01;09

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА ФУНКЦИОНАЛОВ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

М.В.Давидович

Центральный научно-исследовательский институт
измерительной аппаратуры,
410002, Саратов, Россия
(Поступило в Редакцию 22 октября 1993 г.
В окончательной редакции 18 апреля 1994 г.)

Погрешности численного моделирования электродинамических структур при решении краевых задач электродинаки и электростатики в подавляющем количестве случаев оцениваются путем численного исследования внутренней сходимости алгоритмов. Обычно при этом довольствуются стабилизацией результатов вычислений, что является чисто качественной характеристикой и не дает гарантированных оценок точности. Гарантированные оценки особенно актуальны в связи с возможностью явления относительной сходимости в электродинамике [1]. Их получение для представимых функционалами параметров основывается на апостериорных методах оценки погрешностей [2–6], которые базируются на свойствах найденных решений. Для построения таких оценок обычно используются несколько различных (встречных) методов решения исходной задачи (например, методы Ритца и Трефтца) или неравенство Като [2]. В обоих случаях необходимо строить базисные функции, удовлетворяющие обычно сложным граничным условиям и определенным условиям непрерывности на границах раздела сред.

Наиболее широкое распространение при решении задач электродинамики получил основанный на введении базисов Трефтца в частичных областях метод иммитансных и адмитансных интегральных уравнений (ИУ). Поскольку базисы Трефтца точно (в задачах дифракции) или приближенно (с точностью определения резонансных частот в задачах о собственных колебаниях) удовлетворяют уравнениям Максвелла, то является заманчивым получение двусторонних оценок погрешностей через степень неудовлетворения ("невязки") граничных условий. Впервые оценки через невязки получены для функционалов электростатики в работе [7]. Оценки функционалов электродинамики через невязки граничных условий приведены в работах [8,9], при этом рассмотрены как задачи о собственных колебаниях [8], так и задачи дифракции [9].

В данной работе получены другие оценки функционалов для задач о собственных колебаниях, основанные на использовании неравенства Като и введении некоторых предположений о свойствах решений.

Рассмотрим вариационную постановку задач электродинамики [2], ограничившись функционалами для собственных колебаний резонаторов. Введем обобщенный оператор L, действующий в гильбертовом пространстве, элементами которого являются либо электрические поля $\mathbf{E}$, либо магнитные поля $\mathbf{H}$, либо их совокупность $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$. Соответственно под L будем понимать электрический L_E, магнитный L_H операторы или оператор Максвелла L_M. Базисами Трефтца для таких задач с кусочно-постоянными проницаемостями являются функции, удовлетворяющие уравнениям Эйлера для соответствующих функционалов, т. е. либо однородным уравнениям Максвелла для функционалов от $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (случай L_M), либо однородным уравнениям Гельмгольца для одного из полей. Эти базисы разрывны и принадлежат области определения несамосопряженного оператора, что приводит в общем случае к невозможности прямого применения неравенства Като из-за расходимости соответствующих рядов [2]. В работе [8] эту трудность обходят путем обращения спектра оператора. Полученные здесь оценки основаны на том, что найденная методом Галеркина пробная функция U, под которой будем понимать поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ либо их совокупность, с определенной степенью точности удовлетворяет соответствующему иммитансному ИУ. Эту степень приближения к точному решению определим ниже. Будем далее придерживаться обозначений из работ [2,8]. Запишем разложения по полным ортонормированным с эрмитовым весом q системам соленоидальных U_n и потенциальных U'_n функций области v

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} C_n U_n + \sum_{n=1}^{\infty} C'_n U'_n,$$

$$q^{-1} L U = \sum_{n=1}^{\infty} B_n U_n + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n U'_n,$$

$$q^{-1} L q^{-1} L U = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n U'_n, \tag{1}$$

где L — соответствующий электродинамический оператор; q — весовая функция, выражающаяся через проницаемости $\varepsilon_0\varepsilon$, $\mu_0\mu$ [2].

Обозначим совокупность поверхностных интегралов, получающуюся при переносе действия оператора L с U на некоторую функцию V в их скалярном произведении и означающую невязку потоков мощностей через соответствующие двусторонние поверхности, как

$$\theta(U, V) = (LU, V) - (U, LV). \tag{2}$$

Например, для электрического оператора $L = L_E = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot}$, $q = \varepsilon_0 \varepsilon$, эти интегралы даются формулой (2,2) работы [2]. Для функций из разложений (1) справедливы соотношения

$$LU = \lambda q U,$$

$$LU_n = \lambda_n q U_n, \quad LU_n' = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где собственными значениями λ_n являются обычно квадраты частот, а λ находится из решения ИУ.

Предположим, что приближенное решение U этого ИУ достаточно хорошее в том смысле, что сходится ряд

$$\hat{\theta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\theta_n|^2, \tag{4}$$

где $\theta_n = \theta(U, U_n)$ означают частичные невязки.

