

01;10

©1995 г.

НЕЛАПЛАСОВЫ КРУГОВЫЕ МУЛЬТИПОЛИ

В.В.Зашквара, Н.Н.Тындык

Физико-технический институт АН Республики Казахстан,
480082, Алма-Ата, Казахстан

(Поступило в Редакцию 9 августа 1994 г.

В окончательной редакции 13 марта 1995 г.)

Построен нелапласов круговой мультиполь и рассмотрена принципиальная возможность корректирующего воздействия его на угловую фокусировку электростатического анализатора дефлекторного типа.

Среди известных потенциальных полей, удовлетворяющих уравнению Лапласа, особое место принадлежит мультиполям, содержащим узловые точки или линии, в которых сходятся нулевые эквипотенциальные поверхности, разделяющие поле на области с потенциалами противоположного знака. Простейшей мультипольной структурой является планарный мультиполь в общем случае второго порядка $U_n(x, y)$ [1], содержащий n плоскостей симметрии и столько же плоскостей антисимметрии, пересекающихся на оси мультиполя и расположенных эквидистантно по полярному углу. Например, секступоль $n = 3$ (рис. 1) содержит по три плоскости симметрии и антисимметрии; он реализуется в области, окруженной шестью симметрично расположенными электродами гиперболического профиля с чередующимися по знаку потенциалами. Приведем несколько формул, описывающих планарные мультиполи в декартовой системе координат x, y , в которой они являются однородными полиномами двух переменных,

$$U_2 = x^2 - y^2 \text{ — квадруполь,} \quad U_3 = x^3 - 3xy^2 \text{ — секступоль,}$$

$$U_4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \text{ — октуполь,} \quad U_5 = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \text{ — декаполь.} \quad (1)$$

Мультипольные поля с прямолинейной осью нашли применение в электронной оптике [2-4].

Более сложными по своей структуре являются мультиполи с криволинейной осью, в частности круговые мультиполи, осевая линия которых представляет собой окружность некоторого радиуса r_0 . Эти поля лишены элементов симметрии относительно осевой линии из-за

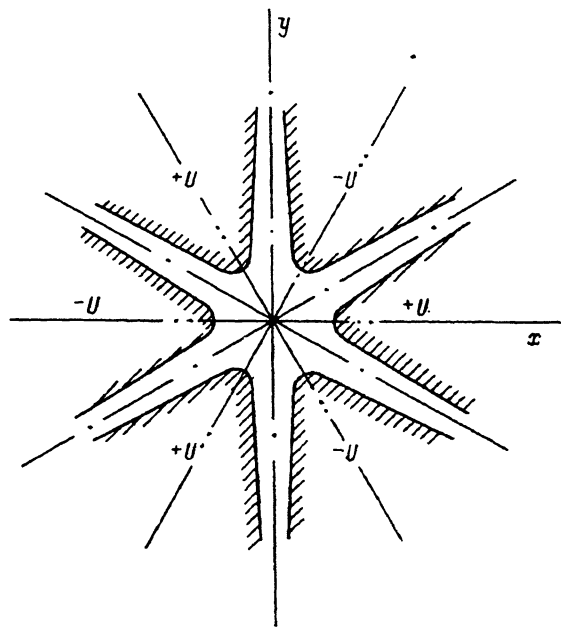


Рис. 1. Планарный секступоль.

ее искривления. Для аналитического представления круговых мультиполей в работах [5,6], предложен новый подход к решению уравнения Лапласа. Было показано, что, например, в цилиндрической системе координат круговой мультиполь можно представить суммой

$$U_n(\rho, \xi) = \sum_{m=0}^n \varphi_{n-m}(\xi) f_m(\rho), \quad (2)$$

где $\varphi_n(\xi)$ и $f_n(\rho)$ — аксиальные и радиальные функции, являющиеся решениями цепочек обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, дифференциальные операторы которых представляют собой разделенные по координатам ρ и ξ части оператора Лапласа; $\xi = z/r_0$, $\rho = (r - r_0)/r_0$.

Методом разделения оператора Лапласа в работах [5,6] был построен новый класс гармонических функций — круговые мультиполи, что позволило распространить мультипольный подход на электронно-оптические системы с круговой осью и применить их к решению задачи синтеза электростатических и магнитных полей анализаторов дефлекторного типа.

Целью настоящей работы являются 1) приложить метод разделения оператора Лапласа к решению уравнения Пуассона

$$\Delta V = F(\rho, \xi) \quad (3)$$

и в цилиндрической системе координат установить класс функций, допускающих существование мультипольных конфигураций среди решений уравнения (3); 2) получить решения уравнения (3) этим методом и построить нелапласовы мультипольные структуры; 3) показать, что

нелапласовы электростатические поля со структурой кругового мультиполя в принципе могут оказывать дополнительное корректирующее воздействие на угловые аберрации изображения в анализаторах с круговой осью.

