01;03;04

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ЛАБОРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

А.А.Александрова

Харьковский военный университет,
310043, Харьков, Украина
(Поступило в Редакцию 6 октября 1994 г.)

Нестационарная магнитогидродинамическая задача сформулирована в дифференциальной постановке в пространстве обобщенных функций, что позволило включить в уравнения условия для полевых функций на границе их раздела. Затем краевая задача с помощью фундаментального решения переформулирована в интегродифференциальное уравнение, более естественным образом включающее в себя начальные и граничные условия и обладающее значительно большей физической наглядностью, что позволило существенно упростить построение алгоритма решения задач. Полученное уравнение представляет собой свертку в пространстве обобщенных функций, благодаря свойствам которой записано интегральное уравнение линейной магнитной гидродинамики в самосогласованной постановке. Что позволяет в единой логической форме найти возмущение поверхности неоднородности под действием падающего поля. Отработанный алгоритм продемонстрирован на конкретной краевой задаче для плоской границы раздела.

Проблемы магнитной гидродинамики и исследования движения ионизированных сред с учетом их взаимодействия с электромагнитным полем в настоящее время приобретают первостепенное познавательное и техническое значение. Причем во многих приложениях граница S или некоторая часть ее области непрерывного движения сплошной среды заранее неизвестна и должна быть определена. В данной работе рассматривается интегральный подход к решению краевых задач линейной магнитной гидродинамики в лабораторной системе координат, в которой поверхность разрыва движется под действием падающего поля, т. е. задача ставится в самосогласованной постановке.

Процессы, изучаемые магнитной гидродинамикой идеальной среды, описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. В тех случаях, когда допущение о малости искомых функций является приемлемым, в постановке задачи можно произвести линеаризацию, которая сводится к следующим существенным упрощениям. Во-первых, для искомых функций все уравнения и дополнительные условия записываются в виде линейных. Во-вторых, предполагается, что деформация границы мала и порядка искомых функций, поэтому граничные условия на деформированной поверхности S, ограничивающей область V, сносятся по нормали к границе S_0 области V_0, соответствующей основному невозмущенному состоянию. Таким образом, искомые функции определяются как решения системы линейных дифференциальных уравнений в известной области V_0 с линейными граничными условиями на известной поверхности S_0. По найденным функциям для возмущенного движения в результате решения краевой задачи в первом приближении можно определить малые деформации границы S.

Все неприятности на границе в случае разрывных решений отпадают, если основные уравнения магнитной гидродинамики сформулировать в интегральной форме, в которой непрерывность искомых функций по существу не подразумевается. Если интегральная формулировка физических законов полностью эквивалентна дифференциальной для непрерывных процессов, то для разрывных интегральные уравнения обладают большей общностью. Построение кусочно-гладких решений для системы дифференциальных уравнений путем обобщения их с помощью соответствующих интегральных соотношений приводит к теории обобщенных функций, при этом удовлетворение граничным и начальным условиям происходит, вообще говоря, автоматически из постановки задачи.

Пусть неоднородность занимает область $V(t)$, среда внутри которой описывается невозмущенным магнитным полем $\mathbf{B}_2$, альфвеновской V_{A2} и звуковой V_{S2} скоростями и плотностью ρ_2. Окружающая фоновая среда задается параметрами $\mathbf{B}_1$, V_{A2}, V_{S1}, ρ_1.

