

01:03

©1995 г.

## ПРОБЛЕМА РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

*Э.Л.Амромин, Г.Ю.Степанов, Ю.С.Тимошин*

Центральный научно-исследовательский институт им. А.Н. Крылова,  
196158, Санкт-Петербург, Россия  
(Поступило в Редакцию 20 мая 1994 г.  
В окончательной редакции 15 мая 1995 г.)

Обтекание тел жидкостью, ее движение в трубах и многие явления в технике и в природе сопровождаются образованием зон отрыва, течение в которых оказывается чаще всего турбулентным и трехмерным. Во многих случаях эти зоны оказывают значительное влияние на другие части потока, которым нельзя пренебрегать. Однако современное состояние теории отрывных течений позволяет обсудить методы, скорее наиболее перспективные для анализа трехмерного турбулентного отрыва, чем наиболее эффективные, и поэтому здесь приходится ограничиться обсуждением промежуточных результатов и предполагаемых путей решения проблемы.

### Введение

Не так давно задача расчета отрывных течений несжимаемой жидкости оставалась столь нереальной, что в посвященных отрывным течениям монографиях [1,2] имелись лишь сведения о примерном определении начала отрывных зон с помощью уравнений пограничного слоя и распределений давления, вычисленных для потенциального безотрывного обтекания тел без какого-либо учета влияния зон отрыва на эти распределения. С конца 70-х годов, однако, были сравнительно быстро достигнуты значительные успехи в расчетах двумерных отрывных течений жидкости, причем в той или иной мере результативным оказалось использование дискретных вихрей [3-5], асимптотических разложений [6], теории вязко-невязкого взаимодействия [7-11], сеточных методов для уравнений  $\{k, \varepsilon\}$ -модели турбулентности [12-14], теории течений невязкой жидкости с зонами постоянной завихренности [15] и уравнений Прандтля с заданным трением на стенке при неизвестном давлении на внешней границе пограничного слоя [16,17]. Однако для трехмерных отрывных течений ситуация мало менялась: и для трехмерного обтекания эллипсоидов [18-21], и для крыльев конечного

размаха при больших углах атаки [22,23] производились только расчеты пристенного пограничного слоя — до начала отрыва с использованием потенциального распределения давления, в лучшем случае [23] отчасти откорректированного посредством учета влияния толщины вытеснения этого слоя.

Исключением из этого правила претендуют быть трехмерные расчеты типа [24,26], выполненные с использованием эффективного сеточного метода [27] и уравнений  $\{k, \varepsilon\}$ -модели турбулентности. Некоторая неопределенность этого суждения обусловлена прежде всего тем, что объектами исследования в [24,26] являются корпуса судов, обтекаемые без значительных по своим размерам зон отрыва, детали течения в которых исследуются весьма сглаженно на не очень частой сетке (не более  $3 \cdot 10^3$  ячеек на обтекаемой поверхности). Кроме того, в этих расчетах ради возможности использования во всем потоке той же системы уравнений, что и на корпусе, и тех же функций стенки [26] в выражениях для турбулентной вязкости реальное тело продолжается за свою корму тонким фиктивным телом, на котором выставляются условия прилипания. Очевидно, что при наличии небольших зон отрыва за обрезом кормы исходного тела такое фиктивное тело подавит их подобно разделительной пластине Рошко [2]. В [25] же просчитана лишь некоторая часть области отрыва вокруг перпендикулярного плоскости течения препятствия при весьма фрагментарном сопоставлении с данными измерений, поэтому трудно оценить степень достигнутого успеха. Можно также предвидеть некоторые трудности при использовании методов [24-26] для расчета отрывных течений. Первая из них связана с использованием в функциях стенки логарифмики, построенной по динамической скорости: недавние эксперименты [28,29] выявили совершенно иную картину течения в пристенной области турбулентного отрыва, а опыт использования  $\{k, \varepsilon\}$ -модели свидетельствует, что не так-то просто изменить в ней какие-либо константы или функции без ущерба для степени универсальности модели и точности результатов. Вторая связана с заданием условий далеко за телом. Доказано [30], что дальний след за телом зависит только от его сопротивления, но и в то же время известно, что за плохообтекаемым телом след продолжает содержать трехмерные структуры на протяжении многих сотен его диаметров (до некоторой степени схожая ситуация имеет место при расчетах корабельных волн за судном, и там неаккуратное задание условий далеко за телом приводило иногда к значительным погрешностям [24] в определении сил). Третья связана с заданием условий на боковой внешней границе области счета для тел, обтекаемых с боковой или подъемной силой: там нельзя задавать невозмущенные граничные условия — это приведет к резкому занижению таких сил, как, например, в плоских расчетах [12], но вместе с тем обременительно считать течение в трубе очень большого поперечного сечения с пограничным слоем на ее стенках.

Надо также учесть, что выбор надлежащего расчетного метода для исследования должен зависеть от того, какие именно величины предполагается вычислять. И если, например, для потенциальных течений более точный метод позволяет лучше вычислять все характеристики потока, то расчеты турбулентных течений — пока всегда полуэмпирическая процедура, в которой для определения разных величин могут оказаться предпочтительными разные методы.

Авторы имели определеннный опыт [7,10,11] удовлетворительного вычисления размеров отрывных зон и давления на двумерных телах при отрывном обтекании с помощью теории вязко-невязкого взаимодействия, в которой эта зона представлялась областью заданного давления со свободной границей. Они располагали также способами отыскания свободных границ в трехмерных потенциальных потоках [31,32]. Поэтому расчет трехмерных турбулентных течений предполагалось строить по аналогии с плоской теорией вязко-невязкого взаимодействия [7], лишь заменяя двумерные процедуры определения характеристик отдельных частей потока на трехмерные.

Ниже будут описаны успехи, трудности и ближайшие перспективы намеченного подхода.

## Общая схема течения и метод расчета невязкого потока

Выбранная для расчетов схема установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса соответствует принятой в [7,11], рис. 1 иллюстрирует ее. Поток делится на внешнюю невязкую часть и вязкий слой вокруг тела и за ним, состоящий из трех частей: пристенного тонкого пограничного слоя, отрывной зоны и вязкого следа за телом. Внутренней границей невязкого потока является внешняя граница вязкого слоя, от характерных толщин [33] которого зависит распределение давления по границе, влияющее в свою очередь на значение этих толщин. Это деление потока вполне оправдано по крайней мере при анализе обтекания таких объектов, как судовые корпуса с зонами отрыва на корме [34,35] или тела вращения, обтекаемые при ненулевых углах атаки [19,36,37]. Границы между отдельными частями вязкого слоя также, как правило, заранее неизвестны. Поэтому, хотя основной целью решения поставленной задачи является определение распределения давления по телу и поля осредненных по времени скоростей вокруг него, а также приложенных к нему сил при заданном значении числа Рейнольдса  $Re$ , отыскание упомянутых границ между зонами является необходимым этапом вычислений. Как и все задачи со свободными границами, рассматриваемая задача является нелинейной; она будет решаться в итерациях.

Итерации начинаются с задания некоторой пробной границы невязкого потока  $S$ . В пределах большей части обтекаемого тела значительного удлинения эта граница может совпадать с поверхностью тела  $S_w$ . Далеко за телом пробная граница, как следует из [30], должна быть полубесконечной цилиндрической поверхностью, площадь кругового сечения которой при  $x = \text{const} \rightarrow \infty$  зависит только от сопротивления тела. В промежутке между этими двумя поверхностями форма пробной границы может прорисовываться весьма произвольно; важно задать ее достаточно гладкой, желательно без разрывов кривизны при переходе на  $S_w$ .

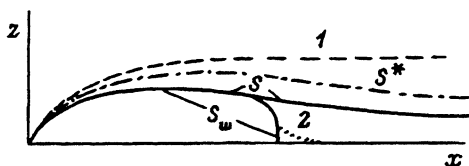


Рис. 1. Схема отрывного течения.

