01,09

К ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДВУМЕРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ

Г.И.Назаров

Киевский институт инженеров гражданской авиации,
Киев, Украина
(Поступило в Редакцию 31 января 1994 г.
В окончательной редакции 12 августа 1994 г.)

Для одномерной безударной нестационарной волны предложено новое аналитическое решение типа Даламбера, содержащее поправочные коэффициенты неоднородности среды для выделенного класса проницаемостей. Приведен пример решения краевой задачи Коши.

Основные уравнения

Напряженности электрического E и магнитного H полей одномерной нестационарной безударной волны с переменными диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями при отсутствии тока проводимости ($\sigma = 0$) удовлетворяют однородной системе уравнений Максвелла в частных производных гиперболического типа ($\varepsilon\mu > 0$) с переменными коэффициентами от координаты z и времени t [1,2]

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial(\mu H)}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial t},$$

$$\mu = \mu(z,t), \quad \varepsilon = \varepsilon(z,t). \tag{1}$$

Известны модулированные электромагнитные волны, медленно уклоняющиеся от синусоидальных волн во времени [2,3] и пространстве [1]. Построено [4] общее аналитическое решение уравнений (1) в виде дифференциальных рядов для ε и μ, заданных в виде функций от координаты z.

Гипотетические решения соответствуют случаю, при котором произведение $\varepsilon \cdot \mu = \mathrm{const}$.

Для временно́й же неоднородности $\varepsilon(t)$, $\mu(t)$ формулы (1.1), (1.8) в [4] не могут иметь места.

Нелинейные уравнения (1) при наличии дифференциальной неоднородности среды методом обращения [5,6] и методом годографа [7,8] для двумерных стационарных волн с эффектом Холла и без него приведены к линейным уравнениям и выделены аналитические решения для случаев, когда одна из проницаемостей постоянна [5,6] или обе проницаемости заданы в виде функции от E, H [9,10] или от z, t, E, H [11]. Отметим ударные электромагнитные волны [12], численные методы [13] с моделированием [3] и редукцией [14].

Общее решение

Выделим электромагнитные среды с координатно-временно́й проницаемостью. В дальнейшем полагаем

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_1(\zeta)\varepsilon_2(\tau), \quad \mu = \mu_0\mu_1(\zeta)\mu_2(\tau),$$

$$\zeta = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{t+T}{T}, \quad \zeta \in (0;1), \quad \tau \in (1;2). \tag{2}$$

Уравнения (1) примут вид

$$\frac{\partial E}{\partial \zeta} = -A\mu_1 \frac{\partial(\mu_2 H)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = -B\varepsilon_1 \frac{\partial(\varepsilon_2 E)}{\partial \tau}. \tag{3}$$

Исключая H или E, получим эквивалентные этой системе уравнения, которые в дальнейшем будут основными,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial E}{\partial \zeta}\right) = a^2\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mu_2 \frac{\partial(\varepsilon_2 E)}{\partial \tau}\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right) = a^2\mu_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\varepsilon_2 \frac{\partial(\mu_2 H)}{\partial \tau}\right). \tag{5}$$

Здесь $A = (L\mu_0/T)$; $B(L\varepsilon_0)/T$; $a^2 = AB$; L, T — характерные линейный размер и время; ε_0, μ_0 — произвольные числа соответствующей размерности. Решение уравнения (4) ищем в обобщенной форме Даламбера

$$E = E_0 + \alpha(\zeta)\beta(\tau)[F(\xi) + f(\eta)], \quad E_0 = \text{const}. \tag{6}$$

Здесь α, β — поправочные коэффициенты на неоднородность; F, f — произвольные волновые функции от характеристических переменных ξ, η

$$\xi = u - v, \quad \eta = u + v, \quad u = \int \rho_1 d\zeta, \quad v = \int \rho_2 d\tau \tag{7}$$

$$\rho_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{a\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}}. \tag{8}$$

Внося (6)–(8) в (4), придем к равенству

$$\left[\beta\frac{d}{\zeta}\left(\frac{1}{\mu_1}\frac{d\alpha}{d\zeta}\right)-a^2\varepsilon_1\alpha\frac{d}{d\tau}\left(\mu_2\frac{d}{d\tau}(\varepsilon_2\beta)\right)\right](F+f)+$$

$$+a^2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_2\rho_2(F'-f')\frac{d}{d\tau}\left(\mu_2\varepsilon_2\rho_2\beta^2\right)+\frac{\alpha\beta\rho_1}{\mu_1}(F'+f')\frac{d}{\zeta}\left(\frac{\rho_1\alpha^2}{\mu_1}\right)=0. \quad (9)$$

Это уравнение удовлетворится тождественно с неопределенными F и f при координатно-временны́х проницаемостях, если α и β будут удовлетворять условиям

$$\alpha=A_1\int\mu_1 d\zeta=A_2\left(\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\right)^{1/4}, \quad (10)$$

$$\beta=\frac{A_3}{\varepsilon_2}\int\frac{d\tau}{\mu_2}=A_4\mu_2^{-1/4}\varepsilon_2^{-3/4}, \quad (11)$$

где A_i $(i=1,2,3,4)$ — постоянные интегрирования.