Как известно, дифференциальные линеаризованные уравнения идеальной магнитной гидродинамики относительно отклонений скорости $\mathbf{u}$ и магнитного поля $\mathbf{b}$ в произвольной среде с параметрами, описывающимися непрерывными функциями, имеют вид [1]

$$V_{Si}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\mathbf{B}_i}{4\pi \rho_i}\right] = 0,$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{u}, \mathbf{B}_i] - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0. \qquad (1)$$

Если в среде имеются поверхности разрыва полевых функций, то на них должны выполняться граничные условия непрерывности массы, импульса, потока энергии, тангенциальной составляющей электрического поля и нормальной составляющей магнитного поля [1]

$$\{\rho u_n\} = 0, \qquad \{\pi_{in}\} = 0, \qquad \{W_n\} = 0, \qquad \{\mathbf{E}_\tau\} = 0, \qquad \{B_n\} = 0 \quad (2)$$

в системе отсчета, где разрыв покоится. Здесь $\{a\}$ — скачок величины a, индексом n обозначена нормальная к поверхности разрыва компонента, τ — их тангенциальная компонента. В лабораторной системе координат, в которой поверхность разрыва движется со скоростью u_s вдоль нормали к поверхности разрыва, нужно всюду в граничных условиях (2) заменить нормальную компоненту скорости u_n на $u_n - u_S$.

В общем случае мы рассматриваем нестационарную задачу, для которой важное значение приобретает начальный момент нестационарности. В случае, если считать, что нестационарность начинается в конечный момент времени, мы так же, как и в электродинамике [2], придем к эволюционной цепочке интегральных уравнений. Однако для начала в данной работе применим приближение адиабатического "включения" на бесконечности, что исключает учет эволюционального характера явления. При этом производная по времени в уравнениях (1) будет являться производной в обобщенном смысле слова [3], так как

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) + \delta(t)\langle \mathbf{u}(0)\rangle, \tag{3}$$

где $(\partial \mathbf{u}/\partial t)$ — обычная производная, $\langle \mathbf{u}(0)\rangle = \mathbf{u}(+0) - \mathbf{u}(-0) = 0$.

Основным моментом при выводе интегральных уравнений, согласно [4], является введение разрывных функций, описывающих единым образом среду внутри и вне неоднородности. Так как на границе $S(t)$ области $V(t)$ параметры среды терпят разрыв, то введение разрывных функций удобно производить с помощью характеристической функции $\chi(t, \mathbf{r})$, равной единице внутри области $V(t)$ и нулю вне ее. С помощью этой функции уравнения (1) можно продолжить на все рассматриваемое пространство

$$V_{S1}^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \left[\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1}\right] = \mathbf{F},$$

$$\operatorname{rot}[\mathbf{u}, \mathbf{B}_1] - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{Q}, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{F} = \chi\left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \chi\left[\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \frac{\mathbf{B}_1}{4\pi\rho_1} - \frac{\mathbf{B}_2}{4\pi\rho_2}\right],$$

$$\mathbf{Q} = \chi[\mathbf{u}, \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2].$$

При этом необходимо учесть, что $\mathbf{Q}$ терпит разрыв на границе $S(t)$ посредством замены классических производных на обобщенные [3] по правилам

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q} = (\operatorname{rot}\mathbf{Q}) + [\mathbf{n}, \{\mathbf{Q}\}_S]\,\delta S(t). \tag{5}$$

Здесь круглые скобки обозначают классическую производную (там, где она существует), $\delta S(t)$ — поверхностная δ-функция.

После введения разрывных функций и замены производных уравнения (4) объединяются в одно

$$\left(V_{A1}^2 + V_{S1}^2\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - V_{A1}^2\mathbf{s}_1(\mathbf{s}_1, \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) -$$

$$-V_{A1}^2\left[\mathbf{s}_1, (\mathbf{s}_1, \nabla)\operatorname{rot}\mathbf{u}\right] = \mathbf{W}, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{W} = \chi \left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right) \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \chi \left[\frac{V_{A1}^2 \mathbf{s}_1}{B_1} - \frac{V_{A2}^2 \mathbf{s}_2}{B_2}, \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\right] +$$

$$+ \frac{V_{H1}^2}{B_1}\left[\mathbf{s}_1 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\mathbf{s}_1 - \frac{B_2}{B_1}\mathbf{s}_2, \mathbf{u}\right]\right] - \frac{V_{A1}^2}{B_1}\left[\mathbf{s}_1, \operatorname{rot}[\mathbf{n}, \{[\mathbf{n}, \mathbf{B}_2]\}_s \delta S(t)]\right]. \qquad (7)$$