1 — внешняя граница пограничного слоя,  
2 — сечение фиктивного тела Патела.

В вязком потоке вводится потенциал скорости, который в представленных ниже расчетах течений без подъемной силы состоит только из скалярного потенциала  $\Phi$ , удовлетворяющего соотношениям

$$\Delta\Phi = 0; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial N}\Big|_S = 0; \quad \lim \text{grad } \Phi = \{-1, 0, 0\}. \quad (1)-(3)$$

Здесь  $N$  — внешняя нормаль к  $S$ . Краевая задача (1)–(3) сводится к решению интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} Q \frac{\partial}{\partial N} \frac{1}{r} ds - Q = 2N_x. \quad (4)$$

относительно обильности источников или стоков  $Q$  с последующим вычислением компонент скорости  $\{u, v, w\}$  по формулам Кулона

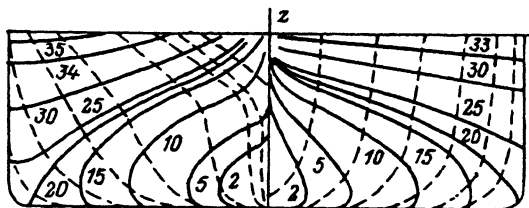
$$\begin{aligned} u_1 &= 1 - \frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} Q \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} dS, \\ v_1 &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} Q \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} dS, \\ w_1 &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{(S)} Q \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} dS. \end{aligned} \quad (5)$$

В (4), (5)  $r$  — расстояние между точкой, в которой вычисляется скорость потенциального потока, и точкой области интегрирования на  $S$ . Уравнение (4) разрешимо также для незамкнутой поверхности  $S$  [38] и к ней применяется известный численный метод [39], первоначально предложенный для замкнутых тел.

В последующих итерациях после использования величин (5) в расчетах вязкого потока и уточнения его внешней границы и толщины, а следовательно, и внутренней границы потенциального потока  $S^*$  условие (2) подлежит изменению. Принципиально точным подходом было бы перенести это условие на  $S^*$ , отслеживая изменения  $S^*$  в каждой итерации. Однако рациональнее квазилинеаризовать его на  $S$ , чтобы найти возмущение  $Q$  по формуле

$$q = 2 \frac{\partial(\delta^* u_1)}{\partial l} + 2\delta^* \frac{\partial u_1}{\partial b} \quad (6)$$

и использовать в дальнейшем в (5) обильности  $Q+q$ . Здесь  $u_1$  — модуль скорости на  $S$ ,  $l$  и  $b$  — орты касательных к линиям тока и эквипотенциалам на  $S$ , а вычисляемое по формуле из [33] расстояние  $\delta^*$  между  $S$  и  $S^*$  в двумерном потоке совпадает с толщиной вытеснения вязкого слоя. Как и для плоских течений [40], квазилинеаризация (6) получена в предположении о малой кривизне линий тока на  $S$  и имеет по меньшей мере, три вычислительных достоинства. Во-первых, достаточно



**Рис. 2.** Проекция линий тока потенциального течения на плоскость мидель-шпангоута танкера HSVA [34].

Сплошные кривые — линии тока, штриховые — сечения корпуса плоскостями  $x = \text{const}$  (шпангоутами). 36 линий тока (0, 2, 5, ..., 35) проходят через точки мидель-шпангоута, равномерно отстоящие друг от друга на расстоянии  $1/35$  половины его длины.

только один раз вычислить используемые для численной реализации (5) матрицы: в новых итерациях в левых частях этих формул будут изменяться только состоящие из значений  $Q + q$  вектора. Во-вторых, слабее будут отражаться на вычислениях коэффициента давления  $C_p$  погрешности вычислений производных  $\delta^*$ ; это утверждение удобно проиллюстрировать утрированным плоским примером: если изменение  $S^*$  привело к появлению излома  $S^*$  в какой-либо точке, то при переносе граничного условия (2) на  $S^*$  скорость вблизи этой точки возрастала бы до бесконечности (или падала до нуля) по степенному закону, а при использовании плотности (6) в имеющих особенность Коши формулах Кулона — менее быстро, только по логарифмическому закону. В-третьих, как отмечалось в [31], при квазилинеаризации (6) и условии  $|\text{grad } \Phi| - U \ll 1$  направления линий тока на  $S$  и  $S^*$  отличаются пренебрежимо мало и линии тока достаточно только однажды нанести на заведомо гладкую исходную поверхность  $S$ .

Сама процедура определения линий тока интегрированием соотношений

$$v_1 dx = u_1 dy, \quad w_1 dx = u_1 dz \quad (7)$$

после отыскания  $\{u, v, w\}$  из (5) была бы тривиальной, если бы не необходимость покрыть всю поверхность тела более или менее равномерной сеткой линий тока и эквипотенциалей для расчета трехмерного пограничного слоя, запись интегральных соотношений которого [41,42] особенно удобна на этой сетке. В [36] наглядно показано, что вблизи критической точки трехмерного потенциального потока вокруг обтекаемого под углом атаки эллипсоида имеет место практически плоское растекание жидкости вдоль плоскости симметрии потока с очень малыми значениями  $U$ , а по мере отхода от критической точки и особенно к средней части тела направления линий тока на поверхности тела резко расходятся. Аналогичную картину для судового корпуса [34] иллюстрирует рис. 2. Поэтому необходимо начальные данные для системы (7) задавать в средней части  $S_w$  и использовать асимптотические формулы для продолжения  $\Phi$  в окрестность критической точки, являющейся фокусом координат для интегральных соотношений трехмерного пограничного слоя.

Выведенная известным [7] способом из двух уравнений изменения импульса и уравнения неразрывности для тонкого пограничного слоя на непроницаемой поверхности система интегральных соотношений может быть записана в виде [43]

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \varphi} + \sum_{j=1}^3 b_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \psi} = C_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Криволинейная координата  $\varphi$  изменяется вдоль линий тока на  $S$ , а  $\psi$  — вдоль ортогональных им эквипотенциалей. Совокупность параметров пограничного слоя  $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  зависит от введенных в нем профилей скорости. Обобщая на трехмерный случай профили Коулса [11], для компонент скорости  $u, w$  турбулентного пограничного слоя, направленных вдоль ортов  $l$  и  $b$ , имеем

$$u(\eta) = v^* F_1(\eta) \cos \beta + \Pi_u F_2(\eta),$$

$$w(\eta) = v^* F_1(\eta) \sin \beta + \Pi_w F_2(\eta). \quad (9)$$

Здесь  $\eta$  — отнесенная к толщине пограничного слоя  $\delta$  и направленная вдоль нормали к  $S_w$  ордината,  $v^*$  — динамическая скорость на  $S$ ,  $\beta$  — угол между трением и потенциальной линией тока на  $S_w$ ,  $F_1 = A \ln |\eta \delta v^* / \nu| + B$ ,  $F_2 = 3\eta^2 - 2\eta^3$ ,  $\Pi_u = u - F_1(\delta) v^* \cos \beta$ ,  $\Pi_w = -F_1(\delta) v^* \sin \beta$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные Кармана ( $A = 2.5$ ,  $B = 5.2$  для гидродинамически гладкой  $S_w$ ). Выбирая в качестве  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  тройку параметров  $\delta, v^*, \beta$ , получим для левых частей (8) при  $i = 1, 2, 3$

$$a_{1j} = \frac{\partial \delta_{11}}{\partial \gamma_j}, \quad a_{2j} = \frac{\partial \delta_{21}}{\partial \gamma_j}, \quad a_{3j} = \frac{\partial \delta_1}{\partial \gamma_j} - \delta_j^1,$$

$$b_{1j} = \chi \frac{\partial \delta_{12}}{\partial \gamma_j}, \quad b_{2j} = \chi \frac{\partial \delta_{22}}{\partial \gamma_j}, \quad b_{3j} = \frac{\partial \delta_2}{\partial \gamma_j},$$

где  $\delta_j^1$  — символ Кронекера,  $\chi = (U h_2)^{-1}$ ,  $h_2$  — коэффициент Ляме для переменной  $\psi$ .

