01;03

НЕЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА[1]

В.Я.Рудяк

Новосибирская государственная академия строительства,
630008, Новосибирск, Россия
(Поступило в Редакцию 7 октября 1994 г.)

Построено нелокальное решение уравнения Больцмана. Показано, что уравнения переноса для точных первых пяти моментов функции распределения интегро-дифференциальные и применимы для описания сильно неравновесных явлений и флуктуационных процессов. Если флуктуационные процессы в системе слабые, а отклонения от локального равновесия не велики, то эти уравнения сводятся к обычным локальным уравнениям гидродинамики. Гидродинамические переменные при этом определяются как средние по гидродинамическому физически бесконечно малому объему от первых пяти моментов функции распределения.

Введение

Эволюция разреженного газа описывается кинетическим уравнением Больцмана для функции распределения молекул $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$

$$\frac{df}{dt} = J(f, f_1),$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}, \quad J(f, f_1) = \int f \mathbf{v}_1 \int f \sigma (f' f_1' - f f_1), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ — координаты и скорость молекулы, $f_1 = f(\mathbf{v}_1)$.

В случае когда характерный гидродинамический масштаб L течения много больше длины свободного пробега молекул l, уравнение (1) содержит малый параметр — число Кнудсена $\mathrm{Kn} = l/L$. Это позволяет искать решение уравнения Больцмана в виде ряда по числу Кнудсена. Такое решение было построено Гильбертом, Чепменом и Энскогом и обычно называется нормальным. Характерной особенностью этого решения является то, что его временна́я и пространственная зависимости определяются изменением во времени и пространстве гидродинамических переменных: плотности $n(\mathbf{r}, t)$, скорости $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и давления $p(\mathbf{r}, t)$ (или температуры T)

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f\Big(\mathbf{v}, n(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) p(\mathbf{r}, t)\Big). \tag{2}$$

---

[1] Данная работа докладывалась на XIX Международном симпозиуме по динамике разреженных газов (Оксфорд, 1994 г.).

Таким образом, если заданы начальные значения гидродинамических переменных, то последовательно можно определить функцию распределения в любом приближении по числу Кнудсена. Построенное так решение соответствует гидродинамическому уровню описания системы. Переменные $n, \mathbf{u}$ и p удовлетворяют уравнениям гидродинамики. В нулевом приближении по числу Кнудсена — уравнениям Эйлера, в первом — Навье–Стокса, во втором — Барнетта, и т.д.

Первые два приближения метода Чепмена–Энскога решения уравнения Больцмана (см., например, [1]) соответствуют феноменологической гидродинамике и тем самым кинетическая теория позволяет обосновать и уточнить последнюю. Конечно, феноменологически не удается построить удовлетворительные уравнения гидродинамики в нелинейном по градиентам приближении. Получающиеся в кинетической теории уравнения Барнетта и уравнения третьего приближения также не вполне удовлетворительны. Установленная в [2] коротковолновая неустойчивость решений этих уравнений указывает на их возможный систематический изъян. Чтобы ответить на вопрос, с чем этот изъян может быть связан, необходимо проанализировать вывод уравнений гидродинамики.

Обычно при использовании гидродинамического уровня описания предполагается, что изменение градиентов гидродинамических величин в данной точке приводит к мгновенному изменению потока в той же точке. В результате определяющие соотношения оказываются локальными и марковскими. В частности, в навье-стоксовском приближении имеем

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = -2\mu\langle\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\rangle, \quad \mathbf{q}(\mathbf{r},t) = -\lambda\nabla T(\mathbf{r},t), \tag{3}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — соответственно тензор напряжений и вектор потока тепла, μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, $\langle A_iB_j\rangle = (A_iB_j + A_jB_i - 2/3A_kB_kU_{ij})$, $\mathbf{U}$ — единичный тензор второго ранга.

