

01;03

©1995 г.

ХАРАКТЕРНОЕ ВРЕМЯ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СИЛЬНО ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

С.О.Ширяева, А.И.Григорьев, И.Д.Григорьева

Ярославский государственный университет,
150000, Ярославль, Россия
(Поступило в Редакцию 20 июля 1994 г.)

Показано, что в силу нелинейности процесса роста амплитуды возмущения формы неустойчивой сильно заряженной капли временная эволюция амплитуды возмущения происходит существенно быстрее, чем по экспоненциальному закону, а инкремент как характеристика скорости деформации капли не является адекватным реальному явлению. Выведено и решено нелинейное интегральное уравнение, описывающее временную эволюцию формы неустойчивости капли.

Введение

С явлением неустойчивости сильно заряженной сферической капли, проявляющемся в появлении прогрессирующей со временем сфероидальной деформации с последующим сбросом с вершины сфероида избыточного заряда в виде серии высокодисперсных сильно заряженных капелек, приходится сталкиваться в связи с разнообразными приложениями в физике, геофизике, научном приборостроении, технике и химической технологии (см., например, [1,2] и указанную там литературу). Несмотря на многообразие приложений и большое количество экспериментальных и теоретических исследований, некоторые аспекты реализации такой неустойчивости остаются малоизученными. Это касается и вопроса о скорости нарастания со временем сфероидальной деформации неустойчивой капли, имевшей первоначально сферическую форму. Причиной недостаточного понимания обсуждаемого процесса является не недостаток внимания со стороны исследователей, но нелинейность самого явления: скорость нарастания деформации зависит от величины самой деформации и от условий перераспределения заряда по поверхности капли при развитии деформации. В таких условиях инкремент нарастания неустойчивости как характеристика временной эволюции деформации при экспоненциальном законе ее нарастания во времени представляется неадекватным ситуации. Но рассмотрим обсуждаемое явление более детально.

1. Из анализа линейаризованных уравнений гидродинамики следует, что спектр капиллярных колебаний изолированной капли проводящей жидкости радиуса R с зарядом Q и коэффициентом поверхностного натяжения σ определяется выражением [3]

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1) [(n+2) - W], \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}, \quad (1)$$

где n — номер моды капиллярных колебаний, ρ — плотность жидкости. Из соотношений (1) видно, что при $W > 4$ становится неустойчивой основная мода ($n = 2$) капиллярных колебаний капли, амплитуда которой ζ в рамках применимости линейного анализа начинает расти со временем по закону $\zeta \sim \exp(\chi t)$, где

$$\chi = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho R^3} [W(e^2) - 4]} \quad (2)$$

является инкрементом обсуждаемой неустойчивости.

Но и при $W = 4$ капля уже неустойчива по отношению к бесконечно малым деформациям ее поверхности вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \theta)$, соответствующим виртуальному возбуждению основной моды капиллярных колебаний. Возбуждение подобных капиллярных колебаний может иметь причиной хотя бы тепловое движение молекул жидкости.

2. Все начинается с бесконечно малого теплового возмущения основной моды вида $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \theta)$, которому соответствует сфероидальная деформация с эксцентриситетом, являющимся функцией от амплитуды деформации $e = e(\zeta)$. Амплитуда теплового возмущения формы сферической капли ζ_0 определяется выражением $\zeta_0 = (\sigma/kT)^{-1/2}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура жидкости. Для принятого вида возмущения большая и меньшая полуоси сфероиды определяются соотношениями $a = R + \zeta_0$ и $b = R - (1/2)\zeta_0$, так как $P_2(0) = 1$, $P_2(\pi/2) = -1/2$.