Для правых же частей этих уравнений, используя двумерную эмпирику Гедда [42] для замыкания уравнения эжекции, имеем

$$C_1 = \frac{C_f}{2u} \cos \beta - (2\delta_{11} + \delta_1) \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} - (\delta_{11} + \delta_{22}) \zeta - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta_{11}}{\partial u} - \chi \frac{\partial \delta_{12}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \psi},$$

$$C_2 = (\delta_1 + \delta_{11} - \delta_{22}) \chi \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} - 2\delta_{21} \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} + \zeta \right) - \frac{C_f}{2u} \sin \beta - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \delta_{21}}{\partial u} - \chi \frac{\partial \delta_{22}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \psi},$$

$$C_3 = \chi \frac{\partial \delta_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \psi} + (\delta - \delta_1) \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi} + \zeta \right) - \frac{\partial \delta_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{0.031}{u} \left( \frac{\delta - \delta_1 - \delta_2}{\delta_{11} + \delta_{22}} - 3 \right)^{-0.65}.$$

Здесь  $\Lambda = \ln U$ ,  $\zeta = (\partial \ln h_2)/(\partial \varphi)$ ,  $C_f = 2v^{*2}$ , характерные толщины определяются традиционным [41] образом

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta, \quad \delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{w}{U} d\eta, \quad \delta_{22} = \delta \int_0^1 \frac{w^2}{U^2} d\eta,$$

$$\delta_{11} = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta, \quad \delta_{21} = \delta \int_0^1 \frac{uw}{U^2} d\eta, \quad \delta_{12} = \delta_2 - \delta_{21}.$$

Система квазилинейных, т.е. не содержащих производных в коэффициентах  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ , уравнений в частных производных первого порядка (9) может менять свой тип от точки к точке  $S_w$  в зависимости от значений этих коэффициентов в рассматриваемой точке. Для определения типа системы и дальнейших вычислений (9) удобно преобразовать к виду

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial \varphi} - \sum_{j=1}^3 \kappa_{ij} \frac{\partial \gamma_i}{\partial \psi} = C_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Тогда ее тип определяется собственными числами [44] матрицы, составленной из  $\kappa_{ij}$ . Для уравнений тонкого пристенного слоя в зоне безотрывного обтекания независимо от выбранной тройки переменных  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  [22] эти числа оказываются вещественными и, как правило, различными, а следовательно, системы (8), (10) являются гиперболическими, имеющими в плоскости  $\{\varphi, \psi\}$  характеристики  $\varphi = \lambda_i \psi$ , причем  $\lambda_i$  есть функции координат этой плоскости. Процедура интегрирования квазилинейной системы (10) методом характеристик [44] позволяет, продвигаясь полосами вниз по потоку и уменьшая шаги в областях резкого изменения параметров, по сути дела строить в ходе вычислений адаптивную сетку на  $S_w$  и распределять там весьма значительное число расчетных точек даже при использовании ЭВМ весьма умеренной мощности (40 000 точек на *IBM 386*).

Начальными условиями для системы (8) являются результаты расчета ламинарно-турбулентного перехода. Сильное влияние "сценария" перехода на характеристики турбулентного пограничного слоя при умеренных числах  $Re$  (меньших  $10^7$ ) хорошо известно [45]. Это влияние подтверждает и приведенное на рис. 3 сопоставление наших расчетов с расчетами [18] и экспериментами [37] для эллипсоида вращения с удлинением 6 под углом атаки  $\pi/18$ . Сопоставляемые вычисления производились с использованием одного и того же аналитического распределения  $C_p = 1 - U^2$  для эллипсоида без подъемной силы в потенциальном потоке, вследствие чего представленное сопоставление зависимостей динамической скорости  $v^*$  и направления поверхностных линий тока  $\alpha$  от азимутального угла  $\theta$  может трактоваться как тест. Несколько лучшее соответствие нашего распределения  $v^*(\theta)$  измерениям [37] связано с более точным определением зоны ламинарно-турбулентного перехода, определяемой пока по весьма примитивному критерию Смита [43] как линия перехода, на которой сохраняется  $\delta_{11}$  и уменьшается в

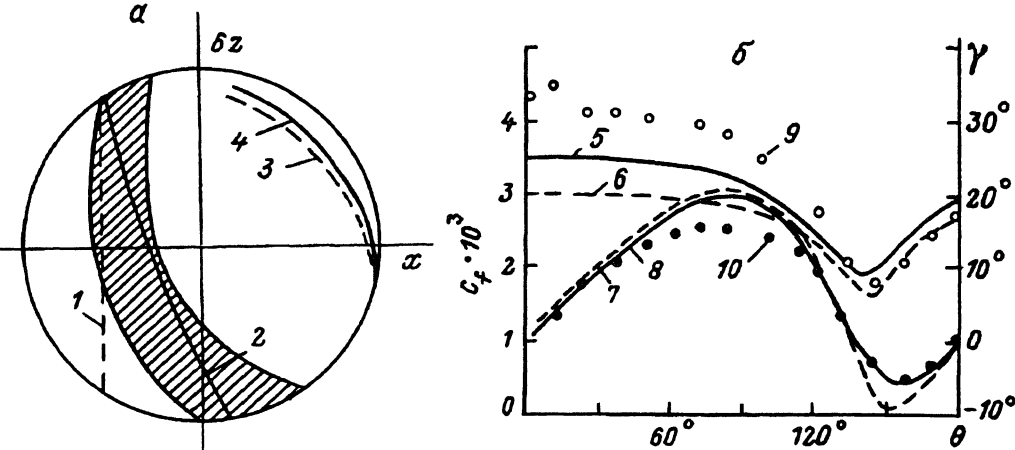


Рис. 3. Сопоставление расчетов и измерений [37] пограничного слоя эллипсоида с соотношением осей 6:1:1, обтекаемого под углом атаки  $\pi/18$  при  $Re=7.2 \cdot 10^6$ .

Сплошные линии — наш расчет, штриховые — расчет [18]; а — линии перехода (1, 2) и линии отрыва (3, 4), заштрихована экспериментальная зона перехода [37]; б — сопоставление  $C_f$  (5, 6) и  $\gamma$  (в град.) (7, 8), 9 — измерения  $C_f$ , 10 — измерения [37],  $x/\alpha = 0.304$ ,  $\theta$  — меридиональный угол в град.

1.55 раз  $\delta_1$  (такое уменьшение есть обобщение данных [46]). Сравнение использованных в [18] и здесь [43] методов расчета трехмерного ламинарного слоя выше зоны перехода по потоку показывает также, что для расчета характеристик большей части турбулентного слоя более точное предсказание перехода важнее более строгого метода расчета ламинарного участка.