Марковский хаарктер определяющих соотношений (3) является следствием предположения о бесконечной скорости распространения возмущений в среде. В действительности эта скорость конечна и изменение гидродинамических величин никогда не приводит к мгновенному изменению потока. Имеет место запаздывание. С другой стороны, само существование потоков вызывается взаимодействием физически бесконечно малых объемов жидкости. Поэтому поток в точке $\mathbf{r}$ в общем случае определяется поведением жидкости в некоторой окрестности этой точки, включая ее саму. Имеет место нелокальная зависимость градиентов и потоков. Таким образом, в общем случае определяющие соотношения являются нелокальными и запаздывающими

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = -2\int d\mathbf{r}_1 \int_{t_0}^{t} dt_1 M(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t,t_1)\langle\nabla_1\mathbf{u}(t_1)\rangle,$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t) = -\int d\mathbf{r}_1 \int_{t_0}^{t} dt_1 L(\mathbf{r},\mathbf{r}_1,t,t_1)\nabla_1 T(t_1). \tag{4}$$

Здесь M и L — релаксационные ядра переноса, $\nabla_1 = \partial/\partial\mathbf{r}_1$.

Нелокальные определяющие соотношения типа (4) хорошо известны и выводились ранее методами неравновесной статиститической механики (см., например, [3,4]). В [5] подобные соотношения были получены при решении линейного уравнения Больцмана проекционным методом Цванцига. Практически одновременно в [6] построены локальные, но запаздывающие определяющие соотношения. В этом случае для решения уравнения Больцмана использовался так называемый метод неравновесного статистического оператора [3], который также по сути является вариантом проекционного метода.

Нелокальные определяющие соотношения (4) приводят к новым уравнениям гидродинамики. Для состояний, близких к локальному равновесию, они переходят в обычные уравнения Эйлера или Навье–Стокса. Однако для сильно неравновесных состояний учет вкладов, обусловленных нелокальностью и запаздыванием, оказывается принципиальным. В связи с этим встает задача вывода обобщенных определяющих соотношений (4) из полного нелинейного уравнения Больцмана. Решение этой задачи и является целью настоящей работы.

1. Решение уравнения Больцмана

При феноменологическом построении гидродинамики основополагающей является концепция сплошной среды, когда газ рассматривается как сплошная среда. Все макроскопические величины определяются как средние по некоторому физически бесконечно малому объему $v = 4/3\pi r_h^3$, где r_h — гидродинамический физически бесконечно малый масштаб длины, причем

$$l \ll r_h \ll L. \tag{5}$$

Естественно требовать равномерности выполнения левого и правого неравенств (5) $l/r_h \sim r_h/L \sim \eta$, и тогда

$$\eta \sim \sqrt{l/L} = \sqrt{\mathrm{Kn}} \quad \text{и} \quad r_h = l/\eta. \tag{6}$$

Такое определение физически бесконечно малого масштаба для гидродинамических процессов обычно соответствует экспериментально реализуемой ситуации. Для сильно неравновесных процессов, когда $l \leqslant L$, гидродинамический физически бесконечно малый масштаб следует ввести соотношением

$$r_k \ll r_h \ll L, \tag{7}$$

где r_k — физически бесконечно малый масштаб для кинетических процессов, происходящих в газе.

Этот масштаб определяется соотношением $r_k \sim \sqrt{\varepsilon} l$ [7]; где $\varepsilon = n_0 r_0^3$ — вириальный параметр для газа, r_0 — эффективный радиус молекулы, n_v — числовая плотность газа. В этом случае

$$\eta \sim r_k/r_h \sim r_h/L, \quad \text{т.е.} \quad \eta \sim \varepsilon^{1/4}\sqrt{\mathrm{Kn}}. \tag{8}$$

В кинетической теории газов первые пять моментов функции распределения

$$\Gamma_{i0}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{v}\psi_i f(\mathbf{r}), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = \mathbf{v}, \quad \psi_3 = mc_0^2/3, \quad c_0 = \mathbf{v} - \mathbf{u}_0,$$
$$\Gamma_{10} = n_0, \quad \Gamma_{20} = n_0\mathbf{u}_0, \quad \Gamma_{30} = p_0 = n_0kT_0 \tag{9}$$