Получение решения ИУ методом Галеркина, как нетрудно видеть, эквивалентно условию

$$\theta(U, U) = 0. \tag{5}$$

С привлечением (2)–(5) получим следующие соотношения:

$$B_n = \lambda C_n = \lambda_n C_n + \theta_n, \quad B_n' = \lambda C_n',$$

$$A_n = \lambda_n^2 C_n = \lambda_n C_n + (\lambda_n + \lambda)\theta_n, \quad A_n' = \chi^2 C_n',$$

$$C_n = \theta_n / (\lambda - \lambda_n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |C_n|^2 = \lambda(P + N),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |C_n|^2 = \hat{\theta}^2 + 2\lambda^2 P + \lambda^2 N,$$

$$\theta(U, U_n) = -\theta(U_n, U),$$

$$\theta(U, U^p) = -\theta(U, U^s) = \lambda P,$$

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2, \quad P = \sum_{n=1}^{\infty} |C_n'|^2, \tag{6}$$

где N — норма колебания U; U^s — соленоидальная, U^p — потенциальная части функции U, определяемые соответственно суммами по функциям U_n и U_n' в (1).

Далее рассмотрение аналогично параграфу 21 работы [2]. Предположим, что известен интервал (α, β), в котором содержится только одно искомое собственное значение λ_k, а λ — его приближенное значение, удовлетворяющее условию $\alpha < \lambda < \beta$. Для получения оценки сверху предположим, что $\mu_1 > \alpha$. Рассмотрим следующие квадратичные выражения для соленоидальных λ_n и потенциальных λ_n' собственных значений:

$$(\lambda_n^{(\prime)} - \alpha)(\lambda_n^{(\prime)} - \mu_1) = \lambda_n^2 - (\alpha + \mu_1)\lambda_n + \alpha\mu_1. \tag{7}$$

Они неотрицательны для всех n, если интервал (α, μ) не содержит точек спектра. Умножим (7) на $|A_n^{(\prime)}|^2$ и просуммируем, в том числе и по потенциальным коэффициентам, считая $\lambda_n' = 0$. Необходимым условием отрицательности полученной суммы является наличие точки спектра в интервале $\alpha < \lambda_k < \mu_1$. С привлечением спектральных представлений (6) можем тогда записать

$$\mu_1 \leqslant \lambda + \frac{\hat{\theta}^2 + \lambda^2 P}{(N+P)(\lambda - \alpha)}. \tag{8}$$

Повторяя аналогичные рассуждения для значения $\mu_2 < \beta$, придем к оценке

$$\lambda - \frac{\hat{\theta}^2 + \lambda^2 P}{(N+P)(\beta - \lambda)} \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda + \frac{\hat{\theta}^2 + \lambda^2 P}{(N+P)(\lambda - \alpha)}. \tag{9}$$

Величина P здесь пропорциональна электрической или магнитной энергии статических полей поверхностных электрических или магнитных зарядов [8] с плотностями $\sigma^e = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{D}^+ - \mathbf{D}^-)$ и $\sigma^m = \boldsymbol{\nu}(\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-)$, порождаемых невязками индукций $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ и может быть легко определена [8]. Однако для определения $\hat{\theta}^2$ необходимо знать истинные собственные функции, которые, как правило, неизвестны. Поэтому в качестве набора таковых целесообразно взять ряд приближенно определяемых этих функций. Оценка (9) тогда в строгом смысле не является замкнутой, однако она более содержательна, чем обычно практикуемое исследование внутренней сходимости алгоритмов. Любые частичные суммы ряда (4) вычисляются с любой заданной точностью при сходимости метода Галеркина. Если при этом можно получить явное асимптотическое представление для θ_n и ряд (4) сходится, то оценка (9) получается в замкнутом виде.

В качестве простейшего примера рассмотрим резонатор в виде короткозамкнутого с двух концов отрезка плоскопараллельного волновода длиной $2l$ и высотой $2b$ с симметрично расположенной по его оси z симметричной относительно плоскости $y = 0$ емкостной диафрагмой размером $2d$. Будем рассматривать симметричные по y магнитные (по отношению к оси x) колебания H_{0mn} такого резонатора. Как нетрудно показать, они описываются адмитансным ИУ относительно неизвестной компоненты электрического поля $E_y(y)$