Исследование предложенного метода было выполнено как на модели трехосного эллипсоида (рис. 4), так и на модели танкера HSVA (рис. 5), для которого в работе [34] приведены экспериментальные данные по распределению давления  $C_p = 1 \cdot V^2$  и динамической скорости  $v^* = \sqrt{C_f/2}$  на поверхности корпуса, а также результаты расчетов, выполненных разными авторами посредством численного интегрирования осредненных уравнений  $k - \epsilon$ -модели турбулентных течений без введения гипотезы о тонкости пограничного слоя, использованной в уравнениях (8). Проведенное на рис. 6–8 сопоставление двух методов с измерениями в районе кормовой оконечности ( $x > 0.8$ ) показывает, что все эти методы предсказывают поведение потока в корме с одинаковой неточностью. Однако в предложенном интегральном методе трудоемкость вычислений на порядок ниже, что отмечалось и в [47]. Предложенный метод позволяет рассчитывать характеристики слоя вплоть до самой оконечности корпуса, т.е. даже в той области, где слой уже отрывается. Поэтому вопрос о нижней по потоку границе применимости системы (8) неясен. Представленные на рис. 4 и 5 распределения характеристик пограничного слоя вдоль линий тока на трехосном эллипсоиде и модели судна HSVA [34] обладают теми общими чертами, которые были подмечены еще в [21]: за резким увеличением  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $|\beta|$ , и уменьшением  $C_f = 2v^{*2}$  вдоль линий тока вблизи кормовой оконечности следуют замедление роста  $\delta$ , падение  $\delta_1$ ,  $|\beta|$  и рост  $C_f$ . По крайней



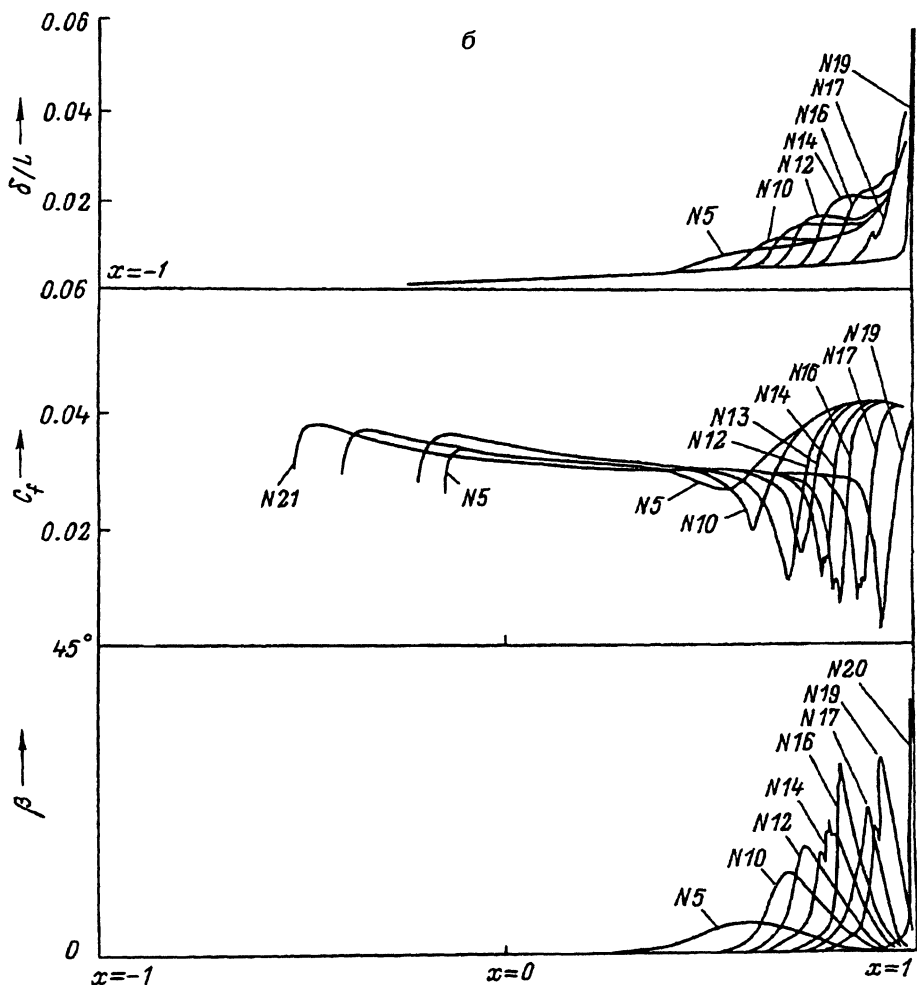
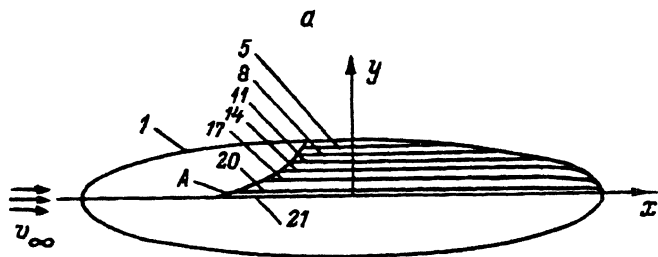


Рис. 4. *a* — вид проекций потенциальных поверхностных линий тока эллипсоида  $a : b : c = 12 : 3 : 1$  в проекции на плоскость симметрии  $XOY$ : 1, 5, 8, ..., 21 — номера линий тока, линии тока 1 и 21 находятся в плоскостях симметрии  $XOY$  и  $XOZ$  соответственно, набегающий поток параллелен оси  $OX$ , *A* — расчетная линия перехода ламинарного слоя в турбулентный; *b* — распределение расчетных характеристик  $\delta/L$ ,  $C_f$ ,  $\beta$  пограничного слоя вдоль потенциальных линий тока (5, 10, ..., 20) на эллипсоиде  $a : b : c = 12 : 3 : 1$  при нулевом угле атаки и числа Рейнольдса  $7.2 \cdot 10^6$ .

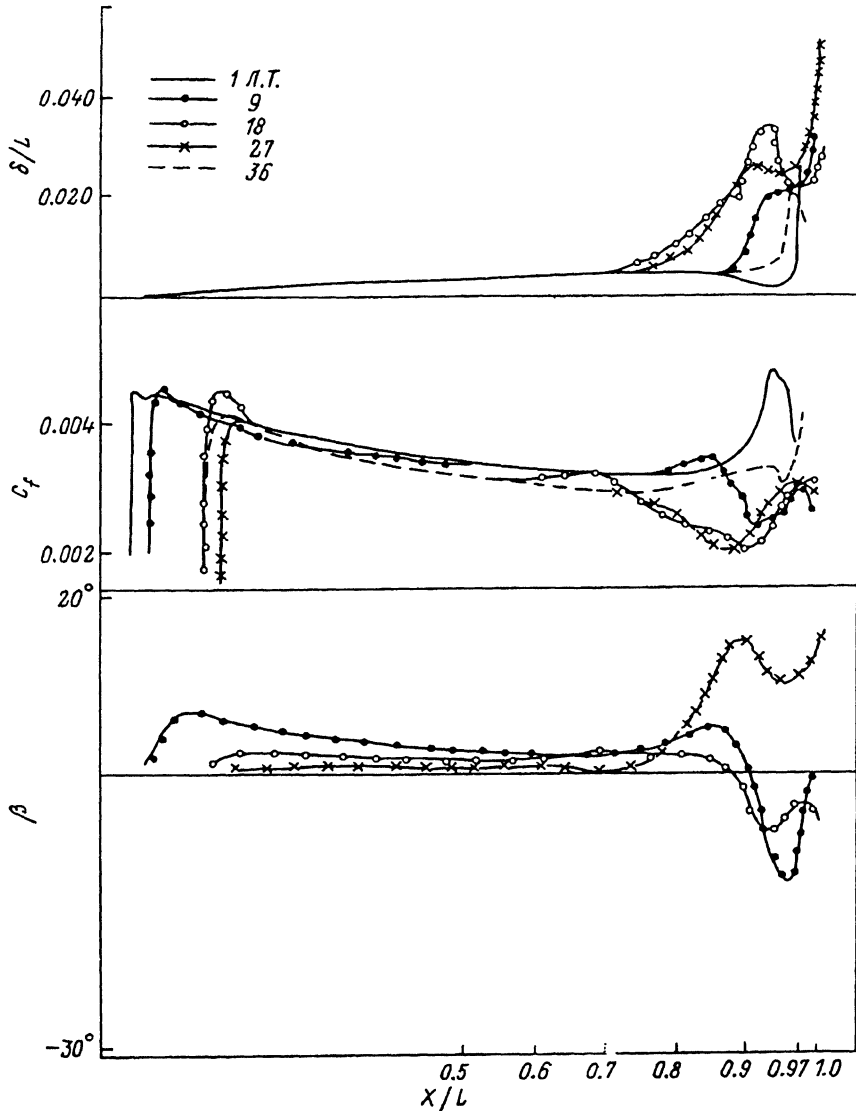


Рис. 5. Распределение расчетных характеристик пограничного слоя на корпусе [34] вдоль потенциальных линий тока (цифры — номера линии,  $Re=5 \cdot 10^6$ ).