Из (9) следует, что при чисто координатных проницаемостях ($\varepsilon_2=\mu_2=\beta=1$, $v=\tau/a$) оно удовлетворится при одной связи (10), а при чисто временно́й неоднородности среды ($\varepsilon_1=\mu_1=\rho_1=d=1$, $u=\zeta$) сохранится только связь (11). Для однородной же среды ($\varepsilon=\varepsilon_0$, $\mu=\mu_0$, $\alpha=\beta=1$) равенства (10), (11) выпадут и функция (6) совпадет с известным решением Даламбера.

Постоянными интегрирования в (10), (11) всегда можно распорядиться так, чтобы равенства (10), (11) были равнозначными. Это, например, будет иметь место при степенной закономерности

$$\mu_1=\zeta^p,\quad \varepsilon_1=\zeta^q\quad \mu_2=\tau^s,\quad \varepsilon_2=\tau^\nu,$$
$$q=-(3p+4),\quad \nu=4-3s, \quad (12)$$

где p, s — здесь и всюду в дальнейшем рациональные числа.

В этом случае

$$\alpha=\zeta^{p+1},\quad \beta=\tau^{2s-3},\quad u=-\frac{\zeta^{-(p+1)}}{p+1},\quad v=\frac{\tau^{s-1}}{a(s-1)}\quad (p\neq-1,\ s\neq1). \quad (13)$$

Условия (10), (11) удовлетворяются и при экспоненциальных проницаемостях

$$\mu_1=e^{p\zeta},\quad \varepsilon_1=e^{q\zeta},\quad \mu_2=e^{s\tau},\quad \varepsilon_2=e^{\nu\tau}\quad (q=-3p,\ \nu=-3s), \quad (14)$$

$$\alpha=e^{p\zeta},\quad \beta=e^{2s\tau},\quad u=-\frac{1}{p}e^{-p\zeta},\quad v=\frac{1}{as}e^{s\tau}. \quad (15)$$

Равенство (10) может быть удовлетворено при

$$\mu_1=\cos\zeta\sin^p\zeta,\quad \varepsilon_1=\cos\zeta\sin^q\zeta,\quad q=-(3p+4)\quad (p\neq-1),$$

$$\alpha = \sin^{p+1}\zeta, \quad u = \frac{1}{m}\sin^m\zeta, \quad m = \frac{p+q}{2} + 1 \quad (m \neq 0), \tag{16}$$

а также при

$$\mu_1 = \frac{\sin 2\zeta}{\cos^p\zeta}, \quad \varepsilon_1 = \cos^q\zeta \sin 2\zeta, \quad q = 3p - 8 \quad (p \neq 2),$$

$$\alpha = \cos^{2-p}\zeta \quad u = \frac{2}{n\cos^n\zeta}, \quad n = \frac{q-p}{2} - 2 \neq 0 \quad (p \neq 6). \tag{17}$$

Имеются и другие возможности. Проницаемости (12)–(17) в литературе не рассмотрены.

Функции (12), (14), (16), (17) можно комбинировать между собою: например, μ_1, ε_1 взять в виде степенных (12) или тригонометрических (16), (17) значений, а μ_2, ε_2 — в виде экспоненциальных (14) и получим смешанные экспоненциально-степенные, тригонометрически-степенные неоднородности среды и т. д. и соответствующие им решения (6).

Магнитная напряженность

В дальнейшем рассмотрим подробно степенную комбинацию (12)

$$E = E_0 + \zeta^{p+1}\tau^{2s-3}(F+f), \quad u = -\frac{\zeta^{-(p+1)}}{p+1}, \quad v = \frac{\tau^{s-1}}{a(s-1)},$$

$$E_0 = \text{const} \quad p \neq -1, \quad s \neq 1. \tag{18}$$

Вносим (18) в систему уравнений (3) и обычным путем разрешаем ее относительно магнитной напряженности H. Придем к формуле

$$\tau^s H = B(p+1)(1-s)\int u[F + f + v(F' - f')]du. \tag{19}$$

Задав произвольно F, f в (18), (19), получим обратную краевую задачу, которая может оказаться интересной для практики. При решении прямых краевых задач используется метод характеристик Даламбера или метод рядов Фурье. По аналогии с [15] возьмем F, f в виде

$$F + f = \frac{1}{2}\sum a_k(\sin k\omega\xi + \sin k\omega\eta) + b_k(\cos k\omega\xi - \cos k\omega\eta)$$