обычно отождествляются с гидродинамическими переменными. Однако, чтобы переменные (9) соответствовали феноменологическим, необходимо усреднить их по физически бесконечно малому объему v

$$\Gamma_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}'\Gamma_{i0}(\mathbf{r}+\mathbf{r}') = \frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}'\int d\mathbf{v} f(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\psi_i,$$
$$i = 1,2,3, \quad \Gamma_1 = n, \quad \Gamma_2 = n\mathbf{u}, \quad \Gamma_3 = p = nkT. \tag{10}$$

Таким образом, чтобы решение уравнения Больцмана, описывающее гидродинамический режим течения, соответствовало общепринятой феноменологии, оно должно оперировать с переменными (10). Нашей целью является построение решения уравнения Больцмана, соответствующего гидродинамическому уровню описания системы. Вообще говоря, возможны различные пути построения такого решения. Один из этих путей состоит в том, чтобы сначала построить решение, эволюция которого описывается изменением во времени и пространстве первых пяти моментов (9)

$$f(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = f\Big(\mathbf{v}, n_0(\mathbf{r},t), \mathbf{u}_0(\mathbf{r},t), p_0(\mathbf{r},t)\Big), \tag{11}$$

а затем уже, огрубляя в соответствии с (10) первые пять моментов, перейти к функции распределения (2), т.е. к собственно гидродинамическому решению. Поскольку потоки в общем случае являются нелокальными функционалами гидродинамических переменных и их градиентов, то, естественно, нелокальным функционалом этих величин должно быть и решение (11).

При построении гидродинамических решений уравнения Больцмана первые пять моментов обычно определяют по локально максвелловской функции распределения

$$f_0(\mathbf{v},\mathbf{r},t) = n_0(\mathbf{r},t)\left[\frac{m}{2\pi kT_0(\mathbf{r},t)}\right]^{3/2}\exp\left[-\frac{mc_0^2(\mathbf{r},t)}{2kT_0(\mathbf{r},t)}\right]. \tag{12}$$

Будем поэтому искать решение уравнения (1) в форме нелокального функционала от функции[2] (12)

$$f(\mathbf{r},t) = \frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}' f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t)\omega(\mathbf{r}',t), \tag{13}$$

где $\omega(\mathbf{r}',t)$ — некоторая неизвестная функция.

Такой способ нахождения функции распределения можно трактовать как метод проектирования на подпространство ее первых пяти моментов.

---

[2] Функция ω в (13) может быть выбрана и в точке $(r + r')$. Это не приводит к принципиальным изменениям.

Подставляя функцию (13) в уравнение (1) и учитывая что функции f и f_1 в интеграле столкновений записаны в одной точке, получаем для определения ω

$$\frac{\partial\omega(\mathbf{r}')}{\partial t} = -\frac{d\ln f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}')}{dt}\omega(\mathbf{r}') + f_0^{-1}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')J\Big[f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\omega(\mathbf{r}')f_{01}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\omega_1(\mathbf{r}')\Big]$$

Пусть далее $\omega = 1 + \Omega$. Тогда функция Ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{d\ln f_0}{dt} - \frac{d\ln f_0}{dt}\Omega + L\Omega + N(\Omega\Omega), \tag{14}$$

где линеаризованный L и нелинейный N операторы определяются соотношениями

$$L\Omega = \iint d\mathbf{v}d\sigma f_{01}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\Big[\Omega'(\mathbf{r}') + \Omega_1'(\mathbf{r}') - \Omega(\mathbf{r}') - \Omega_1(\mathbf{r}')\Big],$$

$$N(\Omega\Omega) = \iint d\mathbf{v}d\sigma f_{01}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')\Big[\Omega'(\mathbf{r}') + \Omega_1'(\mathbf{r}') - \Omega(\mathbf{r}')\Omega_1(\mathbf{r}')\Big].$$

Интегрируя уравнение (14), находим

$$\Omega(\mathbf{r}',t) = S(t,t_0)\Omega(\mathbf{r}',t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 S(t,t_1)\left[-\frac{d\ln f_0}{dt}(1+\Omega) + N(\Omega\Omega)\right]_{\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1}, \tag{15}$$

где оператор эволюции S удовлетворяет уравнению $\partial S(t,t_1)/\partial t = LS(t,t_1)$, $S(t,t) = 1$.