мере для трехосного эллипсоида представляется неоспоримым наличие зоны отрыва на корме, однако там оказывается возможным формально продолжать интегрирование тонкого пристенного пограничного слоя (8). Сопоставление аналогичным образом произведенных расчетов (без учета обратного влияния отрыва на  $C_p$ ) с экспериментами позволило отметить [19], что указанные экстремумы действительно лежат уже внутри зоны отрыва. Этот на первый взгляд парадоксальный факт “избыточных” возможностей метода можно, видимо, объяснить следствием осреднения в интегральных методах: эксперименты (на-

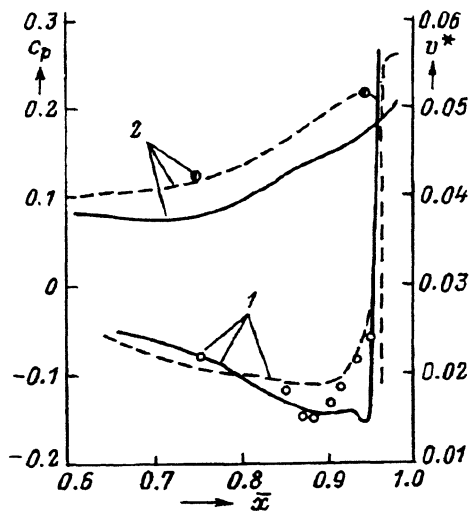
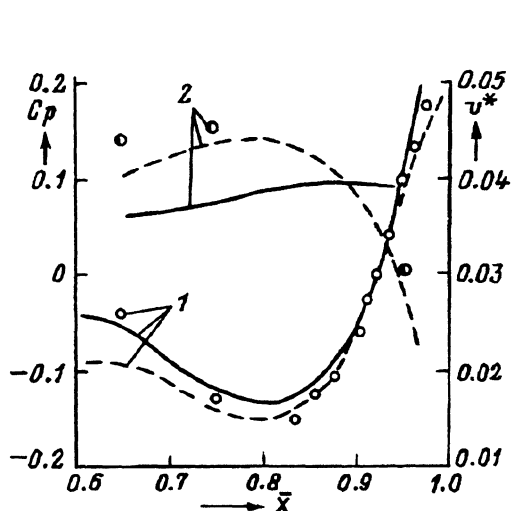


Рис. 6. Сопоставление изменения вдоль ватерлинии танкера HSVA [34] рассчитанных и измеренных значений коэффициента давления  $C_p$  и динамической скорости  $v^*$ .

1 — данные по коэффициенту давления  $C_p$ , 2 — данные по динамической скорости  $v^*$ , сплошные кривые — расчет по предлагаемому методу, штриховые — расчет [34].

Рис. 7. Сопоставление изменения вдоль килевой линии танкера HSVA [34] рассчитанных и измеренных значений  $C_p$  и  $v^*$ .

Обозначения те же, что и на рис. 6.

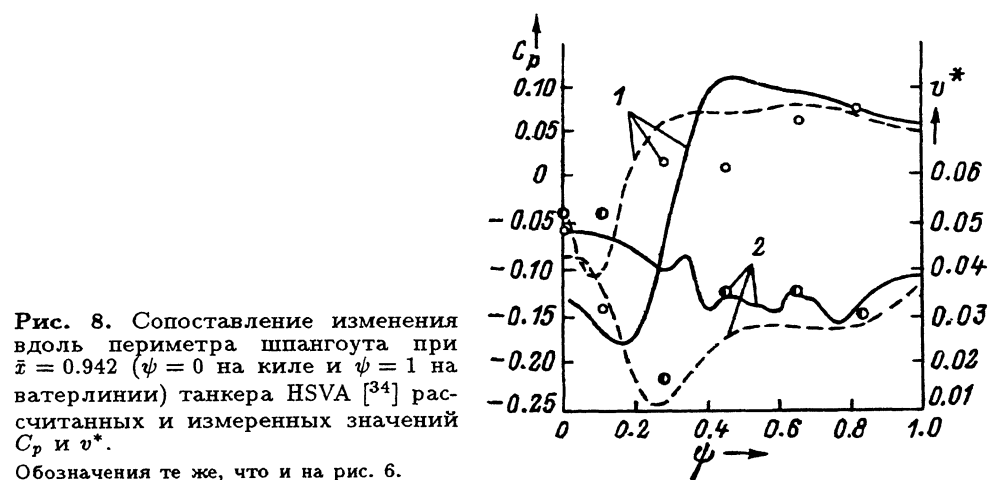


Рис. 8. Сопоставление изменения вдоль периметра шпангоута при  $\bar{x} = 0.942$  ( $\psi = 0$  на киле и  $\psi = 1$  на ватерлинии) танкера HSVA [34] рассчитанных и измеренных значений  $C_p$  и  $v^*$ .

Обозначения те же, что и на рис. 6.

пример, из [13,15]) свидетельствуют, что даже в зонах плоского отрыва большая часть импульса и массы продолжает переноситься вниз по потоку и т.п. В терммерном случае оказывается затруднительным в отличие от плоского случая сформулировать такой критерий, в котором для определения примерной линии начала отрыва можно было бы использовать потенциальное распределение давления по  $S_w$ . Например, границы зон отрыва на эллипсоиде при угле атаки  $\pi/6$  в экспериментах [36,37] свидетельствуют о невозможности их определения по

такому  $C_p$  из условия [48]

$$\frac{\partial C_p}{\partial \varphi} \cos \beta + \frac{\partial C_p}{\partial \psi} \sin \beta = 0. \quad (11)$$

Если же рассматривать (11) как экспериментальное соотношение, оперирующее измеренным давлением на линии отрыва, то из него следует утверждение: отрывная зона начинается с какой-либо полосы постоянного давления.

### Отыскание трехмерных изобарических зон

Построение трехмерных поверхностей постоянного давления — это нелинейная задача теории струй идеальной жидкости, которую можно сформулировать с помощью потенциала скорости, дополнив соотношения (1)–(3) условием

$$|\text{grad } \Phi|^2 = 1 - C_{p_0} \quad (12)$$

на части  $S$ , обозначаемой  $S_1$ , при  $C_{p_0} = \text{const}$ . Бесконечному множеству допускаемой этой теорией значений  $C_{p_0}$  соответствует бесконечная совокупность входящих в качестве составной части в  $S$  поверхностей  $S_1$ , в то время как в задачах расчета отрывных течений надо выбрать лишь одно определенное значение  $C_{p_0}$ . Если сформулировано правило определения  $C_{p_0}$  и известна верхняя по потоку граница отрывной зоны, то задача (1)–(3), (12) может быть решена итеративным методом, в котором в каждом приближении поочередно решаются линейная задача (1)–(3) на известной  $S$  для определения  $\text{grad } \Phi$  и вычисления невязки в (12), а также квазилинейная задача корректировки формы  $S$  по этой невязке с помощью дифференциального уравнения (6) относительно  $\delta^*$ . Функция же  $q(S)$  при таком способе использования определяется из сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{(S)} q \frac{\partial}{\partial l} \frac{1}{r} dS + U = \frac{1 - C_{p_0}}{U}. \quad (13)$$

Правило определения  $C_{p_0}$  обычно связывает эту величину с коэффициентом сопротивления  $C_x$ , вычисляемым по характеристикам потока далеко за зоной отрыва [7, 11].