Множитель при $\delta S(t)$ в (6) можно преобразовать, используя непрерывность тангенциальной составляющей электрического поля

$$\frac{V_{A1}^2}{B_1}\left[\mathbf{s}_1, \operatorname{rot}\left\{(u_S - u_n^{ex})(\mathbf{B}_{\tau 1} - \mathbf{B}_{\tau 2}) + \mathbf{u}_\tau^{ex}(B_{n1} - B_{n2})\right\}\right]. \qquad (8)$$

Уравнение (6) описывает поле во всем рассматриваемом пространстве, так как в нем уже учтены граничные условия на поверхности разрыва полевых функций посредством введения обобщенных производных. Кроме того, в уравнении появилось поверхностное слагаемое.

Правая часть уравнения (6) финитна по пространственным переменным. Положим, что все полевые функции обращаются в нуль при $t < -t_1$, $t > t_2$, где $t_{1,2}$ — сколь угодно большие числа. Тогда правая часть $\mathbf{W}$ будет финитна и по временно́й переменной. Следовательно, общее решение этого уравнения можно записать в виде свертки [2]

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \hat{G} * \mathbf{W}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{u}_0$ — общее решение соответствующего однородного уравнения; $\hat{G}$ — функция Грина, являющаяся фундаментальным решением уравнения (6).

Величина $\mathbf{u}_0$ имеет смысл поля в среде в отсутствие неоднородности $V(t)$, т. е. в терминах дифракции это есть падающее поле. Все характеристики объекта дифракции содержатся в $\mathbf{W}$.

Так как свертка является интегральной операцией, то уравнение (9) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно $\mathbf{u}$. Входящую в (9) магнитную индукцию $\mathbf{b}$ всегда можно выразить через $\mathbf{u}$ с помощью второго уравнения в (1).

Следует отметить, что уравнение (9) определено во всем пространстве определения поля $\mathbf{u}$. Однако интегрирование ограничено областью $V(t)$, определяемой функцией $\chi(t, \mathbf{r})$. Следовательно, соотношение (9) представляет собой собственно уравнение только в точках области $V(t)$. Вне этой области (9) представляет собой квадратурную формулу, позволяющую вычислить внешнее поле по предварительно найденному внутреннему. Таким образом, согласно основной идее работ [4], задача дифракции разбивается на два этапа: нахождение внутреннего поля путем решения уравнения (9) и вычисление внешнего поля по найденному внутреннему с помощью того же соотношения (9).

Фундаментальное решение уравнения (6), функции Грина $\hat{G}$, удовлетворяющая уравнению

$$\left(V_{A1}^2 + V_{S1}^2\right) \operatorname{grad}\operatorname{div}\hat{G} - \frac{\partial^2 \hat{G}}{\partial t^2} - V_{A1}^2 \mathbf{s}_1 \left(\mathbf{s}_1, \operatorname{grad}\operatorname{div}\hat{G}\right) -$$

$$- V_{A1}^2 \left[\mathbf{s}_1(\mathbf{s}_1, \nabla)\operatorname{rot}\hat{G}\right] = \hat{\varepsilon}\delta(t - t')\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \qquad (10)$$

найдена в [5] и в виде обратных преобразований Фурье–Лапласа имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \hat{G}I(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t'), \qquad \hat{G} = ||G_{ij}||_{i,j=1,\bar{3}}, \tag{11}$$

