. 42.
[3] *Абдуллоев Х.О., Муминов Х.Х., Максудов А.Т.* // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 3. С. 180.
[4] *Елеонский В.М., Кричевер И.М., Кулагин И.Е.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287. С. 606.
[5] *Чередник И.В.* // ДАН СССР. 1980. Т. 252. С. 1104.
[6] *Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г.* // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. № 3. С. 579.
[7] *Jojima N., Oikawa M.* // Progr. Theor. Phys. 1976. Vol. 56. P. 1719.
[8] *Makhankov V.* //Phys. Lett. 1974. Vol. 50A. P. 42.
[10] *Хасагава А., Кодами Ю.* // ТИИЭР. 1981. Vol. 69. С. 57–63.

---

04 *Журнал технической физики, т. 65, в. 6, 1995*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОБИВНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВЫСОКОВОЛЬТНОЙ СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ И КАСКАДНЫХ УСКОРИТЕЛЕЙ

И.Г.Игнатьев

(Поступило в Редакцию 5 февраля 1994 г.)

Задача определения пробивного напряжения ускорителей прямого действия возникает при оптимизации геометрических параметров электродов высоковольтной структуры, состава и давления изолирующих газов.

Так как форма электродов (кондуктора, градиентных колец и бака) сложна, а их активная площадь превышает сотни квадратных сантиметров, то методы определения пробивного потенциала на основе закона Пашена или методики Бортника [1] в данном случае дают высокую относительную погрешность (как правило, сотни процентов) и расчет носит оценочный характер.

В работе [2] предложен метод, основанный на аппроксимации пробивного напряжения базовой модели ускорителя (для которой пробивное напряжение известно из опыта) на исследуемую конструкцию. Метод позволяет достигнуть точности расчета порядка систематической погрешности эксперимента и особенно эффективен при модернизации уже существующих ускорителей [3]. Недостаток метода — необходимость проведения предварительных экспериментов на базовой модели.

В данной работе предложено определять пробивное напряжение электростатических и каскадных генераторов на основе моделирования главной характеристики высоковольтной структуры — функции