В некоторых редких случаях упомянутое правило может быть сформулировано элементарно, например, для обтекания диафрагмы или заслонки в трубе кругового поперечного сечения. Связывая сечения, лежащие значительно ниже и выше преграды по потоку, имеющему потенциальное ядро, одномерными законами сохранения

$$1 = u_1(1 - \delta^*)^2, \quad (1 + C_x) = u_1^2(1 - \delta^{**})^2, \quad (14), (15)$$

предполагая, что  $C_x$  определяется исключительно сопротивлением давления на преграде, задавая отношение  $\delta^*/\delta^{**}$  далеко ниже нее по потоку (например, равным 9/7) и исключая скорость  $u_1$  из (14), (15), получают выражение для  $\delta^*$ . Если использовать для замыкания струй

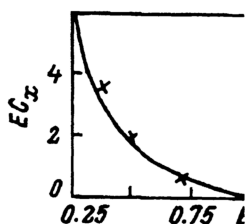


Рис. 9. Сопоставление расчетного и экспериментального [49] значения коэффициента сопротивления диафрагмы в трубе при различных отношениях  $E$  площади отверстия в диафрагме к площади поперечного сечения трубы.

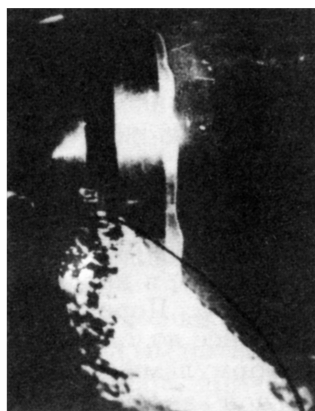


Рис. 10. Форма изобарической зоны с каверной в ней на теле вращения при  $Re = 4 \cdot 10^6$  и угле атаки  $\pi/36$ .

Кривой очерчена расчетная форма, цифры — номера линий тока.

в задаче (1)–(3), (12) схему Жуковского–Рощко [30,31], то упомянутое значение  $\delta^*$  должно совпадать с шириной изобарической зоны. Полученные в ходе такого решения значения  $C_x$ , как видно по рис. 9, вполне удовлетворительно соответствуют измерениям [48] без всякого прямого расчета пограничных слоев и вязких следов.

Столь удовлетворительному соответствию способствуют как относительно малая доля потерь между преградой и контрольным сечением, расположенным далеко за ней, в общем балансе сопротивления, так и точность информации о положении начала изобарической зоны. Для получения такой информации в отсутствие фиксированного отрыва надо пытаться применять модификации двумерных локальных критериев отрыва [7,11]

$$\varphi_1 - \varphi_0 = k_1 \delta_1(\varphi_0), \quad \frac{\delta_1(\varphi_1) - \delta_1(\varphi_0)}{\varphi_1 - \varphi_0} = k_2. \quad (16), (17)$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_0$  — криволинейные координаты начала изобарической зоны и зоны перемежающегося отрыва соответственно;  $k_1, k_2$  — эмпирические константы.

Проверить перспективность таких попыток предпочтительно на таком примере, в котором не было бы сильного влияния вязкого следа или подъемной силы на распределение давления, а обратное влияние вязкого слоя на  $C_p$  было бы преимущественно влиянием собственно отрывной зоны. Нами в качестве такого примера выбрано тело вращения удлинения порядка десяти, обтекаемое под углом атаки  $\pi/36$  с образованием кавитационного отрыва на носовой оконечности. В эксперименте Н.И. Евдоиной, получившей фотографию тела с каверной, представленную на рис. 10, его диаметр был равен 0.32 м, построенное по нему число Рейнольда  $4 \cdot 10^6$  и пограничный слой перед каверной был турбулентным, а подъемная сила компенсировалась стабилизаторами. Значение числа кавитации  $\sigma$ , практически равного —  $C_{p0}$ ,

в этом эксперименте было 0.6. Эксперименты [50] свидетельствуют о том, что при наличии турбулентного слоя перед каверной отсутствует непрерывная линия ее присоединения к телу с краевым углом, зависящим практически только от смачиваемости поверхности. Это связано с тем, что в определяющей формуле каверны формуле Лапласа

$$C_p + \sigma + C'_p = 2\kappa We^{-1} \quad (18)$$

пульсации давления  $C'_p$  могут в турбулентном слое превосходить правую часть (18), в которой  $\kappa$  — кривизна границы каверны, а  $We$  — число Вебера. Передняя часть каверны заполнена пузырями, и расстояние от нее до  $\varphi_0$ , т.е. до пристенного пограничного слоя, описывается не формулами из [51], а скорее критериями типа (16), (17). Ниже заполненной каверной изобарической зоны имеется диффузорный участок, за которым пограничный слой присоединяется к телу. Его длина и перепад давления в нем определяются, как и в [10], из условий

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} - k_3 \delta^* U = 0, \quad h = \delta^*, \quad (19), (20)$$

накладываемых в точке присоединения. Здесь  $k_3 = \text{const}$ ,  $h$  — построенное по условию (13) с возрастающей правой частью расстояние от  $S^*$  до  $S_w$ .

Представленное на рис. 10 сопоставление расчета для  $k_1 = 4$ ,  $k_2 = 0.08$ ,  $k_3 = 0.015$  и эксперимента показывает удовлетворительность даже этой простой адаптации двумерных методов для отыскания размера трехмерной изобарической зоны. Однако здесь, как и в [10,51], нет продолжения расчета ниже отрывной зоны по потоку.

### Проблемы расчета течения внутри отрывной зоны и в вязком следе

Известны два подхода к продолжению расчета вязкого слоя интегральными методами ниже зоны перемежающегося отрыва по потоку: с расчетом вплоть до самой стенки [11] и с обходом пристенной области возвратных токов [7]. Во втором из них для определения параметров в сечении стыковки отрывной зоны со следом необходимо сопоставлять значения сопротивления, вычисленные в сечении  $x = x_\infty$  по значению  $\delta_\infty^* = \delta^*(x_\infty)$  согласно формуле

$$C_x = \frac{2\pi \delta_\infty^{*2}}{|S_w|}, \quad (21)$$

и интегрированием давлений по всей смоченной поверхности площади  $|S_w|$ . Именно в этой последней операции заключается основная практическая трудность реализации такого подхода для удлиненных тел, поскольку обычно отрыв на них приводит к увеличению сопротивления давления на величины порядка 0.001–0.003, как правило, не превосходящие коэффициент сопротивления трения. Однако погрешность вычисления  $C_p$  с помощью формул (5), (6) на теле, не имеющем в отличие от эллипсоидов аналитических формул для компонент  $\text{grad } \Phi$ ,

оказывается является не ниже 0.003–0.005, и нельзя априори утверждать, что интегрирование  $C_p$  непременно взаимно уничтожит все локальные погрешности.