где

$$G_{11} = \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \left(V_{A1}^2 + V_{S1}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + V_{A1}^2 V_{S1}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$G_{12} = G_{21} = -V_{S1}^2\left(V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$G_{23} = G_{32} = -V_{S1}^2\left(V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$G_{13} = G_{31} = \left[V_{S1}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$G_{22} = \left(V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[V_{A1}^2\Delta - \frac{\partial^2}{\partial^2} + V_{S1}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)\right],$$

$$G_{33} = \frac{\partial^4}{\partial t^4} - \left[\left(V_{A1}^2 + V_{S1}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) + V_{S1}^2 V_{A1}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$I(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\limits_{-\infty+iG_0}^{\infty+iG_0} e^{-iq(t-t')}\,dq\times$$

$$\times\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d\mathbf{p}}{[q^2 - V_{A1}^2(\mathbf{p},\mathbf{s}_1)^2]\,[q^4 - (V_{A1}^2 + V_{S1}^2)\,q^2p^2 + V_{A1}^2V_{S1}^2(\mathbf{p},\mathbf{s}_1)^2p^2]}.$$

Оператор $\hat{G}$ записан в базисе $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_2 = \mathbf{s}_1 = \mathbf{B}_1/B_1$.

Построение фундаментального решения позволяет записать интегродифференциальное уравнение (9) в замкнутом виде. Записывая явно свертку в виде интеграла и используя основное свойство свертки, позволяющее перенести дифференцирование со вторых множителей на функцию Грина, получим уравнение

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r},t) + \left(V_{S1}^2 - V_{S2}^2\right)\hat{G}\,\mathrm{grad\,div}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{u}(\mathbf{r},t')I(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')d\mathbf{r}' +$$

$$+\frac{\hat{G}}{B_1}\left[V_{A1}^2\mathbf{s}_1 - \frac{B_1}{B_2}V_{A2}^2\mathbf{s}_2,\ \mathrm{rot}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{b}(\mathbf{r}',t')I(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')d\mathbf{r}'\right] -$$

$$-V_{A1}^2\hat{G}\left[\mathbf{s}_1,\ \mathrm{rot\,rot}\left[\mathbf{s}_1 - \frac{B_2}{B_1}\mathbf{s}_1,\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int\limits_{V(t')}\mathbf{u}(\mathbf{r}',t')I(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')d\mathbf{r}'\right]\right] -$$

$$-\frac{V_{A1}^2}{B_1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{G}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')[\mathbf{s}_1,\mathrm{rot}\,\{(u_s - u_n^{ex})(\mathbf{B}_{\tau1} - \mathbf{B}_{\tau2}) +$$

$$+\,\mathbf{u}_\tau^{ex}(B_{n1} - B_{n2})\}]\delta S(t)d\mathbf{r}'. \tag{12}$$

Уравнение (12) будем называть нестационарным интегральным уравнением линейной магнитной гидродинамики в лабораторной системе координат, с помощью которого и решаются краевые задачи магнитной гидродинамики в самосогласованной постановке. Это понимается в том смысле, что в задачах о дифракции или обтекании МГД неоднородности происходит возмущение, которое задается скоростью поверхности u_S, поверхности S_0 ограничивающей МГД неоднородность.

Интегральная формулировка задачи позволяет найти это возмущение по следующему алгоритму. На первом этапе согласно принципу погашения в магнитной гидродинамике падающая волна $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ гасится в любой точке внутри неоднородности в результате интерференции создаваемого ею поля с полем диполей; при этом появляется новая волна (одна или более) с иной скоростью распространения (а в общем случае и с иным направлением распространения). Это дает возможность найти полностью внутреннее поле. В этом случае основное уравнение распадается на три группы, каждая из которых представляет волну, распространяющуюся со своей скоростью, что с математической точки зрения приводит к трем тождествам, одно из которых соответствует поверхностным слагаемым. Т. е. появившееся в (12) поверхностное слагаемое должно взаимно компенсироваться, что позволяет выразить скорость возмущения поверхности u_s через рассеянное поле на поверхности $\mathbf{u}^{ex}$. На втором этапе по найденному внутреннему полю находится рассеянное с помощью интегральных соотношений (12). И на третьем этапе выражаем скорость u_S через известное уже поле на внешней поверхности неоднородности.