Будем решать уравнение (15) итерациями[3]

$$\Omega^{n+1}(t) = S(t,t_0)\Omega(t_0) +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 S(t,t_1)\Bigg[-\frac{d\ln f_0}{dt}(1+\Omega^{(n)}) + \sum_{i=1}^{n} N(\Omega^{(i)}\Omega^{(n-1)}\Bigg]_{\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1} \tag{16}$$

при $n \geqslant 0$ и $\Omega^{(0)} = 0$.

В частности, в первом приближении (первая итерация) имеем

$$\Omega^{(1)}(t) = S(t,t_0)\Omega(t_0) - \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 S(t,t_1)\frac{d\ln f_0}{dt_1}, \tag{17}$$

[3] Можно предложить несколько итерационных схем решения уравнения (15). Схема (16) выбрана так, чтобы в локальном пределе решение сводилось к решению Чепмена–Энскога [1].

где

$$\frac{d\ln f_0}{dt}=\left(\frac{1}{n_0}\frac{Dn_0}{Dt}+\nabla\cdot\mathbf{u}_0\right)+\frac{mc_0}{kT_0}\left(\frac{D\mathbf{u}_0}{Dt}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0\right)+\frac{1}{T_0}\left(C_0^2-\frac{3}{2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{DT_0}{Dt}+\frac{2kT_0}{3m}\nabla\cdot\mathbf{u}_0\right)+\frac{c_0}{T_0}\left(C_0^2-\frac{5}{2}\right)\nabla T_0+\frac{m}{kT_0}\left(\mathbf{C}_0\mathbf{C}_0-\frac{C_0^2}{3}\mathbf{U}\right):\nabla\mathbf{u}_0,$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla,\quad \mathbf{C}_0=\mathbf{c}_0\sqrt{m/2kT},\quad \rho_0=mn_0.$$

При решении уравнения Больцмана методом Чепмена–Энскога первые пять моментов функции распределения определяются по локально максвелловской функции (12). Кроме того, считается, что в нулевом приближении эти моменты удовлетворяют уравнениям Эйлера, в первом — уравнениям Навье–Стокса, и т.д. Поскольку мы хотим, чтобы наш метод в локальном пределе содержал метод Чепмена–Энскога, то также потребуем выполнения условий

$$n_0=\int d\mathbf{v}f(\mathbf{r}),\quad n_0(\mathbf{r})\mathbf{u}_0(\mathbf{r})=\int d\mathbf{v}f(\mathbf{r}),$$

$$p_0(\mathbf{r})=n_0(\mathbf{r})kT_0(\mathbf{r})=\frac{1}{3}\int d\mathbf{v}mc_0^2(\mathbf{r})f(\mathbf{r}),$$

причем при вычислении первой итерации эти параметры удовлетворяют уравнениям Эйлера. В этом случае, используя выкладки, приведенные в [6], легко убедиться, что функция $f(\mathbf{r},t)$, соответствующая первой итерации $\Omega^{(1)}$ (14) принимает вид

$$f(\mathbf{r},t)=\frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}'f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t)\left[1+S(t,t_0)\Omega(\mathbf{r}',t_0)-\int\limits_{t_0}^{t}dt_1S(t,t_1)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\mathbf{c}_0\left(C_0^2-\frac{5}{2}\right)\nabla\ln T_0+2\left(\mathbf{C}_0\mathbf{C}_0-\frac{1}{3}C_0^2\mathbf{U}\right):\nabla\mathbf{u}_0\right\}_{\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1}\right]. \tag{18}$$

2. Обобщенные уравнения гидродинамики

Уравнения переноса первых пяти моментов функции распределения получаются интегрированием по $\mathbf{v}$ уравнения Больцмана (1), умноженного на инварианты столкновения ψ_i, и имеют вид

$$\frac{\partial n_0}{\partial t}+\nabla\cdot(n_0\mathbf{u}_0)=0,\quad \frac{\partial\mathbf{n}_0}{\partial t}+\mathbf{u}_0\cdot\nabla\mathbf{u}_0+\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0=-\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot\mathbf{p}_0,$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial t}+\nabla\cdot(p_0\mathbf{u}_0)+\frac{2}{3}(p_0\mathbf{U}+\mathbf{p}_0):\nabla\mathbf{u}_0=-\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{q}_0, \tag{19}$$

где $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{q}_0$ — соответственно тензор напряжений и вектор потока тепла.