Напротив, при первом подходе формальных трудностей в интегрировании системы (8) с профилем (9) или с модифицированным профилем, в котором будет изменена функция  $F_1(\eta)$ , таких трудностей как будто не предвидется, если только несколько сбавить в корме рост  $C_p$ , присущий потенциальной задаче для замкнутого тела. В частности, использование показанной на рис. 1 полубесконечной поверхности  $S$  для вычисления  $C_p$  избавит от этого роста. Приведенные на рис. 11 распределения параметров пограничного слоя вдоль линий тока за срезом кормы танкера [34] получены формальным интегрированием уравнений (1) на фиктивном продолжении танкера, причем гидродинамические особенности в (4) распределялись именно по этому же заостренному “фиктивному телу Пателя”. Между прочим видно, что с удалением от кормового среза значения  $\delta$ ,  $\beta$  вдоль разных линий тока начинают выравниваться, т.е. некоторыми своими свойствами вязкий слой на “фиктивном теле Пателя” напоминает вязкий след. Такая тенденция наводит на мысль использовать в вязком следе профиль типа (9), но с функцией

$$F_1 = u_0(x, \theta) \quad (22)$$

постулировать  $C_f \equiv 0$  в выражениях для  $C_1$  и  $C_2$  в системе (1), а вместо ее третьего уравнения постулировать

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = F_3(x, \theta), \quad (23)$$

где функция  $F_3$  будет заданной убывающей функцией. Вычислительные трудности, связанные с вырождением второго из уравнений (1) в результате использования (22), (23), станут серьезными гораздо позже, чем можно будет применить (21) для вычисления  $C_x$ . Предложенная имитация расчета течения в вязком следе представляется вполне приемлемой хотя бы до тех пор, пока отлаженные на плоских течениях расчетные методы собственно для следа [52] не будут адаптированы к трехмерным следам с их довольно затейливыми изотопами [53]. В будущем, однако, в отличие от продемонстрированного на рис. 11 расчета поверхность  $S$  для вычисления  $Q$  и  $C_p$  не следует совмещать с “фиктивным телом Пателя”.

В отрывной зоне было бы желательно назначать профили скорости для возвратных течений с учетом новейших измерений [28, 29]. Однако не вполне ясны условия стыковки зон для вычисления параметров. Они не вполне ясны даже в случае сохранения вида  $F_1$  при переходе через  $\varphi_1(\psi)$  (как это рекомендовалось в [11] для двумерных течений). Из условия сохранения расхода тогда следует

$$U \sin \beta \int_0^{\delta} F_2 \frac{(y)}{(\delta)} dy = \text{const.} \quad (24)$$

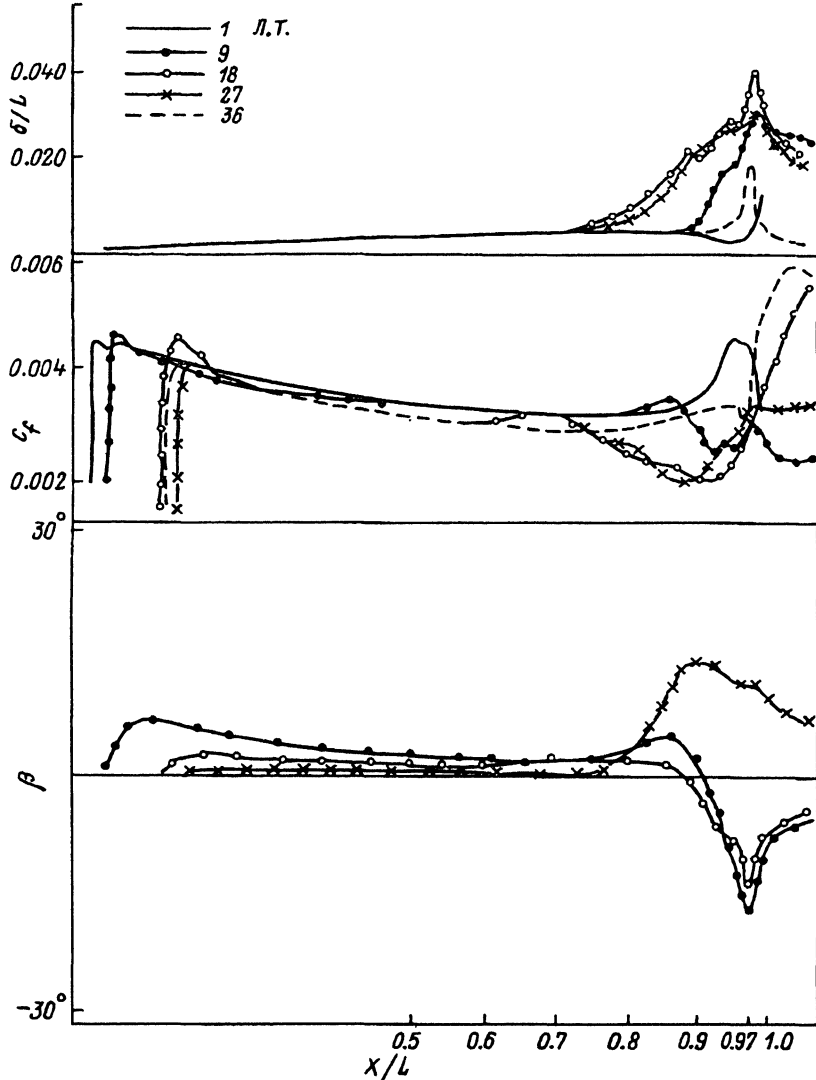


Рис. 11. Распределение расчетных характеристик пограничного слоя на корпусе [34] с "фигурным телом Пателя" за кормовым срезом вдоль потенциальных линий тока для  $Re = 5 \cdot 10^6$ .

Естественно также требование  $U = \text{const}$ . Извлеченные из качественных картинок отрыва [19,25,36] топологические соображения наводят на мысль потребовать также  $\beta = \text{const}$ . Однако следующее из (24) условие

$$\int_0^{\delta(\varphi_1+0)} F_2(\eta, \varphi_1+0) dy = \int_0^{\delta(\varphi_1-0)} F_2(\eta, \varphi_1-0) dy \quad (25)$$

необходимо дополнить еще некоторым условием, чтобы определить обе величины, которые могли бы иметь скачок в начале отрывной зоны,



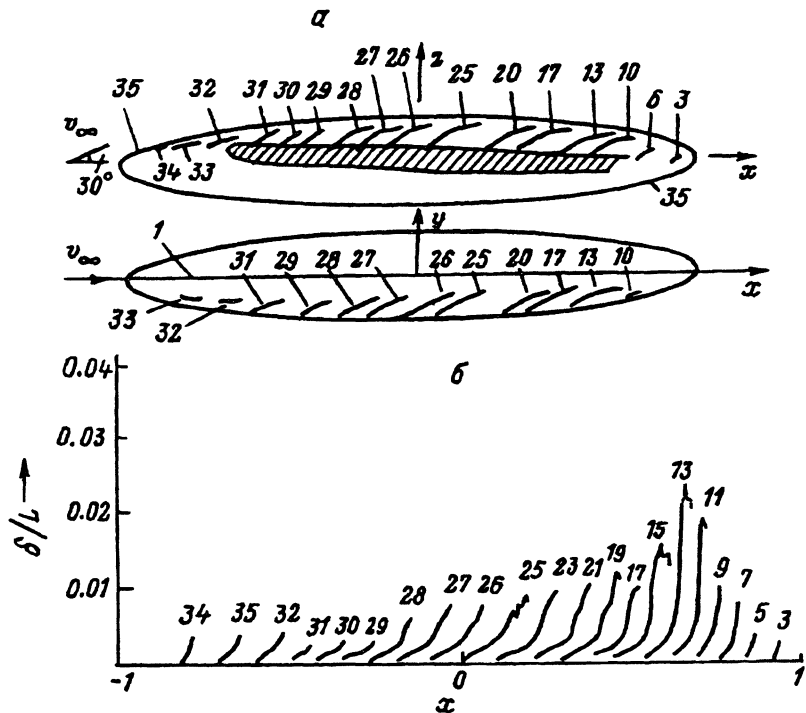


Рис. 12.