Для решения первой из поставленных задач методом разделения оператора Лапласа введем два множества функций; $f_i(\rho)$ — радиальных и $\varphi_i(\xi)$ — аксиальных. В точке $\rho = \xi = 0$ для этих функций примем нулевые граничные условия

$$f_i(0) = \left. \frac{df_i}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_i(0) = \left. \frac{d\varphi_i}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad i \neq 0.$$

Полагаем, что f_i и φ_i удовлетворяют цепочкам дифференциальных уравнений

$$T f_0 = \Omega(\rho),$$

$$T f_1 = -f_0,$$

.....

$$T f_n = -f_{n-1},$$

$$\dots\dots\dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

$$\tau \varphi_n = \varphi_{n-1}, \quad (5)$$

T и τ — разделенные по координатам части оператора Лапласа

$$T = \frac{1}{1+\rho} \frac{d}{d\rho} \left[(1+\rho) \frac{d}{d\rho} \right], \quad \tau = \frac{d^2}{d\xi^2}. \quad (6)$$

Множество функций φ_i остается таким же, как и для случая лапласовых мультиполей [5,6]

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{(2n)!} \xi^{2n},$$

если в качестве базовой функции взята постоянная $\varphi_0(\xi) = 1$,

$$\varphi_n(\xi) = \frac{1}{(2n+1)!} \xi^{2n+1},$$

если $\varphi_0(\xi) = \xi$. В первом уравнении системы (4) $\Omega(\rho)$ — некоторая функция ρ , связь которой с $F(\rho, \xi)$ необходимо установить. Решение уравнения Пуассона ищем в виде

$$V_n(\rho, \xi) = \sum_{m=0}^n \varphi_{n-m} f_m. \quad (7)$$

Применим оператор $\Delta = T + \tau$ к обеим частям равенства (7)

$$\begin{aligned} \Delta V_n &= F(\rho, \xi) = \sum_{m=0}^n \varphi_{n-m}(T f_m) + \sum_{m=0}^n (\tau \varphi_{n-m}) f_m = \\ &= \varphi_n(\xi) \Omega(\rho) - \sum_{m=1}^n \varphi_{n-m} f_{m-1} + \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{n-m-1} f_m = \varphi_n(\xi) \Omega(\rho), \end{aligned} \quad (8)$$

так как

$$\sum_{m=1}^n \varphi_{n-m} f_{m-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_{n-m-1} f_m.$$

Согласно (8), функция $F(\rho, \xi)$ должна быть

$$F(\rho, \xi) = \varphi_n(\xi) \Omega(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{(2n)!} \xi^{2n} \Omega(\rho), & \text{если } \varphi_0 = 1, \\ \frac{1}{(2n+1)!} \xi^{2n+1} \Omega(\rho), & \text{если } \varphi_0 = \xi. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (3) решается методом разделения оператора Лапласа, если функция $F(\rho, \xi)$ является произведением степенной функции от ξ на произвольную функцию от ρ . Справедлива и обратная формулировка полученного результата: если в уравнении Пуассона (3) $F(\rho, \xi) = \xi^N \omega(\rho)$, где $\omega(\rho)$ — некоторая гладкая функция, N — целое положительное число, то решением уравнения (3) методом разделения оператора Лапласа является сумма (7), в которой $n = N/2$, если N четно, и $n = (N - 1)/2$, если N нечетно. Множество радиальных функций f_i удовлетворяет n уравнениям цепочки дифференциальных уравнений (4), причем $\Omega(\rho) = N! \omega(\rho)$. Множество аксиальных функций $\varphi_i(\xi)$ суть

$$\varphi_n = \frac{1}{(2n)!} (\xi)^{2n}, \quad n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad \text{если } N \text{ четно,}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{(2n+1)!} (\xi)^{2n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \quad \text{если } N \text{ нечетно.} \quad (10)$$

Функции $f_i(\rho)$ и $\varphi_i(\xi)$ удовлетворяют нулевым граничным условиям в точке $\rho = \xi = 0$.

Решим вторую из поставленных нами задач и покажем, что решения $V_n(\rho, \xi)$ имеют конфигурацию видоизмененных круговых мультиполей, содержащих узловую точку $\rho = \xi = 0$.

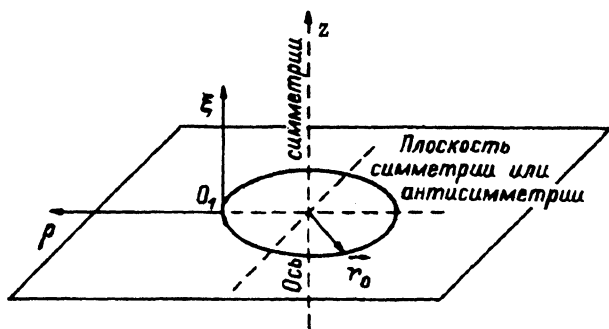


Рис. 2. Элементы геометрии, поясняющие вывод нелапласовых круговых мультиполей в цилиндрической системе координат.