Применим теперь разработанный алгоритм решения самосогласованной краевой задачи к случаю пакета плоских монохроматических МГД волн, входящих в однородную МГД среду с параметрами V_{A2}, V_{S2}, $\mathbf{B}_2 = \{B_{x2}, B_{y2}, B_{z2}\}$, которая заполняет полупространство $z > 0$. Покажем, что из теоремы погашения в магнитной гидродинамике в логически замкнутой форме вытекают не только законы отражения, преломления, находятся амплитуды всех расходящихся от границы волн, а также можно определить деформацию границы S, а именно найти нормальную составляющую скорости возмущения поверхности $z = 0$.

Падающую волну представим в виде пакета альфвеновской (A), ускоренной $(+)$ и замедленной $(-)$ магнитозвуковых волн

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_0^A \exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^+ \exp(-i\mathbf{k}_0^+\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^- \exp(-i\mathbf{k}_0^-\mathbf{r}) \tag{13}$$

(зависимость от времени как $\exp(i\omega t)$).

В качестве пробного решения для прошедшей волны выберем суперпозицию следующих волн:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}^A \exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r}) + \mathbf{u}^+ \exp(-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}) + \mathbf{u}^- \exp(-i\mathbf{k}^-\mathbf{r}). \tag{14}$$

В силу линейности исходных дифференциальных уравнений (1) U_S следует искать также в виде суперпозиции волн

$$u_S(\mathbf{r}) = \sum_j u_j \exp(-i\mathbf{k}_j\mathbf{r}). \tag{15}$$

После подстановки (14) в подынтегральные выражения (12) и интегрирования по объему V при условии, что $\mathbf{r} \in V$, получим тождество

$$\mathbf{u}^A \exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r}) + \mathbf{u}^+ \exp(-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}) + \mathbf{u}^- \exp(-i\mathbf{k}^-\mathbf{r}) =$$

$$= \mathbf{u}_0^A \exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^+ \exp(-i\mathbf{k}_0^+\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^- \exp(-i\mathbf{k}_0^-\mathbf{r}) + \hat{A}\exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r}) +$$

$$+ \hat{A}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r}) + \hat{B}^+ \exp(-i\mathbf{k}^+\mathbf{r}) + \hat{B}_0^+ \exp(-i\mathbf{k}_0^+\mathbf{r}) + \hat{B}^- \exp(-i\mathbf{k}^-\mathbf{r}) +$$

$$+ \hat{B}_0^- \exp(-i\mathbf{k}_0^-\mathbf{r}) - \frac{V_{A1}^2}{B_1} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)\Big\{ \Big[\mathbf{s}_1,\ \mathrm{rot} \sum_j u_j \exp(-i\mathbf{k}_j\mathbf{r}_S)(\mathbf{B}_{\tau 1} - \mathbf{B}_{\tau 2})\Big] +$$

$$+ \Big[\mathbf{s}_1,\ \mathrm{rot}\left((B_{n1} - B_{n2})\mathbf{u}_\tau^{ex}(\mathbf{r}_S) + u_n^{ex}(\mathbf{r}_S)(\mathbf{B}_{\tau 1} - \mathbf{B}_{\tau 2})\right)\Big]\Big\}, \qquad (16)$$

где $\hat{A}$, $\hat{A}_0$, $\hat{B}^\pm$, $\hat{B}_0^\pm$ — результат действия дифференциальных операторов в (12) на соответстующую экспоненту.

Тождество (16) для простоты изложения выписано при условии, что $k_{0x}^A \neq k_{0x}^+ \neq k_{0x}^-$, $k_{0y}^A \neq k_{0y}^+ \neq k_{0y}^-$, в противном случае возможна трансформация различных типов волн, что подробно было рассмотрено в [6].