$a$  — вид предельных линий тока 1–35 на поверхности эллипсоида  $a : b : c = 6 : 1 : 1$ , обтекаемого под углом атаки  $30^\circ$  при  $Re = 7.2 \cdot 10^6$ ; заштрихована экспериментальная зона перехода ламинарного слоя в турбулентный [37];  $b$  — изменения относительной толщины пограничного слоя вдоль предельных линий тока на поверхности эллипсоида  $a : b : c = 6 : 1 : 1$ , обтекаемого под углом атаки  $30^\circ$  при  $Re = 7.2 \cdot 10^6$ .

т.е.  $\delta$ ,  $v^*$  (или величину, аналогичную  $v^*$  по смыслу). Задав разные  $F_2$  по разные стороны границы, из (25) и еще не сформулированного здесь второго условия можно было бы определить интенсивность  $\Gamma$ , формирующегося в трехмерных отрывных пузырях продольного вихря.

Определение  $\Gamma$  и включение каким-то образом в задачу расчета потенциального течения наряду со скалярным потенциалом  $\Phi$  векторного потенциала скорости плотности  $\Gamma$  будут совершенно необходимы при расчетах, например, обтекания эллипсоидов под большими углами атаки. Иллюстрации расчетов этого обтекания представлены на рис. 12,  $a$ ,  $b$ , в которых использовалось потенциальное  $C_p$ , однако расчеты не удалось продвинуть на подветренную сторону методом характеристик, так как одна из характеристик линий совпадает с границей области, на которой останавливается решение. Однако нами пока не исследовался вопрос, нельзя ли будет продолжить решение, если начиная с линии максимумов  $\delta(\varphi)$  в качестве искоемых параметров в ней выбрать  $\{U, \delta, \beta\}$  или  $\{U, \delta, v^*\}$ , а  $v^*$  или  $\beta$  задавать из каких-то других соотношений подобно тому, как задается  $U$  в тонком пристенном пограничном слое. Впоследствии же эту задаваемую величину можно было бы уточнить в итерациях, используя квазилинеаризованное условие непротекания (6) подобно тому, как аналогичное условие использовалось в [23] для уточнения  $U$  посредством учета обратного влияния точного пограничного слоя.

Приведенные выше материалы позволяют заключить, что проблема разработки универсального расчетного метода для турбулентных трехмерных отрывных течений жидкости еще далека от решения. В то же время частные успехи позволяют надеяться на то, что в некоторых конкретных случаях отрыва на удлиненных телах, обтекаемых без значительной подъемной силы, полный численный расчет всего течения сможет быть завершен весьма скоро. Для оценки же перспектив использования выбранных здесь расчетных методов и схем в расчетах сложных и значительных отрывных зон на эллипсоидах под углами атаки и в подобных случаях важно прежде всего выяснить возможности интегрирования систем типа (1) в отрывных зонах при включении  $U$  в число ее неизвестных.

### Список литературы

- [1] Чжен П. Отрывные течения. Т. 1-3. М.: Мир, 1972-1973.
- [2] Чжен П. Управление отрывом потока. М.: Мир, 1979.
- [3] Ильичев К.П., Постоловский С.Н. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 2. С. 72-82.
- [4] Белоцерковский С.М., Ништ М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
- [5] Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.М., Давыдов Ю.М., Ништ М.И. // ДАН СССР. 1983. Т. 273. С. 821-825.
- [6] Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вих.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука, 1987.
- [7] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979.
- [8] Kwon O.K., Pletcher R.H. // J. Fl. Eng. 1979. N 4.
- [9] Cebeci T., Stewartson K. // J. Fl. Mech. 1983. Vol. 133. P. 287-296.
- [10] Амромин Э.Л., Александров К.В., Левковский Ю.Л. // ПМТФ. 1986. № 2.
- [11] Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю. Отрывные и кавитационные течения. М.: Наука, 1990.
- [12] Rhie C.M., Chow W.L. // AIAA J. 1983. Vol. 21. N 1.
- [13] Benodekar R.W., Goddard A.J.H., Gosman A.D., Issa R.I. // AIAA J. 1985. Vol. 23. P. 359-366.
- [14] Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1989.
- [15] Malley K.O., Fitt A.D., Jones T.V., Ockendon J.K. // JEM. 1991. Vol. 222. P. 139-155.
- [16] Horton H.P. // AIAA J. 1974. Vol. 12. P. 1772-1774.
- [17] Васильев В.И., Хохлов С.В., Шальман Е.Ю. // ПМТФ. 1990. № 6. С. 46-54.
- [18] Шток Е.В., Зайберт В. // Трехмерные турбулентные пограничные слои. М.: Мир, 1985.
- [19] Хиршель Э., Кордулла В. Сдвиговое течение сжимаемой жидкости. М.: Мир, 1987.
- [20] Карпеев Ю.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 3. С. 69-77.
- [21] Cebeci T., Keller G.L., Unt H., Stewartson K. // Phys. Fluids. 1983. N 5. P. 1192-1197.
- [22] Cousteix J., Houdevill R. // AIAA J. 1981. Vol. 19. N 8. P. 976.
- [23] Cebeci T., Седлок Д., Чонг К.К., Кларк Р.В. // АКТ. 1990. № 4. С. 106.
- [24] Larson L., Broberd L., Kim K.J., Zhang D.H. // Hiroshima. 1989.
- [25] Lai K.Y.M., Makomaski A.H. // J. Fl. Engl. 1989. N 4. P. 449.
- [26] Ju S., Patel V.S. // Ship Res. 1991. Vol. 35. N 2. P. 101-113.
- [27] Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flows. McCraw-Hill, 1980.
- [28] Agarwal N.K., Simpson R.L. // AIAA J. 1990. Vol. 28. N 10. P. 1764.
- [29] Девенпорт У.Дж., Саттон Э.П. // АКТ. 1991. № 6.
- [30] Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964.
- [31] Амромин Э.Л., Зилист Л.П., Тимошин Ю.С. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 162-165.

- [32] Амромин Э.Л. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 4. С. 194-199.
- [33] Lightill M.J. // J. Fluid Mech. 1958. Vol. 4. P. 383-393.
- [34] Larsson L., Patel V.C., Dyne G. // Proc. of 1990 SSPA-CTH-IIHR. Workshop Research Report. Gothenburg Flowtech International AB, 1991. N 2.
- [35] Yim Y.-B. // Schiffstechnik. Bd 40. P. 39-54.
- [36] Han T., Patel V.C. // J. Fl. Mech. 1979. Vol. 92. P. 643-657.
- [37] Meier H.U., Kreplin H.P. // ZFW. 1980. N 2. P. 65-71.
- [38] СМБ. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
- [39] Hess J., Smith A. Douglas Aircraft division. Report NES 40622. 1962.
- [40] Иванов А.Н. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 36. С. 61-66.
- [41] Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962.
- [42] Федяевский К.К., Гиневский А.С., Колесников А.В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973.
- [43] Timochin Yu.S. Selected Paper of Hydrod. KSRI. 1992.
- [44] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.
- [45] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
- [46] Себечи Т. // АКТ. 1990. № 7. С. 52.
- [47] Смит П.Д. // Трехмерные турбулентные пограничные слои. М.: Мир, 1985.
- [48] Бам-Зеликович Г.М. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1970. № 2.
- [49] Идельчик И.Е. Аэрогидродинамика технологических аппаратов. М.: Машиностроение, 1983.
- [50] Briancon-Mrjolle L., Franc J.P., Michel J.M. // J. Fl. Mech. 1990. Vol. 218. P. 355-376.
- [51] Амромин Э.Л., Васильев А.В., Дробленков В.В. // ПМТФ. 1988. № 6.
- [52] Patel V.C., Chen H.C. // AIAA J. 1987. N 8. P. 1078-1085.
- [53] Toda T., Stern F., Tanaka I., Patel V.C. // 22 Amer. Tow. Tank. conf. 1989.
-