На рис. 2 изображены элементы геометрии, поясняющие описание нелапласовых круговых мультиполей. В окрестности точки $O_1(\rho = \xi = 0)$ структура $V_n(\rho, \xi)$ определяется главной частью, т.е. вкладом в сумму (7) парных произведений $\varphi_{n-m} \cdot f_m$, входящих в разложение $V_n(\rho, \xi)$ с низшими степенями ρ и ξ . Выделим эти вклады. Представим функцию $N!\omega(\rho)$ в виде ряда $N!\omega(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$, затем с учетом нулевых граничных условий степенными рядами $f_s(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(s)} \rho^n$ решим систему уравнений (4). В итоге получим разложения по ρ радиальных функций f_i

$$f_0 = b_2^{(0)} \rho^2 + b_3^{(0)} \rho^3 + b_4^{(0)} \rho^4 + \dots = \frac{1}{2} a_0 \rho^2 - \frac{1}{6} (a_0 - a_1) \rho^3 + \\ + \left(\frac{1}{8} a_0 - \frac{1}{24} a_1 + \frac{1}{12} a_2 \right) \rho^4 + \left(-\frac{1}{10} a_0 + \frac{1}{36} a_1 - \frac{1}{60} a_2 + \frac{1}{20} a_3 \right) \rho^5 + \\ + \left(\frac{1}{12} a_0 - \frac{1}{36} a_1 + \frac{1}{72} a_2 - \frac{1}{120} a_3 + \frac{1}{30} a_4 \right) \rho^6 + \dots, \quad (11)$$

$$f_1 = b_4^{(1)} \rho^4 + b_5^{(1)} \rho^5 + b_6^{(1)} \rho^6 + \dots = -\frac{1}{24} a_0 \rho^4 + \left(\frac{1}{60} a_0 - \frac{1}{120} a_1 \right) \rho^5 + \\ + \left(-\frac{1}{80} a_0 + \frac{1}{360} a_1 - \frac{1}{360} a_2 \right) \rho^6 + \dots, \quad (12)$$

$$f_2 = b_6^{(2)} \rho^6 + b_7^{(2)} \rho^7 + \dots = \frac{1}{720} a_0 \rho^6 + \left(-\frac{1}{1680} a_0 + \frac{1}{5040} a_1 \right) \rho^7 + \dots \quad (13)$$

и так далее. Из формул (11)–(13) видно, что, как следствие цепочечной структуры системы дифференциальных уравнений (4) и нулевых граничных условий для f_i , отношение $f_n/f_{n-1} \rightarrow \rho^2$ при $\rho \rightarrow 0$. Поэтому, если $a_0 \neq 0$, то при $\rho \rightarrow 0$, согласно (11)–(13), имеем

$$f_0 \sim \frac{1}{2} a_0 \rho^2, \quad f_1 \sim -\frac{1}{24} a_0 \rho^4, \quad f_2 \sim \frac{1}{720} a_0 \rho^6, \dots \quad (14)$$

Применив формулы (7), (10), (14), определим главные части $V_n(\rho, \xi)$ при $\rho, \xi \rightarrow 0$, когда 1) N четно

$$N = 0 \quad V_0 = \varphi_0 f_0 \sim a_0 \rho^2,$$

$$N = 2 \quad V_1 = \varphi_1 f_0 + \varphi_0 f_1 \sim a_0 \rho^2 \left[\xi^2 - \frac{1}{6} \rho^2 \right],$$

$$N = 4 \quad V_2 = \varphi_2 f_0 + \varphi_1 f_1 + \varphi_0 f_2 \sim a_0 \rho^2 \left[\xi^4 - \rho^2 \xi^2 + \frac{1}{15} \rho^4 \right]; \quad (15)$$

2) N нечетно

$$N = 1 \quad V'_0 \sim a_0 \rho^2 \xi,$$

$$N = 3 \quad V'_1 \sim a_0 \rho^2 \xi \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right),$$

$$N = 5 \quad V'_2 \sim \rho^2 \xi \left(\xi^4 - \frac{5}{3} \rho^2 \xi^2 + \frac{1}{3} \rho^4 \right). \quad (16)$$

Допустим, что $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$, тогда из соотношений (11)–(13) следует

$$f_0 \sim \frac{1}{6} a_1 \rho^3, \quad f_1 \sim -\frac{1}{120} a_1 \rho^5, \quad f_2 \sim \frac{1}{5040} a_1 \rho^7, \dots \quad (17)$$