Из (16) видно, что интегральные слагаемые в (12), описывающие интерференцию вторичных волн, представляют собой не только набор волн, имеющих различные зависимости от координат, а именно $\exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r})$, $\exp(-i\mathbf{k}_0^\pm\mathbf{r})$, $\exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r})$, $\exp(-i\mathbf{k}^\pm\mathbf{r})$, а также и некоторые поверхностные слагаемые, откуда тождество (16), согласно принципу погашения, распадается на следующие системы уравнений. Слагаемые, изменяющиеся по законам $\exp(-i\mathbf{k}^\pm\mathbf{r})$ и $\exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r})$ образуют соответственно равенства

$$\mathbf{u}^\pm \exp(-i\mathbf{k}^\pm\mathbf{r}) = \hat{B}^\pm \exp(-i\mathbf{k}^\pm\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{u}^A \exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r}) = \hat{A}\exp(-i\mathbf{k}^A\mathbf{r}),$$

которые взаимно сократятся, если учесть, что $\mathbf{k}^\pm$ удовлетворяют дисперсионному уравнению магнитозвуковых волн

$$\omega^4 - \left(V_{A2}^2 + V_{S2}^2\right)\omega^2 k^{(\pm)2} + V_{A2}^2 V_{S2}^2 k^{(\pm)2}(\mathbf{k}^\pm, \mathbf{s}_2)^2 = 0,$$

а $\mathbf{k}^A$ — альфвеновским волнам

$$\omega^2 - V_{A2}^2(\mathbf{k}^A, \mathbf{s}_2)^2 = 0.$$

Слагаемые, изменяющиеся по законам $\exp(-i\mathbf{k}_0^\pm\mathbf{r})$ и $\exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r})$ образуют следующие равенства:

$$\mathbf{u}_0^\pm \exp(-i\mathbf{k}_0^\pm\mathbf{r}) + \hat{B}_0^\pm \mathbf{u}^\pm \exp(-i\mathbf{k}_0^\pm\mathbf{r}) = 0,$$

$$\mathbf{u}_0^A \exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r}) + \hat{A}_0 \mathbf{u}^A \exp(-i\mathbf{k}_0^A\mathbf{r}) = 0. \qquad (17)$$

Откуда, решив систему линейных алгебраических уравнений, легко найти амплитуды внутреннего поля $\mathbf{u}^{\pm}$, $\mathbf{u}^{A}$.

Направления же распространения преломленных волн сразу получаются из условия симметрии задачи относительно осей $0X$ и $0Y$. Откуда закон преломления для альфвеновских волн имеет вид

$$V_{A2}\left(s_{2x}+s_{2y}\operatorname{tg}\varphi_2+\frac{\operatorname{ctg}\theta_2}{\cos\varphi_2}s_{2z}\right)=V_{A1}\left(s_{1x}+s_{1y}\operatorname{tg}\varphi_1+\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\cos\varphi_1}s_{1z}\right),$$

$$V_{A2}\left(s_{2x}\operatorname{ctg}\varphi_2+s_{2y}+\frac{\operatorname{ctg}\theta_2}{\sin\varphi_2}s_{2z}\right)=V_{A1}\left(s_{1x}\operatorname{ctg}\varphi_1+s_{1y}+\frac{\operatorname{ctg}\theta_1}{\sin\varphi_1}s_{1z}\right),$$

а для магнитозвуковых

$$Q_1^{\pm}\cos\varphi_1^{\pm}\sin\theta_1^{\pm}=Q_2^{\pm}\cos\varphi_2^{\pm}\sin\theta_2^{\pm},$$

$$Q_1^{\pm}\sin\varphi_1^{\pm}\sin\theta_1^{\pm}=Q_2^{\pm}\sin\varphi_2^{\pm}\sin\theta_2^{\pm},$$