Вычисляя эти величины с помощью функции распределения (18), получаем нелокальные и запаздывающие определяющие соотношения

$$\mathbf{p}_0(\mathbf{r},t)=\mathbf{p}(\mathbf{r},t,t_0)-\frac{2}{v}\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\int\limits_{v}d\mathbf{r}'M_0(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)\langle\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1)\rangle,$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t)=\mathbf{q}(\mathbf{r},t,t_0)-\frac{1}{v}\int\limits_{t_0}^{t}dt_1\int\limits_{v}d\mathbf{r}'L_0(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)\boldsymbol{\nabla}T_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1),\qquad(20)$$

где M_0 и L_0 — релаксационные ядра переноса

$$M_0(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)=\frac{m^2}{10k}\int d\mathbf{v}\langle\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0\rangle_{\mathbf{r},t}:S(t,t_1)\left[\frac{f_0}{T_0}\mathbf{C}_0\mathbf{C}_0\right]_{\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1},$$

$$L_0(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)=\frac{m}{6}\int d\mathbf{v}(\mathbf{c}_0c_0^2)_{\mathbf{r},t}\cdot S(t,t_1)\left[\frac{f_0}{T_0}\mathbf{c}_0\left(C_0^2-\frac{5}{2}\right)\right]_{\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1}.\qquad(21)$$

При вычислении ядер (21) учтено, что для изотропной жидкости интегралы от тензоров, образованных векторами $\mathbf{c}_0$, равны изотропным единичным тензорам соответствующего ранга, умноженным на константу. Кроме того, в силу однородности времени релаксационные ядра переноса могут зависеть только от разности $(t-t_1)$.

В определяющие соотношения (20) входят также составляющие тензора напряжений и вектора потока тепла, зависящие от начальных данных

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t,t_0)=\frac{m}{v}\int\limits_{v}d\mathbf{r}'\int d\mathbf{v}\langle\mathbf{c}_0\mathbf{c}_0\rangle_{\mathbf{r},t}f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t)S(t,t_0)\Omega(\mathbf{r}',t_0),$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r},t,t_0)=\frac{m}{2v}\int\limits_{v}d\mathbf{r}'\int d\mathbf{v}(\mathbf{c}_0c_0^2)_{\mathbf{r},t}f_0(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t)S(t,t_0)\Omega(\mathbf{r}',t_0).\qquad(22)$$

Уравнения переноса (19)–(22) — это уравнения для точных первых пяти моментов функции распределения. Обобщенные определяющие соотношения (21) нелокальные и запаздывающие. По этой причине уравнения переноса (19)–(22) применимы для описания значительно более широкого круга явлений, нежели обычные уравнения Навье–Стокса. В частности, уравнения (19)–(22) применимы для описания сильно неравновесных явлений и флуктуационных процессов.

Моменты функции распределения Γ_{i0} (см. (9)) отличаются от гидродинамических переменных Γ_i (10) на величину флуктуации относительно гидродинамического физически бесконечно малого объема

$$n_0=n+\delta n,\quad \mathbf{u}_0=\mathbf{u}+\delta\mathbf{u},\quad p_0=p+\delta p.\qquad(23)$$

Чтобы получить уравнения для "грубых" гидродинамических переменных, необходимо в уравнениях переноса перейти к переменным Γ_i.

Пренебрегая флуктуациями $\delta\Gamma_i = \Gamma_{i0} - \Gamma_i$ и считая, что термодинамические силы слабо меняются на временах заметного изменения релаксационных ядер переноса, мы получим обычные уравнения Навье–Стокса для переменных $n, \mathbf{u}, p$ с определяющими соотношениями

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{r}, t, t_0) - 2\mu\langle\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\rangle,$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{r}, t, t_0) - \lambda\nabla T(\mathbf{r}, t)$$

и коэффициентами переноса

$$\mu = \frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}' \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 M_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{r}', t - t_1),$$

$$\lambda = \frac{1}{v}\int\limits_v d\mathbf{r}' \int\limits_{t_0}^{t} dt_1 L_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}+\mathbf{r}', t - t_1).$$