Главные части $V_n(\rho, \xi) \Big|_{\rho, \xi \rightarrow 0}$ суть 1) N четно

$$N = 0 \quad V_0 \sim a_1 \rho^3,$$

$$N = 2 \quad V_1 \sim a_1 \rho^3 \left(\xi^2 - \frac{1}{10} \rho^2 \right),$$

$$N = 4 \quad V_2 \sim a_1 \rho^3 \left(\xi^4 - \frac{3}{5} \rho^2 \xi^2 + \frac{1}{35} \rho^4 \right); \quad (18)$$

2) N нечетно

$$N = 1 \quad V'_0 \sim a_1 \rho^3 \xi,$$

$$N = 3 \quad V'_1 \sim a_1 \rho^3 \xi \left(\xi^2 - \frac{3}{10} \rho^2 \right),$$

$$N = 5 \quad V'_2 \sim a_1 \rho^3 \xi \left(\xi^4 - \rho^2 \xi^2 + \frac{1}{7} \rho^4 \right). \quad (19)$$

Точка $\rho = \xi = 0$ является узловой для всех полученных решений, поэтому формулы (15)–(19), описывающие главные части функций $V_n(\rho, \xi)$, выявляют основные структурные особенности этих функций.

1) Из сравнения главных частей решений (18), (19) и главных частей круговых мультиполей, приведенных в работах [5,6], следует, что функции V_0, V_1, V_2, \dots (18) описывают видоизмененные диполь, гексаполь, декаполь и т.д., а функции V'_0, V'_1, V'_2, \dots (19) — антисимметричные квадруполь, октуполь, додекаполь и т.д. В рассматриваемом случае главная часть функции $F(\rho, \xi)$ в окрестности $\rho = \xi = 0$ содержит в качестве множителя нечетную степень ρ , благодаря этому структура функций (18) и (19) соответствует принятому определению мультиполя как образования, состоящего из чередующихся по знаку потенциала полей, разделенных нулевыми эквипотенциальными поверхностями. Назовем эти функции нелапласовыми круговыми мультиполями.

2) Если главная часть $F(\rho, \xi)$ содержит в качестве множителя четную степень ρ , то решения $V_n(\rho, \xi)$ не являются полными аналогами круговых мультиполей. Отступления проявляются в том, что по обе стороны оси ξ , совпадающей с нулевой эквипотенциалью, соседствуют области поля с одинаковыми по знаку потенциалами. Назовем такие структуры неполными нелапласовыми круговыми мультиполями. В соответствии с этим определением функции V_0, V_1, V_2, \dots (15) описывают неполный диполь, гексаполь, декаполь, ... и т.д., а V'_0, V'_1, V'_2, \dots (16) — неполный квадруполь, актуполь, додекаполь и т.д.

Таким образом, решением уравнения Пуассона могут быть две разновидности нелапласовых мультиполюльных структур. Построим некоторые функции, представляющие эти разновидности нелапласовых мультиполюлей, задав $F(\rho, \xi)$.

1) Пусть

$$F(\rho, \xi) = \frac{\xi^N}{1 + \rho} \sim \xi^N, \quad N = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (20)$$

Граничные условия

$$V_n = \left. \frac{\partial V_n}{\partial \rho} \right|_{\rho=\xi=0} = 0.$$

Для четных N имеем $N = 0, n = 0, \Omega(\rho) = 1/(1 + \rho)$. В условиях

$$f_0(0) = \left. \frac{df_0}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0$$

получаем $f_0 = \rho - \ln(1 + \rho)$, $\varphi_0 = 1$. Решением уравнения Пуассона является функция

$$V_0(\rho, \xi) = \varphi_0 f_0 = \rho - \ln(1 + \rho) \sim \rho^2, \quad (21)$$

представляющая неполный круговой диполь. При $N = 2, n = N/2 = 1, \Omega(\rho) = 2/(1 + \rho)$ решениями уравнений $Tf_0 = 2/(1 + \rho)$ и $Tf_1 = -f_0$ являются радиальные функции

$$f_0 = 2[\rho - \ln(1 + \rho)], \quad f_1 = -\frac{2}{3}\rho(1 + \rho) - \frac{2}{9}\rho^3 + \frac{1}{6}\ln(1 + \rho) + \frac{1}{2}(1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho). \quad (22)$$

Аксиальные функции суть $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = (1/2)\xi^2$. Согласно (7), решением (3) является функция $V_1(\rho, \xi)$ со структурой неполного кругового гексаполя

$$V_1 = \varphi_1 f_0 + \varphi_0 f_1 = \left\{ \xi^2 [\rho - \ln(1 + \rho)] - \frac{2}{3}\rho(1 + \rho) - \frac{2}{9}\rho^3 + \frac{1}{6}\ln(1 + \rho) + \frac{1}{2}(1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho) \right\} \sim \rho^2 \left[\xi^2 - \frac{1}{6}\rho^2 \right], \quad (23)$$

$N = 4, n = N/2 = 2, \Omega = 4!/(1 + \rho)$.