или с учетом (7)

$$F + f = \sum(a_k \cos k\omega v + b_k \sin k\omega v)\sin k\omega u. \tag{20}$$

В этом случае формулы (19), (20) приведут к равенству

$$\tau^s H = B(p+1)(1-s)\sum \phi_k(v) I_k(u), \tag{21}$$

где

$$\phi_k = a_k(\cos k\omega v + k\omega v \sin k\omega v) + b_k(\sin k\omega v - k\omega v \cos k\omega v),$$

$$I_k = \int u \sin k\omega u du = \frac{1}{(k\omega)^2}(\sin k\omega u - k\omega u \cos k\omega u). \tag{22}$$

Здесь суммирование по k ведется от $k = 1$ до $k = \infty$. Вещественные постоянные ω, a_k, b_k определяются из краевых условий.

Аналогичным путем для чисто экспоненциальной неоднородности (14), (19), (20) получим

$$e^{s\tau} H = -Bps \sum \phi_k(u) I_k(v). \tag{23}$$

При этом ϕ_k, I_k здесь те же функции (22), в которых, однако, роль u, v выполняют равенства (15).

Подстановкой (18), (19), (21), (23) убеждаемся, что E, H удовлетворяют уравнениям (3)–(5).

Задача Коши

В качестве примера рассмотрим задачу Коши для функции E (18) с условиями

$$E(\zeta, 1) = \varphi_1(\zeta), \quad \left.\frac{\partial E}{\partial \tau}\right|_{\tau=1} = \varphi_2(\zeta), \tag{24}$$

$$E(o, \tau) = E_0, \quad E(1, \tau) = E_0, \quad \tau \in (1; 2), \quad E_0 = \text{const}, \tag{25}$$

где φ_1, φ_2 — заданные непрерывные функции.

Функция E (18) с учетом (13), (20) при $\omega = (p+1)\pi$ удовлетворяет граничным условиям (25). Разложив функции $\varphi_1(\zeta)$ и $\varphi_2(\zeta)$ в ряды Фурье по $\sin k\omega u$ на интервале $u \in (0, c)$, $c = -1/(p+1)$ и обозначив коэффициенты Фурье через D_1 и D_2, придем к равенствам, при которых удовлетворяются и начальные условия (24),

$$a_k \cos kb + b_k \sin kb = D_1, \quad Aa_k + Bb_k = D_2.$$

Отсюда

$$a_k = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad b_k = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{k\omega}{a} \cos 2kb \neq 0,$$

$$\Delta_1 = BD_1 - D_2 \sin kb, \quad \Delta_2 = D_2 \cos kb - AD_1 \tag{26}$$

и введены обозначения

$$b = \frac{\omega}{a(s-1)}, \quad \omega = (p+1)\pi,$$

$$A = (2s-3)\cos kb - \frac{k\omega}{a}\sin kb,$$

$$B = (2s-3)\sin kb + \frac{k\omega}{a}\cos kb,$$

$$D_i = 2(p+1)^2 \int_0^c u\varphi_i(u) \sin k\omega u du \quad (i = 1, 2).$$

Здесь учтено, что $\zeta^{-(p+1)} = -(p+1)u$.

Список литературы

[1] *Стрэттон Дж.-А.* Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. 539 с.
[2] *Morgenthaler F.-R.* // IRE. Trans. MTT. 1958. Vol. 6. 167 p.
[3] *Рытов С.М.* // Тр. Физ. ин-та АН СССР. 1940. Т. 2. Вып. 1. С. 41–132.
[4] *Пучкова Н.Г.* // ЖТФ. 1971. Т. 41. Вып. 5. С. 857–864.
[5] *Колесников П.М.* // ЖТФ. 1968. Т. 38. Вып. 2. С. 387–391.
[6] *Колесников П.М.* Введение в нелинейную электродинамику. Минск: Наука и жизнь, 1971. 382 с.
[7] *Емец Ю.П.* // ПММ. 1967. Т. 31. № 6. С. 1077–1080.
[8] *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. Киев: Наукова думка, 1987. 254 с.
[9] *Пучкова Н.Г.* ЖТФ. 1969. Т. 39. Вып. 8. С. 1372–1376.
[10] *Пучкова Н.Г., Кулиш А.Ф.* // ЖТФ. 1974. Т. 44. С. 2600–2602.
[11] *Пучкова Н.Г.* // ЖТФ. 1978. Т. 48. С. 640–642.
[12] *Катаев И.Г.* Ударные электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1963. 152 с.
[13] Численные методы электродинамики / Под ред. В.И.Дмитриева, А.С.Ильинского. М., 1983. 144 с.
[14] *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М., 1987. 167 с.
[15] *Назаров Г.И.* // ПММ. 1993. Т. 57. № 5. С. 79–86.