Найдем связь квадрата эксцентриситета получающегося сфероиды e^2 с амплитудой малого возмущения ζ_0 с точностью до малых второго порядка по отношению ζ_0/R

$$\begin{aligned} e^2 &= 1 - \frac{b^2}{a^2} \equiv 1 - \frac{(R - \zeta_0/2)^2}{(R + \zeta_0)^2} \equiv 1 - \left(1 - \frac{\zeta_0}{R} + \frac{\zeta_0^2}{4R^2}\right) \left(1 - \frac{2\zeta_0}{R} + 3\frac{\zeta_0^2}{R^2} - \dots\right) \approx \\ &\approx \frac{3\zeta_0}{R} - \frac{21}{4} \frac{\zeta_0^2}{R^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

3. Итак, тепловое возбуждение в сферической капле капиллярной волны $\sim P_2(\cos \theta)$ соответствует виртуальному вытягиванию капли в сфероид с эксцентриситетом, определяемым (3). Но для сфероиды критическое для реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду значение параметра W является убывающей функцией квадрата эксцентриситета [4]. В квадратичном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении эту функцию можно представить в виде [4]

$$W = 4 \left[1 - (\alpha e^2 + \beta e^4) \right]. \quad (4)$$

Значение $W = 4$ для сфероида будет уже закритическим, и при $\zeta_0/R \ll 1$, согласно классическим представлениям, амплитуда возмущения начнет расти со временем по экспоненциальному закону с инкрементом χ , определяющимся (2). В выражение (2) для χ подставим (4) и получим

$$\chi = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}(\alpha e^2 + \beta e^4)}, \quad (5)$$

а это означает, что амплитуда ζ возмущения сферической поверхности $\sim P_2(\cos \theta)$ начнет расти со временем по закону

$$\zeta = \zeta_0 e^{\chi t} = \zeta_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3}(\alpha e^2 + \beta e^4)} t\right). \quad (6)$$

Но увеличение амплитуды возмущения соответствует дальнейшему вытягиванию капли, увеличению ее эксцентриситета и снижению, согласно (4), критического для реализации неустойчивости значения параметра Рэлея W неустойчивости и, следовательно, вызывает увеличение инкремента неустойчивости.

Поскольку χ является функцией от e^2 , а следовательно, и от времени, то, чтобы получить ζ в любой момент времени, рассмотрим последовательность значений ζ через интервалы времени Δt_i , ($i = 1, 2, 3, 4, \dots$), в течение каждого из которых выражение (6) можно считать хорошо работающим. Отметим, что выражение (6) справедливо лишь для линейной связи между скоростью роста возмущения $d\chi/dt$ и амплитудой самого возмущения χ . Величину интервала Δt_i будем определять из условия, чтобы приращение инкремента на этом интервале $\chi_i - \chi_{i-1}$ было много меньше величины инкремента в конце предыдущего интервала времени $\Delta\chi \equiv \chi_i - \chi_{i-1} \ll \chi_{i-1}$. Тогда в пределах интервала Δt_i величину χ_i можно считать неизменной и пользоваться для подсчета прироста амплитуды $\Delta\zeta_i$ соотношением (6).

Но пусть изначально сферическая капля претерпела неустойчивость и стала удлиняться с инкрементом χ_1 . За время Δt_1 начальная амплитуда возмущения ζ_0 вырастет до $\zeta_1 = \zeta_0 \exp \chi_1 \Delta t_1$. Это приведет к росту квадрата эксцентриситета e^2 и, согласно (5), к росту инкремента до χ_2 , в следующий интервал времени Δt_2 амплитуда возмущения будет изменяться по закону $\zeta_2 = \zeta_1 \exp \chi_2 \Delta t_2$. К концу интервала времени Δt_2 амплитуда возмущения вырастет, что приведет к росту квадрата эксцентриситета e^2 и инкремента χ , который в конце Δt_2 станет равным χ_3 . Тогда на следующем интервале времени Δt_3 амплитуда возмущения будет расти по закону $\zeta_3 = \zeta_2 \exp \chi_3 \Delta t_3$.