Решив цепочку уравнений (4), получим

$$f_0 = 4![\rho - \ln(1 + \rho)],$$

$$f_1 = -8\rho - 8\rho^2 - \frac{8}{3}\rho^3 + 2\ln(1 + \rho) + 6(1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho),$$

$$f_2 = \frac{8}{75}\rho^5 + \frac{8}{15}\rho^4 + \frac{48}{45}\rho^3 + \frac{2}{5}\rho^2 - \frac{4}{5}\rho - \frac{3}{40}\ln(1 + \rho) - \frac{1}{2}(1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho) - \frac{3}{8}(1 + \rho)^4 \ln(1 + \rho) + \frac{1}{2}(1 + \rho)^2 + \frac{3}{16}(1 + \rho)^4 - \frac{11}{16}. \quad (24)$$

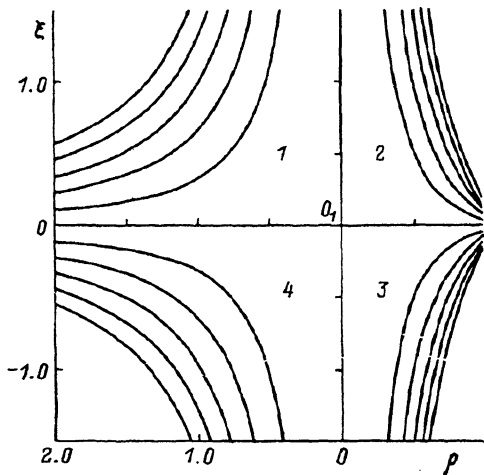
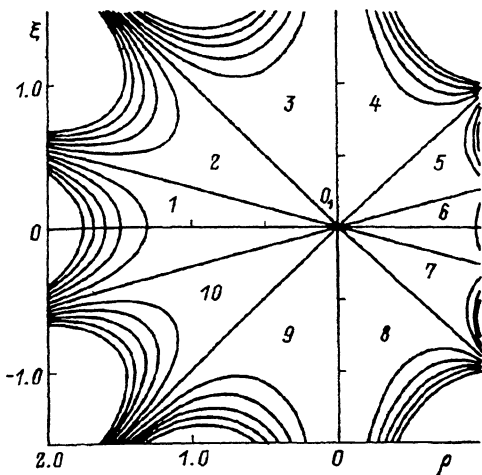


Рис. 3. Неполный нелапласов круговой декаполь с плоскостью симметрии 1, 3, 4, 6, 8, 9 и 2, 5, 7, 10 — области потенциалов с противоположными знаками.

Рис. 4. Неполный нелапласов круговой квадруполь с плоскостью антисимметрии.

1, 2 и 3, 4 — области потенциалов с противоположными знаками.

Решением (3) является неполный круговой декаполь (рис. 3)

$$V_2 = \varphi_2 f_0 + \varphi_1 f_1 + \varphi_0 f_2 = \frac{1}{4!} \xi^4 f_0 + \frac{1}{2} \xi^2 f_1 + f_2 \sim \rho^2 \left[\xi^4 - \xi^2 \rho^2 + \frac{1}{15} \rho^4 \right] \quad (25)$$

для нечетных $N = 1, 3$. Согласно (10), в этом случае

$$\varphi_n = \frac{1}{(2n+1)!} \xi^{2n+1},$$

$$N = 1, \quad n = (N-1)/2 = 0, \quad \Omega = 1/(1+\rho), \quad \varphi_0 = \xi,$$

$$V'_0 = \xi[\rho - \ln(1+\rho)] \sim \rho^2 \xi. \quad (26)$$

Семейство эквипотенциалей (рис. 4) характерно для неполного антисимметричного квадруполья

$$N = 3, \quad n = 1, \quad \Omega = \frac{3!}{1+\rho}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{3!} \xi^3,$$

$$V'_1 = \varphi_1 f_0 + \varphi_0 f_1 = \frac{1}{2} \xi^3 [\rho - \ln(1+\rho)] + \xi \left[-\frac{2}{3} \rho^3 - 2\rho^2 - 2\rho + \frac{3}{2} (1+\rho)^2 \ln(1+\rho) + \frac{1}{2} \ln(1+\rho) \right] \sim \rho^2 \xi \left(\xi^2 - \frac{1}{2} \rho^2 \right). \quad (27)$$

Поле (27) является неполным антисимметричным октауполем.