В газе характерный масштаб, на котором релаксационные ядра переноса (21) отличны от нуля, порядка $l \ll r_h$. Таким образом, флуктуации величин Γ_i и флуктуации релаксационных ядер переноса, вообще говоря, имеют разный масштаб. При определении флуктуаций тензора напряжений и вектора потока тепла удобно поэтому выделить два вклада $\delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 - \mathbf{p} = \delta\mathbf{p}_1 + \delta\mathbf{p}_2$, $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 = \delta\mathbf{q}_1 + \delta\mathbf{q}_2$, один из которых обусловлен флуктуацией термодинамических сил и может быть представлен в виде

$$\delta\mathbf{p}_1 = -2\mu\langle\nabla\delta\mathbf{u}\rangle, \quad \delta\mathbf{q}_1 = -\lambda\nabla\delta T, \tag{24}$$

а второй связан с флуктуациями релаксационных ядер переноса. Именно этот тип флуктуаций тензора напряжений и вектора потока тепла ответствен за дисперсию кинетических коэффициентов и корреляцию флуктуаций термодинамических сил и релаксационных ядер переноса.

Первый тип флуктуаций тензора напряжений и вектора потока тепла (24) имеет характерный масштаб $l_1 \geqslant r_h \gg l$. С другой стороны, характерный масштаб второго типа флуктуаций $l_2 \sim l \ll r_h$. Если характерный гидродинамический масштаб системы $L \gg l$, а это почти всегда так, за исключением сильно неравновесных течений типа ударной волны и свободно-молекулярных течений, то флуктуациями второго типа можно пренебречь и уравнения переноса (19) сводятся к следующим:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla\cdot(n_0, \mathbf{u}_0) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial t} + \mathbf{u}_0\cdot\nabla\mathbf{u}_0 + \frac{1}{\rho_0}\nabla\mathbf{p}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla\cdot(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}_1),$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + \nabla\cdot(p_0, \mathbf{u}_0) + \frac{2}{3}(p_0\mathbf{U} + \mathbf{p} + \delta\mathbf{p}_1) : \nabla\mathbf{u}_0 = -\frac{2}{3}\nabla\cdot(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}_1). \tag{25}$$

Таким образом, в уравнениях переноса появляются флуктуационные составляющие напряжений и они применимы, так же как и уравнения (19), для описания флуктуационных процессов. Подобные уравнения феноменологически впервые были введены в работе [8].

Следует подчеркнуть, что уравнения (25) дифференциальные и локальные в отличие от нелокальных интегродифференциальных уравнений переноса (19), (20). Они пригодны для описания флуктуационных, но слабо неравновесных процессов ($L \gg l$). Естественно, если всеми флуктуациями можно пренебречь, то уравнения (25) переходят в уравнения Навье–Стокса. Возможны однако ситуации, когда флуктуации гидродинамических переменных $\delta\Gamma_i \ll 1$ и ими можно пренебречь, однако флуктуации тензора напряжений $\delta\mathbf{p}_i$ и вектора потока тепла $\delta\mathbf{q}_1$ (24) достаточно велики и их следует учитывать. В этом случае такие флуктуации в уравнениях гидродинамики играют роль сторонних источниковых сил

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot(\mathbf{p} + \delta\mathbf{p}_1),$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(p\mathbf{u}) + \frac{2}{3}(p\mathrm{U} + \mathbf{p}) : \nabla\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\nabla\cdot(\mathbf{q} + \delta\mathbf{q}_1).$$

При изучении сильно неравновесных гидродинамических явлений в общем случае следует пользоваться уравнениями (19), (20). Если флуктуационные процессы в системе слабые и $\delta\Gamma_i \sim \delta\mathbf{p} \sim \delta\mathbf{q} \ll 1$, то уравнения (19), (20) переходят в нелокальные уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla\cdot(n\mathbf{u}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\frac{1}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{p}_n,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot(p\mathbf{u}) + \frac{2}{3}(p\mathrm{U} + \mathbf{p}) : \nabla\mathbf{u} = -\frac{2}{3}\nabla\cdot\mathbf{q}_n, \tag{26}$$