Таким образом, для i -го интервала получим

$$\zeta_i = \zeta_{i-1} \exp \chi_i \Delta t_i. \quad (7)$$

Подставим в (7) выражение для ζ_{i-1} , которое в свою очередь выразится через ζ_{i-2} , которое выразится через ζ_{i-3} , и т.д. до ζ_0 . В итоге вместо (7) получим

$$\zeta_i = \zeta_0 \exp \left\{ \sum_{k=1}^i \chi_k \Delta t_k \right\}.$$

Переходя в этом выражении к пределу $\Delta t_k \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, получим

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \chi(e^2(t)) dt \right\}.$$

В это выражение вместо $\chi(e^2(t))$ подставим выражение (5), связывающее χ с e^2 , и получим

$$\zeta(t) = \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3} (\alpha e^2 + \beta e^4)} dt \right\}.$$

Заменим e^2 через ζ согласно (3) и с точностью до членов порядка $(\zeta/R)^2$ найдем

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\equiv \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3} \left[\alpha \left(\frac{3\zeta}{R} - \frac{21}{4} \frac{\zeta^2}{R^2} \right) + \beta 9 \frac{\zeta^2}{R^2} \right]} dt \right\} \equiv \\ &\equiv \zeta_0 \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho R^3} \left[3\alpha \frac{\zeta(t)}{R} + \left(9\beta - \frac{21}{4} \alpha \right) \frac{\zeta^2(t)}{R^2} \right]} dt \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, мы получили нелинейное интегральное уравнение относительно $\zeta(t)$.

4. Разделим левую и правую части уравнения (8) на R и введем безразмерную переменную $X \equiv \zeta/R$, тогда найденное уравнение переписется в виде

$$X(t) = X_0 \exp \left\{ \int_0^t \sqrt{\left[3\alpha X(t) + \left(9\beta - \frac{21}{4} \alpha \right) X^2(t) \right] \varkappa dt} \right\}, \quad \varkappa^2 = \frac{8\sigma}{\rho R^3}.$$

Для отыскания решения этого уравнения прологарифмируем его

$$\ln \frac{X}{X_0} = \int_0^t \sqrt{\left[3\alpha X(t) + \left(9\beta - \frac{21}{4} \alpha \right) X^2(t) \right] \varkappa dt}$$

и продифференцируем получившееся выражение по t

$$\frac{1}{X} \frac{dX}{d(\varkappa t)} = \sqrt{\left[3\alpha X + \left(9\beta - \frac{21}{4} \alpha \right) X^2 \right]}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dX}{X \sqrt{3\alpha X + (9\beta - 21\alpha/4)X^2}} = \varkappa dt.$$

После интегрирования найдем

$$-\frac{2\sqrt{3\alpha X + (9\beta - 21\alpha/4)X^2}}{3\alpha X} \Big|_{X_0}^X = \chi t$$

или

$$\frac{X}{X_0} = \frac{1}{1 - (1 + \gamma)^{1/2}\tau + 0.25\tau^2}, \quad (9)$$

$$\tau = \chi_0 t, \quad \gamma = (3\beta/\alpha - 7/4)X_0,$$

$$\chi_0 = \left[\kappa(3\alpha X_0)^{1/2} \right] = \left[\frac{24\alpha\sigma\zeta_0}{\rho R^4} \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Здесь χ_0 имеет смысл инкремента нарастания неустойчивости (в экспоненциальной зависимости $X(\chi_0 t)/X_0 = \exp(\chi_0 t)$) в начальный момент времени.

5. На рис. 1 кривыми 1-5 представлены зависимости $\xi = \zeta/\zeta_0 = X/X_0 = X(\tau)/X_0$, рассчитанные численно по уравнению (9) при различных значениях параметра γ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.3, 4 — 1, 5 — 3. Для сравнения на том же рисунке кривой 6 приведена экспоненциальная зависимость $\xi = X(\tau)/X_0 = \exp(\tau)$. Несложно видеть, что при любых значениях параметра γ инкремент как величина, характеризующая время увеличения амплитуды возмущения в 2.73 раза, дает относительно достоверную информацию о временной зависимости $X(\tau)$ лишь в самом начале процесса роста амплитуды.