2) Построим поля $V_n(\rho, \xi)$, удовлетворяющие уравнению Пуассона с правой частью в виде

$$F(\rho, \xi) = \frac{\rho}{1+\rho} \xi^N \sim \rho \xi^N, \quad N = 0, 1, 2. \quad (28)$$

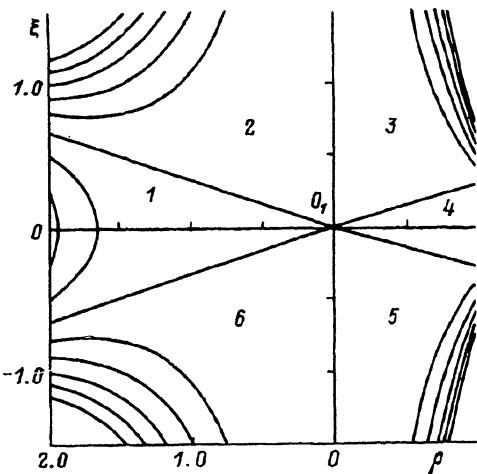


Рис. 5. Нелапласов круговой секступоль с плоскостью симметрии.

1, 3, 5 и 2, 4, 6 — области потенциалов с противоположными знаками.

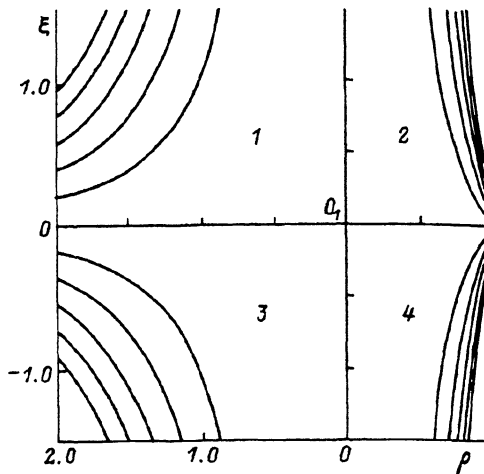


Рис. 6. Нелапласов круговой квадруполь с плоскостью антисимметрии.

1, 4 и 2, 3 — области потенциалов с противоположными знаками.

Нулевые граничные условия для $V_n(\rho, \xi)$ сохраняются прежними. Для четных N имеем $N = 0, n = 0, \Omega = \rho/(1 + \rho)$. В условиях

$$f_0(0) = \left. \frac{df_0}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0$$

получаем круговой диполь

$$V_0 = \varphi_0 f_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \rho - \ln(1 + \rho) \right] \sim \rho^3, \quad (29)$$

$N = 2, n = N/2 = 1, \Omega = 2\rho/(1 + \rho)$.

Решения уравнений $Tf_0 = 2\rho/(1 + \rho)$ и $Tf_1 = -f_0$ суть

$$f_0 = -\frac{1}{2} \rho^2 - \rho + \ln(1 + \rho),$$

$$f_1 = -\frac{1}{32} \rho^4 + \frac{7}{72} \rho^3 + \frac{17}{18} \rho^2 + \frac{7}{24} \rho - \frac{1}{24} \ln(1 + \rho) - \frac{1}{4} (1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho). \quad (30)$$

В этом случае $V_1(\rho, \xi)$ представлено круговым гексаполем (рис. 5)

$$V_1 = \varphi_1 f_0 + \varphi_0 f_1 = \frac{1}{2} \xi^2 \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \rho - \ln(1 + \rho) \right] - \frac{1}{32} \rho^4 + \frac{7}{72} \rho^3 + \frac{17}{48} \rho^2 + \frac{7}{24} \rho - \frac{1}{24} \ln(1 + \rho) - \frac{1}{4} (1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho) \sim \rho^3 \left(\xi^2 - \frac{1}{10} \rho^2 \right). \quad (31)$$

Для нечетных $N = 1, 3$

$$N = 1, \quad n = 0, \quad \Omega = \frac{\rho}{1 + \rho}, \quad \varphi_0 = \xi,$$

$$V'_0 = \varphi_0 f_0 = \frac{1}{2} \xi \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \rho + \ln(1 + \rho) \right] \sim \rho^3 \xi. \quad (32)$$

Структура эквипотенциалей поля (32) характерна для антисимметричного квадруполья (рис. 6)

$$N = 3, \quad n = 1, \quad \Omega = \frac{3! \rho}{1 + \rho}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{3!} \xi^3,$$

$$V'_1 = \varphi_1 f_0 + \varphi_0 f_1 = \frac{1}{2} \xi^3 \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \rho + \ln(1 + \rho) \right] + \xi \left[-\frac{3}{32} \rho^4 + \frac{7}{24} \rho^3 + \frac{17}{16} \rho^2 + \right. \\ \left. + \frac{7}{8} \rho - \frac{1}{8} \ln(1 + \rho) - \frac{3}{4} (1 + \rho)^2 \ln(1 + \rho) \right] \sim \rho^3 \xi \left(\xi^2 - \frac{3}{10} \rho^2 \right). \quad (33)$$

Это поле является антисимметричным круговым октуполем.