$$\int_0^d K(y, y') E_y(y') dy' = 0, \tag{10}$$

где

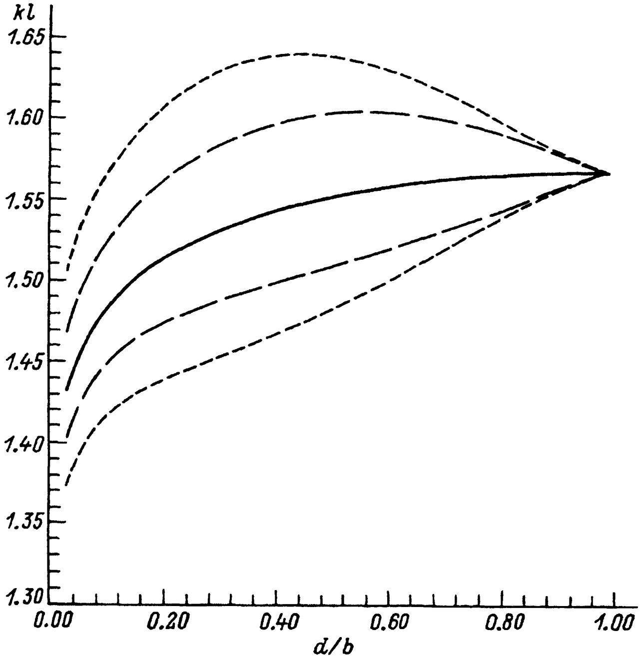
$$K(y, y') = \frac{2jk}{Z_0 b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\pi y/b)\cos(n\pi y'/b)}{\gamma_n \operatorname{tg}(\gamma_n l)(1 + \delta_{n0})}, \tag{11}$$

$\gamma_n = (k^2 - (n\pi/b)^2)^{-1/2}$, k — волновое число, δ_{nm} — символ Кронеккера, Z_0 — импеданс свободного пространства.

Решения (10) будем искать с использованием базиса $U_m(y)$, $m = 0, 1, \ldots, M$, имеющего вид

$$U_m(y) = \cos(m\pi y/d) \left\{ c_1 \sin\left(\frac{\pi d}{2b}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi d}{2b}\right) \left[1 - (y/b)^2\right]^{-1/2} \right\}, \tag{12}$$

где c_1, c_2 — заданные константы.



Нормированное резонансное волновое число резонатора (сплошная кривая) и двусторонние оценки погрешности (пунктир) в зависимости от нормированного размера диафрагмы при $l/b = 10$.

Он удобен тем, что функции (12) полны и обладают требуемой особенностью для любых d, при $d = b$ они совпадают с точными мембранными значениями для H_{0mn}-типов колебаний, а при $d \to 0$ имеют правильное асимптотическое поведение для узкой щели. Кроме того, соответствующие интегралы вычисляются явно. Коэффициенты в (12) выберем из условия, что при $d = b/2$ и одинаковых множителях при особенности в окрестности точки d функция $u_0(y)$ численно равна в точке $y = 0$ значению известного точного квазистатического решения для симметричной диафрагмы [10]. Это дает $c_1 = 2 - c_2$, $c_2 = (8/\pi)^{1/2}$.

На рисунке приведены результаты оценки погрешности резонансной частоты низшего H_{001}-колебания при использовании первых 10 типов в полученных соотношениях. Невязки вычислялись в 40 точках интервала $(0, d)$. Основной тип колебаний (сплошная кривая) определялся с использованием одной и трех, а высшие — двадцати базисных функций в (10). Верхние и нижние значения нормированного волнового числа в первом случае представлены пунктиром, а во втором — штриховыми кривыми. В нашем случае достаточно определить лишь высшие моды H-колебаний, так как для E-колебаний θ_n обращаются в нуль. Отметим, что соответствующее решение для резонатора в виде прямоугольного волновода с диафрагмой может быть получено путем стандартной замены волновых векторов [10].

Ясно, что сходимость или расходимость ряда (4) и тем самым возможность получения оценки (9) сильно зависит от выбора базиса. Эта сходимость необходима и достаточна для сходимости второго ряда в

(6) с элементами $\lambda_n|C_\tau|$. При стремлении всех ε_n к нулю стремится к нему и P, оценка (9) стягивается к точному значению, а равенство $\theta_n = 0$ означает применимость оператора L почленно к любому из рядов (1).

Список литературы

[1] *Кириленко А.А., Сенкевич С.Л* // РиЭ. 1979. Т. 24. № 7. С. 1301–1307.

[2] *Никольский В.В.* Вариационные методы для внутренних краевых задач электродинамики. М.: Наука, 1967.

[3] *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

[4] *Куликов Э.Л.* Докт. дис. Ростов-на-Дону, 1972. 362 с.

[5] *Никольский В.В.* // РиЭ. 1975. Т. 20. № 10. С. 2046–2055.

[6] *Фихманас Р.Ф., Фридберг П.Ш.* // РиЭ. 1977. Т. 22. № 11. С. 2411–2414.

[7] *Давидович М.В.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 1. С. 174–178.

[8] *Никольский В.В., Никольская Т.И.* // Автоматизированное проектирование устройств СВЧ / Под ред. В.В. Никольского. М.: МИРЭА, 1988. С. 4–17.

[9] *Никольский В.В., Никольская Т.И.* Там же. С. 4–24.

[10] *Левин Л.* Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981.