Из рис. 1 видно, что при варьировании величины параметра γ меняется качественный вид кривых, описывающих нарастание амплитуды возмущения со временем. Поскольку величина параметра γ определяется, согласно (10), фиксированными коэффициентами α и β из зависимости (4) и амплитудой виртуального возмущения основной моды $\zeta = \zeta_0 P_2(\cos \theta)$ (т.е. величиной X_0), приводящего к неустойчивости, то ясно, что различные значения параметра γ на рис. 1 следует интерпретировать как различные значения величины амплитуды исходной

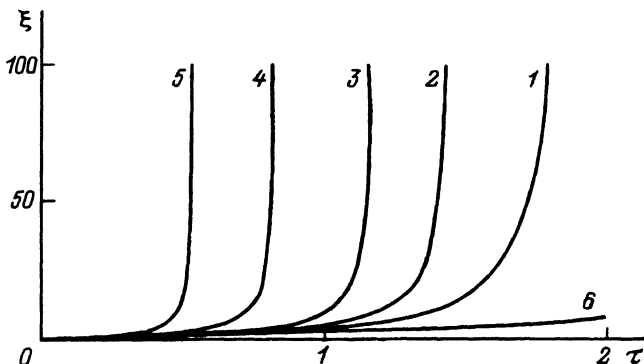


Рис. 1. Зависимости временной эволюции амплитуды растущего возмущения $\xi = X(\tau)/X_0$, рассчитанные численно по уравнению (9) при различных значениях параметра γ .

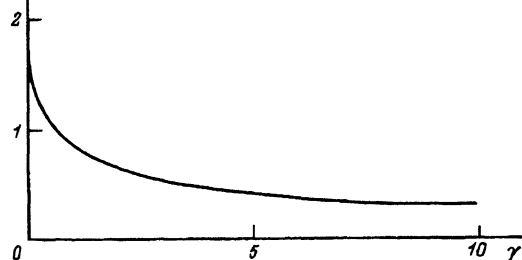


Рис. 2. Зависимость $\tau_0 = \tau_0(\gamma)$ величины временного интервала, на котором реализуется неустойчивость, от величины параметра γ , характеризующего величину начальной сфероидальной деформации.

сфероидальной деформации ζ_0 (т.е. X_0). Случай же $\gamma = 0$ соответствует не нулевой начальной деформации, а переходу к линейному по e^2 и по ζ_0/R (т.е. по X_0) приближению, проанализированному в [7]. Кривая 1 на рис. 1, таким образом, соответствует линейной зависимости между W и e^2 в зависимости (4).

Из вышесказанного и рис. 1 следует, что амплитуда начальной сфероидальной деформации неустойчивой сферической капли весьма существенно сказывается на скорости роста амплитуды ее основной моды. Причем это влияние двояко. С одной стороны, с увеличением амплитуды начальной деформации ζ_0 быстро сокращается временной интервал, в котором развивается неустойчивость. На рис. 2 представлена зависимость $\tau_0 = \tau_0(\gamma)$ величины временного интервала, на котором реализуется неустойчивость, от величины параметра γ . С другой стороны, с увеличением ζ_0 увеличивается и параметр χ_0 , который определяет, согласно (9), (10), скорость роста амплитуды внутри временного интервала, соответствующего данному значению начальной деформации.

Итак, из рис. 1 видно, что в зависимости от величины параметра γ полное время реализации неустойчивости $t_* < \tau_0(\gamma)\chi_0^{-1}$, где коэффициент $\tau_0 = \tau_0(\gamma)$ определяет геометрическое место точек разрыва аналитичности выражения (10). Знак $<$ отмечает тот факт, что сброс избыточного заряда начинается при некотором конечном удлинении капли, точнее говоря, при $e^2 \approx 0.7$ [5].