где

$$Q_i^{(\pm)2}=\frac{V_{Ai}^2+V_{Si}^2}{V_{Ai}^2V_{Si}^2\left(\cos\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{ix}+\sin\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{iy}+\cos\theta_i^{\pm}s_{iz}\right)^2}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{\left(V_{Ai}^2+V_{Si}^2\right)^2-4V_{Ai}^2V_{Si}^2\left(\cos\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{ix}+\sin\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{iy}+\cos\theta_i^{\pm}s_{iz}\right)^2}}{V_{Ai}^2V_{Si}^2\left(\cos\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{ix}+\sin\varphi_i^{\pm}\sin\theta_i^{\pm}s_{iy}+\cos\theta_i^{\pm}s_{iz}\right)^2},$$

где φ_i^A, θ_i^A, $\varphi_i^{\pm}$, $\theta_i^{\pm}$ — сферические углы волновых векторов $\mathbf{k}^A$, $\mathbf{k}^{\pm}$; $i=1$ — падающая волна, $i=2$ — преломленная.

На втором этапе находим внешнее поле. Для этого подставим (14) с уже известными амплитудами и волновыми числами в исходное интегральное уравнение (12). После интегрирования, учитывая, что $\mathbf{r}\ni V$, мы окончательно получим компоненты отраженного поля

$$\mathbf{u}^{ex}(\mathbf{r})=\hat{G}\hat{C}\left[\frac{\mathbf{u}^A\exp(-i\tilde{\mathbf{k}}_0^A\mathbf{r})}{\Omega^A}+\frac{\mathbf{u}^+\exp(-i\tilde{\mathbf{k}}_0^+\mathbf{r})}{\Omega^+}+\frac{\mathbf{u}^-\exp(-i\tilde{\mathbf{k}}_0^-\mathbf{r})}{\Omega^-}\right],$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_0^A=\{k_{0x}^A,k_{0y}^A,-k_{0z}^A\},\qquad \tilde{\mathbf{k}}_0^{\pm}=\{k_{0x}^{\pm},k_{0y}^{\pm},-k_{0z}^{\pm}\},$$

где $\hat{G}$ и $\hat{C}$ — векторно-дифференциальные операции уравнения (12).

На третьем этапе, согласно тождеству (16), после взаимного погашения вторичных волн остается равенство

$$\mathbf{s}_1\times\operatorname{rot}\left\{\sum_j u_j\exp(-i\mathbf{k}_j\mathbf{r}_S)(\mathbf{B}_{\tau1}-\mathbf{B}_{\tau2})+(B_{n1}-B_{n2})\mathbf{u}_{\tau}^{ex}(\mathbf{r}_S)+\right.$$

$$\left.+u_n^{ex}(\mathbf{r}_S)(\mathbf{B}_{\tau1}-\mathbf{B}_{\tau2})\right\}=0,$$

откуда благодаря линейной независимости системы функций $A_j \exp(-i\mathbf{k}_j\mathbf{r})$ находим амплитуды суперпозиции волн (15), описывающих нормальную компоненту скорости поверхности

$$u_j = \frac{(B_{z1} - B_{z2})(u_{yj}^{ex}k_{jx} - u_{xj}^{ex}k_{jy}) + u_{zj}^{ex}[(B_{y1} - B_{y2})k_{jx} - (B_{x1} - B_{x2})k_{jy}]}{k_{jx}^S(B_{y1} - B_{y2}) - k_{jy}^S(B_{x1} - B_{x2})},$$

где $j = 1$ соответствует индекс A, $j = 2$ — $+$, $j = 3$ — $-$.

Автор пользуется случаем поблагодарить Н.А. Хижняка за полезные дискуссии.

Список литературы

[1] *Ахиезер А.И.* и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974. 720 с.
[2] *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков, 1991. 280 с.
[3] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
[4] *Хижняк Н.А.* Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев: Наукова думка, 1986. 279 с.
[5] *Александрова А.А., Хижняк Н.А.* Краевые задачи магнитной гидродинамики. Харьков, 1993. 230 с.
[6] *Aleksandrova A.A., Khiznyak N.A.* Transformation of MHD waves on the plasma layer. IEEE International Conference on Plasma Science. Santa Fe; New Mexico (USA), 1994.