в которых тензор напряжений $\mathbf{p}_n$ и вектор потока тепла $\mathbf{q}_n$ нелокальные

$$\mathbf{p}_n(\mathbf{r},t) = \mathbf{p}_n(\mathbf{r},t,t_0) - \frac{2}{v}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{v} d\mathbf{r}' M(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)\langle\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1)\rangle,$$

$$\mathbf{q}_n(\mathbf{r},t) = \mathbf{q}_n(\mathbf{r},t,t_0) - \frac{1}{v}\int\limits_{t_0}^{t} dt_1 \int\limits_{v} d\mathbf{r}' L(\mathbf{r},\mathbf{r}+\mathbf{r}',t-t_1)\nabla T(\mathbf{r}+\mathbf{r}',t_1), \tag{27}$$

где ядра переноса M и L и составляющие напряжений, зависящие от начальных данных $\mathbf{p}_n(\mathbf{r},t,t_0)$, $\mathbf{q}_n(\mathbf{r},t,t_0)$, получаются соответственно из M, L и $\mathbf{p}(\mathbf{r},t,t_0)$, $\mathbf{q}(\mathbf{r},t,t_0)$ (3,4) пренебрежением флуктуациями $\delta\Gamma_i$.

Обобщенные уравнения гидродинамики (26) интегродифференциальные. Их можно свести к дифференциальным уравнениям, локализуя определяющие соотношения (27). Для этого градиенты гидродинамических величин в (27) следует разложить в ряд около точки $(\mathbf{r}, t)$. Полученные таким образом уравнения гидродинамики огрубленных переменных Γ_i содержат производные по времени и пространству порядка $n = 1, 2, \ldots$. Например, уравнение импульса имеет форму

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[m_k \frac{\partial_k}{\partial t_k} + n_k \nabla^k \right] \langle \nabla \mathbf{u} \rangle,$$

где m_k и n_k — локальные коэффициенты переноса.

Первые члены в правой части (26) ($k = 0$) определяют обычные потоки Навье–Стокса. Следующие члены дают поправки, обусловленные нелокальностью законов переноса. Члены, пропорциональные $\partial/\partial t$ и ∇ ($k = 1$), определяют в газе поправки порядка Kn^2. Таким образом, эти поправки оказываются порядка барнеттовских [1]. Легко убедиться [4], что $n_1 = 0$. Учет пространственной нелокальности в этом приближении не меняет законов переноса и приводит к появлению дополнительных членов лишь в уравнениях третьего порядка и выше.

С другой стороны, на барнеттовском уровне описания уравнения гидродинамики будут содержать члены

$$2\mu \tau_l \gamma_1 \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla \mathbf{u} \rangle \quad \text{и} \quad \lambda \tau_l \gamma_2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla T),$$

где γ_1 и γ_2 — некоторые постоянные.

Для максвелловских молекул $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, τ_l — время свободного пробега молекул газа.

Таким образом, учет пространственно-временно́й нелокальности приводит к появлению в уравнениях гидродинамики вкладов, которые принципиально не удается получить в рамках метода Чепмена–Энскога. В этом смысле этот метод не дает полного описания умеренно разреженного газа.

Заключение

При построении решения уравнения Больцмана мы стремились достичь соответствия с феноменологической гидродинамикой. Именно этим определялся функциональный вид решения (13). На наш взгляд, явный учет процедуры осреднения моментов функции распределения по физически бесконечно малому объему необходим, поскольку соответствует феноменологически определяемым гидродинамическим переменным. Конечно, решение можно было бы строить и несколько иначе. Например, в виде функционала

$$f(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nu(\mathbf{r}'), \tag{28}$$

где H — некоторая характеристическая функция.