Рассмотрим третью из поставленных в настоящей работе задач. Электронно-оптические свойства анализатора дефлекторного типа зависят от структуры поля в окрестности осевой орбиты. Оперировав только лапласовым потенциалом отклоняющего поля дефлектора, невозможно полностью компенсировать угловые aberrации различных порядков из-за дефицита свободных параметров, входящих в уравнения возмущенных траекторий. Так, в секторном дефлекторе электростатического или магнитного типа с пространственной фокусировкой пучка заряженных частиц в пределах рабочего поля не осуществима полная компенсация квадратичных угловых aberrаций второго порядка, размывающих изображение в радиальной плоскости [5,6].

Допустим, что между электродами электростатического дефлектора создан и удерживается объемный заряд с определенным законом распределения его плотности по ρ и ξ , так что рабочее поле является суперпозицией двух полей: во-первых, основного отклоняющего поля с потенциалом $U(\rho, \xi)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа, и, во-вторых, вспомогательного поля, являющегося нелапласовым мультиполем $V_n(\rho, \xi)$. Нелапласов мультиполь может осуществлять дополнительное избирательное воздействие на угловую фокусировку дефлектора, корректируя угловые погрешности изображения заданного порядка. Главная часть кругового мультиполя порядка $2n$, являющегося решением уравнения Пуассона, содержащая узловую точку на осевой орбите при $\rho, \xi \rightarrow 0$, является однородным полиномом

$$\rho^l \sum_{m=0}^n C_m \rho^{n-m} \xi^m \quad l, m, n \text{ — целые числа} \quad (34)$$

порядка $l + n$. Из (34) следует, что главная часть мультиполя вносит вклад в разложения по ρ и ξ составляющих вектора напряженности суммарного поля, начиная со слагаемых $l + n - 1$ порядка. Поэтому включение мультиполя порядка $2n$ окажет влияние на aberrации дефлектора, начиная с $l + n - 1$ порядка.

В качестве простого примера рассмотрим воздействие объемного заряда на угловую фокусировку второго порядка дефлектора в том случае, если объемный заряд распределен в окрестности осевой орбиты по линейному в зависимости от ρ закону. Полагаем, что плотность

объемного заряда не зависит от ξ . Плотностью заряда в анализируемом пучке пренебрежем. В этих условиях уравнение Пуассона упрощается — становится обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{1}{1+\rho} \frac{d}{d\rho} \left[(1+\rho) \frac{d}{d\rho} \right] V = \varepsilon_0 r_0 \beta \rho, \quad (35)$$

решением которого при нулевых граничных условиях

$$V(0) = \left. \frac{dV}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0$$

является нелапласов потенциал, близкий к круговому диполью (29),

$$V(\rho) = \frac{1}{3} \varepsilon_0 r_0 \beta \left[\frac{1}{3} \rho^3 + \frac{1}{4} \rho^2 - \frac{1}{2} \rho + \frac{1}{2} \ln(1+\rho) \right] \quad (36)$$

или в виде разложения в степенной ряд по ρ

$$V(\rho) = \frac{1}{3} \varepsilon_0 r_0 \beta \left[\frac{1}{2} \rho^3 - \frac{1}{8} \rho^4 + \frac{1}{10} \rho^5 - \frac{1}{12} \rho^6 + \dots \right]. \quad (37)$$

В формулах (35)–(37) ε_0 — напряженность основного поля на осевой орбите; $\varepsilon_0 r_0$ — величина, имеющая размерность потенциала; β — безразмерный весовой коэффициент. Из формулы (37) следует, что главная часть нелапласова потенциала в окрестности осевой орбиты пропорциональна ρ^3 . Представим радиальную составляющую напряженности суммарного поля при $\xi = 0$ степенным рядом по ρ

$$\begin{aligned} E_r(\rho, 0) &= E_r^L + E_r^{nL} = \left. \frac{dU}{dr} \right|_{\xi=0} + \left. \frac{dV}{dr} \right|_{\xi=0} = \\ &= \varepsilon_0 \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \rho^n + \frac{1}{2} \beta \rho^2 \left[1 + \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \rho^m \right] \right\}, \quad (38) \end{aligned}$$

где E_r^L и E_r^{nL} — радиальные составляющие напряженности лапласова и нелапласова полей, ε_i — безразмерные коэффициенты разложения E_r^L в ряд по ρ .

В итоге получим

$$E_r(\rho, 0) = \varepsilon_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \rho^n \right], \quad (39)$$

где $e_1 = \varepsilon_1$, $e_2 = \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \beta$, $e_n = \varepsilon_n + (-1)^n \frac{\beta}{6}$, $n = 3, 4, \dots$, e_n — безразмерные коэффициенты разложения в ряд по ρ напряженности суммарного поля.