6. При оценках величины параметра γ принималось $\alpha = 1/3$, $\beta = 3.5$. Значение $\alpha = 1/3$ получено из расчетов работы [4], корректных в линейном по e^2 приближении. Следует отметить, что нелинейная зависимость $W = W(e^2)$, аппроксимируемая выше выражением (4), получена в [4] при численном расчете из системы уравнений, каждое из которых, однако, корректно лишь в линейном по e^2 приближении. Из физического смысла задачи, решавшейся в [4], следовало, что реальная зависимость $W = W(e^2)$ должна быть более сложной, чем линейная. В пользу этого вывода свидетельствуют данные экспериментальной работы [5], согласно которым уже при $e^2 \approx 0.7$ начинается сброс избыточного заряда, что возможно лишь при возбуждении не менее десятка более высоких, чем основная, мод капиллярных волн (как это показано в [4,6]). При линейной же зависимости между W и e^2 и при $\alpha = 1/3$ даже третья мода не возбудится при увеличении e^2 до 0.7.

Если же для зависимости $W = W(e^2)$ принять вид (4), то величину параметра β для качественных оценок можно вывести из расчетов закономерностей рэлеевского распада неустойчивой заряженной капли, проведенных в [2]. Согласно данным [2], распад капли (сброс избыточного заряда в виде серии высокодисперсных сильно заряженных капелек) прекращается, когда величина параметра Рэля W для сфероидальной (с $e^2 = 0.7$) капли падает до ≈ 2 (это означает, что критическое значение параметра W для сфероидальной с $e^2 \approx 0.7$ капли примерно равно 2). Подставив в (4) $W = 2$, $\alpha = 1/3$, $e^2 = 0.7$, несложно найти $\beta \approx 3.5$. Видно, что при $\alpha = 1/3$, $\beta \approx 3.5$ величина параметра γ определится соотношением $\gamma \approx 30 \cdot X_0$. А это означает, что максимальное из значений γ на рис. 1 ($\gamma = 3$) соответствует весьма малой начальной деформации $X_0 < 0.1$.

7. Согласно вышесказанному, изменение величины ζ_0 приводит к изменению характерного временного масштаба развития процесса. Отметим, что в реальных условиях начальное значение амплитуды сфероидальной деформации ζ_0 может определяться двумя факторами: 1) виртуальным искажением $\sim P_2(\cos \theta)$ сферической формы капли, происходящим из-за теплового движения молекул; в этом случае амплитуда возмущения весьма мала (для большинства жидкостей измеряется единицами ангстрем); 2) действием сил неэлектрической природы, например акустическим давлением на поверхность капли $\sim P_2(\cos \theta)$; в этом случае амплитуда возмущения может быть весьма большой.

Величина параметра χ_0 как характеристики временной эволюции формы неустойчивой капли определяется тремя факторами: 1) при $W = 4$ амплитудой теплового виртуального искажения $\sim P_2(\cos \theta)$ сферической формы; 2) при $W > 4$ через величину избыточного заряда; 3) при $W \leq 4$ наличием значительной сфероидальной деформации капли, вызванной силами неэлектрической природы через амплитуду деформации. В последнем случае, когда исходная сфероидальная деформация близка к критической для инициирования неустойчивости более высоких мод [2,6], экспоненциальный рост со временем амплитуды первоначального возмущения с инкрементом χ_0 может привести каплю к началу сброса заряда за время $t \ll \tau_0(\gamma)\chi_0^{-1}$. В этом случае параметр χ_0 можно именовать инкрементом и он будет характеризовать временную эволюцию формы неустойчивой капли до начала сброса ею избыточного заряда.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // МЖГ. 1994. № 4. С. 3–22.
- [2] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [3] Rayleigh (Strutt J.W., Lord) // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–188.
- [4] Григорьев А.И. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [5] Taylor G. // Proc. Roy. Soc. A. 1964. Vol. 280. P. 383–397.
- [6] Григорьев А.И., Лазарянц А.Э. // ЖВММФТ. 1992. Т. 31. № 6. С. 929–938.
- [7] Ширяева С.О., Григорьева И.Д. // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 6. С. 1–5.