Решению (13) соответствовала бы характеристическая функция с компактным носителем. В частности, если $H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ выбрать в виде δ-функции, то мы придем к методу Чепмена–Энскога. Поиск решения в виде (28) вполне удовлетворителен и с точки зрения установления связи с наблюдаемыми величинами, если под функцией H понимать некоторый аналог аппаратной функции или даже просто аппаратную функцию. Внешне функционал (28) выглядит, может быть, даже предпочтительнее функционала (13), во всяком случае он более удобен с математической точки зрения. В связи с этим следует подчеркнуть два обстоятельства. Во-первых, поиск решения уравнения Больцмана в форме (28) приведет качественно к таким же результатам, какие получены в данной работе. Во-вторых, как правило, не ясно, какую функцию H следует использовать. Здесь снова приходится привлекать модельные физические соображения, так что поиск решения в форме (28) может оказаться менее универсальным, чем метод, изложенный в разделе 1.

Уравнения переноса для точных первых пяти моментов функции распределения являются интегродифференциальными, а обобщенные определяющие соотношения — нелокальными и запаздывающими. И только переходя к огрубленным переменным, мы получаем обычные локальные дифференциальные уравнения гидродинамики. Как уже отмечалось, нелокальные уравнения гидродинамики ранее были получены из решения линейного уравнения Больцмана [5]. В линейном приближении выведенные нами уравнения соответствуют уравнениям, полученным в [5]. Запаздывающие определяющие соотношения выводились также и в [6]. Полученные в этой работе определяющие соотношения однако не содержали членов (22), зависящих от начальных данных. Это связано с тем, что использованный авторами [6] метод построения решения уравнения Больцмана применим для описания узкого класса течений с локально-максвелловскими начальными условиями, когда $\mathbf{p}(t_0) = \mathbf{q}(t_0) = 0$. Возможности этого метода можно было бы расширить, если в качестве граничного (начального) условия, отбирающего решения в удаленном прошлом, выбрать не локально равновесное распределение Максвелла f_0, а некоторую другую функцию. Например, функцию распределения навье-стоксовского приближения f_{NS}. Это достигается введением в уравнение Больцмана (1) бесконечно малого источникового члена вида

$$\frac{df}{dt} - J(f, f_1) = -\varkappa(f - f_{NS}),$$

где $\varkappa \to +0$ и $f_{NS} = f_0[A_1 \mathbf{c}_0\mathbf{c}_0 : \langle \nabla \mathbf{u} \rangle + A_2 \mathbf{c}_0 \cdot \nabla T]$.

Явный вид функций A_1 и A_2 можно найти в [1]. Следуя далее схеме, разработанной в [6], получим решения, описывающие эволюцию значительно более широкого класса течений, в которых напряжения в удаленном прошлом не равны нулю.

В отличие от метода [6], решение (10) пригодно для описания течений с произвольными начальными данными. Это приводит к тому, что при произвольных начальных данных уравнения переноса (19) и уравнения для гидродинамических переменных (10) содержат составляющие напряжений $\mathbf{p}(t, t_0)$, $\mathbf{q}(t, t_0)$, зависящие от начальных данных.

Можно показать, что для слабо неоднородных течений разреженного газа эти составляющие напряжений экспоненциально затухают на временах порядка времени свободного пробега молекул [4]. Поэтому в уравнениях для гидродинамических переменных (10) этими вкладами можно почти всегда пренебречь (во всяком случае в навье-стоксовском приближении).

Важным моментом построения замкнутой гидродинамической теории является вычисление релаксационных ядер переноса M_0 и L_0. В общем случае это весьма не простая задача, требующая специального обсуждения.

Автор признателен Е.Г.Колесниченко за обсуждение работы и Международному научному фонду (фонду Сороса), при частичной финансовой поддержке которого выполнена эта работа.

Список литературы

[1] *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 510 с.
[2] *Бобылев А.В.* Точные и приближенные методы в теории нелинейных кинетических уравнений Больцмана и Ландау. М., 1987. 251 с.
[3] *Зубарев Д.Н.* Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
[4] *Рудяк В.Я.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
[5] *Bixon M., Dorfman J.R., Mo K.C.* // Phys. Fluids. 1971. Vol. 14. N 6. P. 1049–1057.
[6] *Зубарев Д.Н., Хонькин А.Д.* // ТМФ. 1972. Т. 11, № 3. С. 403–412.
[7] *Климонтович Ю.Л.* Кинетическая теория неидеальных газов и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
[8] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. Вып. 2. С. 618–619.