Квадратичные aberrации дефлектора находят, рассматривая возмущенные траектории в первом и втором приближениях. Дифференциальные уравнения траекторий с точностью до слагаемых второго

порядка по ρ и ξ содержат составляющие напряженности суммарного поля E_r и E_z в форме

$$E_r(\rho, \xi) = \varepsilon_0[1 + e_1\rho + e_2\rho^2 + \sigma_1\xi^2 + \dots],$$

$$E_z(\rho, \xi) = \varepsilon_0[\sigma_2\xi + \sigma_3\rho\xi + \dots]. \quad (40)$$

Подчинив E_r и E_z требованиям $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ и $\text{div } \mathbf{E} = (\varepsilon_0/r_0)\beta\rho$, применим соотношения (39) и получим

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(1 - e_1 - 2e_2 + \beta) = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2),$$

$$\sigma_2 = -(1 + e_1) = -(1 + \varepsilon_1), \quad \sigma_3 = 2\sigma_1. \quad (41)$$

Из формул (41) следует, что величины σ_1 и σ_2 зависят только от коэффициентов разложения основного поля ε_i и при подключении нелапласова поля (36) не изменяются. Результатом решения дифференциальных уравнений является формула, определяющая размытие изображения в радиальной плоскости квадратичными угловыми aberrациями,

$$\Delta\rho = P_{\parallel}\alpha^2 + P'_{\parallel}\psi^2, \quad (42)$$

где α и ψ — угловые расходимости пучка заряженных частиц в радиальной и вертикальной плоскостях; P_{\parallel} , P'_{\parallel} — соответственно коэффициенты угловых aberrаций.

Согласно данным работы [5],

$$P_{\parallel} = -\frac{K}{2\zeta^2} [1 - \cos \sqrt{\zeta}\varphi] + \frac{1 + \frac{K}{2\zeta}}{3\zeta} [\cos \sqrt{\zeta}\varphi - \cos 2\sqrt{\zeta}\varphi], \quad (43)$$

$$P'_{\parallel} = -\frac{1}{\zeta} \left[1 + \frac{\sigma_1}{2(2 - \zeta)} \right] (1 - \cos \sqrt{\zeta}\varphi) -$$

$$-\frac{\sigma_1}{2(2 - \zeta)(8 - 5\zeta)} (\cos 2\sqrt{\zeta}\varphi - \cos \sqrt{\zeta}\varphi), \quad (44)$$

где φ — угол поворота осевой траектории, отсчитываемый от плоскости источника, помещенного в поле на осевую орбиту, коэффициенты ζ и K равны

$$\zeta = 3 + e_1 = 3 + \varepsilon_1 \quad (45)$$

$$K = 6 + 4e_1 + e_2 = 6 + 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \frac{1}{2}\beta. \quad (46)$$

Формулы (41), (44) и (45) свидетельствуют о том, что подключение нелапласового поля (36) не влияет на угловую фокусировку первого порядка и aberrационный коэффициент P'_{\parallel} , но при этом в aberrационный коэффициент P_{\parallel} вводится дополнительный параметр β , величину которого можно выбрать из условия $P_{\parallel} = 0$. Рассмотрим, как это свойство может проявиться в электростатическом сферическом

дефлекторе, в котором, как известно [5], стигматическая фокусировка пучка заряженных частиц осуществляется при $\varphi = 180^\circ$ и $\varepsilon_1 = -2$, $\varepsilon_2 = 3$, $\zeta = 1$, $P_{\parallel} = -2$, $P'_{\parallel} = 0$. При подключении поля (36), согласно (46), $K = 1 + (1/2)\beta$. Тогда из формулы (43) при выполнении условия $P_{\parallel} = 0$ следует, что $\beta = -3$. Таким образом, если к полю сферического дефлектора добавить с весом $\beta = -3$ нелапласов круговой диполь (36), порожденный линейным распределением плотности объемного заряда в окрестности осевой орбиты, то квадратичная абберрация, обусловленная угловой расходимостью пучка в радиальной плоскости, будет скомпенсирована. В результате воздействия нелапласова поля (36) сферической стигматически фокусирующий дефлектор становится энергоанализатором, в котором отсутствуют квадратичные абберрации по α и ψ .

В настоящей работе мы не предпринимали попыток рассмотреть способы создания и удержания распределенного объемного заряда, необходимого для формирования нелапласова кругового мультиполя в пространстве действия основного поля дефлектора.

Список литературы

- [1] Szabo I. // Intern. J. Mass-spectrometry and ion processes. 1968. Vol. 73. N 3. P. 197-253.
- [2] Явор С.Я. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами. М.: Атомиздат, 1968. С. 236-246.
- [3] Силады М. Электронная и ионная оптика. М.: Мир, 1990. 639 с.
- [4] Карташев Б.П., Котлов В.И. // ЖТФ. 1966. Т. 36. Вып. 9. С. 1727-1729.
- [5] Zashkvara V.V., Tyndyk N.N. // Nucl. Instrum. and Meth. 1992. Vol. A313. P. 315-327.
- [6] Zashkvara V.V., Tyndyk N.N. // Ibid. P. 439-446.