

- [1] Аланакян Ю.Р., Штернов Н.П. // Физика плазмы. 1994. Т. 17. Вып. 3. С. 347.
 [2] Жаринов А.В., Мовсисянц Ю.Б., Тосунян Г.А. // Физика плазмы. 1985. Т. 11. Вып. 6. С. 694.
 [3] Рожанский В.А., Цендин Л.Д. Столкновительный перенос в частично-ионизованной плазме. М.: Энергоатомиздат, 1988.
 [4] Термоэлектрическое преобразование энергии и низкотемпературная плазма / Под ред. Б.Я. Мойжеса, Г.Е. Пикуса. М.: Наука, 1973.
 [5] Hammer D.A., Rostoker N. // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. P. 1831.

01;04
 © 1995 г.

Журнал технической физики, т. 65, в. 11, 1995

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОТОКА ПЛАЗМЫ

В.А.Кутвицкий, Л.С.Соловьев

Институт земного магнетизма, ионосферы
 и распространения радиоволн РАН,
 142092, Троицк, Московская область, Россия
 (Поступило в Редакцию 23 ноября 1994 г.)

Исследование малых азимутальных колебаний цилиндрического тока в рамках двухжидкостной электромагнитной газодинамики (ЭМГД) приводит к обнаружению двух новых эффектов: неустойчивости и ускорения заряженных частиц, отсутствующих в классической магнитной гидродинамике (МГД). Рассмотренный механизм динамического ускорения частиц представляется ответственным за происхождение частиц высоких энергий в лабораторной и космической плазме.

Равновесные цилиндрические токи

Задача о равновесии круглого плазменного цилиндра с продольным током в релятивистской РЭМГД ^[1,2] сводится к решению четырех уравнений

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r E_r = 4\pi e \left(\frac{n_+}{\Gamma_+} - \frac{n_-}{\Gamma_-} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r B_\varphi = \frac{4\pi e}{c} \left(\frac{n_+ v_+}{\Gamma_+} - \frac{n_- v_-}{\Gamma_-} \right),$$

$$\frac{dp}{dr} = \pm \frac{en}{\Gamma} \left(E_r - \frac{v}{c} B_\varphi \right), \quad (1)$$

где r, φ, z — цилиндрические координаты; \mathbf{E} — электрическое поле; \mathbf{B} — магнитное поле; v_\pm — скорости; p_\pm и n_\pm — инвариантные давления и концентрации; $e_\pm = \pm e$ — заряды; $\Gamma_\pm = (1 - v_\pm^2/c^2)^{1/2}$ — релятивистский корень.

В случае однородных скоростей $v_{\pm} = \text{const}$, согласно (1),

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dp}{n dr} = 4\pi e^2 \left(n_{\pm} - \frac{n_{\mp}}{\Gamma'} \right), \quad (2)$$

где $\Gamma' = \Gamma_+ \Gamma_- (1 - v_+ v_- / c^2)^{-1}$ — релятивистский инвариант.

Из (2) следует, что конфигурации со спадающим давлением существуют только при $\Gamma' < n_+ / n_- < 1 / \Gamma'$ и, следовательно, квазинейтральность плазмы является релятивистским эффектом. Если $p_+ / p_- = \text{const}$, то, поскольку $p = nkT$, электрическое поле выражается через магнитное соотношением

$$E = \frac{V}{c} B, \quad V \equiv \frac{qc^2}{j} = c^2 \frac{N_+ - N_-}{N_+ v_+ - N_- v_-} = \frac{T_+^* v_- + T_-^* v_+}{T_+^* + T_-^*}, \quad (3)$$

где $q = e(n_+ / \Gamma_+ - n_- / \Gamma_-)$ — плотность заряда, $j = e(n_+ v_+ / \Gamma_+ - n_- v_- / \Gamma_-)$ — плотность тока, $N = n / \Gamma$ и $T^* = \Gamma T$ — концентрации и температуры в лабораторной системе координат.

Соотношение (3) заменяет закон Ома в МГД, где $V = (m_+ v_+ + m_- v_-) / (m_+ + m_-)$, m_{\pm} — массы заряженных частиц.

В нерелятивистском приближении при $n_+ = n_- = \text{const}$, $p_+ = p_-$, $u = v_+ - v_-$

$$E_r = \frac{v_+ + v_-}{2c} B_{\varphi}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r B_{\varphi} = \frac{4\pi e n u}{c}, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{e n u B_{\varphi}}{2c}. \quad (4)$$

Если $u(r)$ описывается бесселевой функцией $u = u_0 I_0(\alpha r)$, то, полагая $p(a) = 0$, $\kappa^2 = 4\pi e^2 n / m c^2$, получим

$$B_{\varphi} = \frac{4\pi e n u_0}{c} I_1(\alpha r), \quad p = \frac{\kappa^2 m n u_0^2}{4\alpha^2} [I_0^2(\alpha a) - I_0^2(\alpha r)]. \quad (5)$$

Случай однородного тока получается отсюда предельным переходом $\alpha \rightarrow 0$

$$u = u_0, \quad B_{\varphi} = 2\pi e n u_0 r / c, \quad p = \kappa^2 m n u_0^2 (a^2 / 8) (1 - r^2 / a^2). \quad (6)$$

Несжимаемые азимутальные возмущения цилиндрического потока

В нерелятивистском приближении в пренебрежении током смещения уравнения идеальной двухжидкостной ЭМГД составляет систему

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} = 4\pi e (n_+ - n_-), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi e n}{c} (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-),$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d}{dt} p n = 0, \quad m \frac{d}{dt} \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{n} \pm e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right). \quad (7)$$

Здесь первые четыре уравнения представляют уравнения Максвелла, причем второе уравнение служит для определения разности концентраций. Динамические уравнения содержат двойной комплект для ионного и электронного газов $m = m_{\pm}$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\pm}$, $p = p_{\pm}$. Для несжимаемых движений при $\partial/\partial z = 0$ введение функций ψ , Ψ и χ

$$rB_r = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad B_{\varphi} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad rv_r = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}, \quad v_{\varphi} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad rE_r = \frac{\partial\chi}{\partial\varphi}, \quad E_{\varphi} = -\frac{\partial\chi}{\partial r} \quad (8)$$

позволяет представить уравнения Максвелла в виде

$$\frac{1}{c} \frac{\partial\psi}{\partial t} = -E_z, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = \Delta\chi, \quad \Delta\psi = -\frac{4\pi en}{c}(v_z^+ - v_z^-), \quad B_z = \frac{4\pi en}{c}(\Psi_+ - \Psi_-), \quad (9)$$

а из уравнений движения следует

$$\frac{d}{dt}\Delta\Psi = \pm \frac{e}{mc} \left(\frac{dB_z}{dt} - \mathbf{B}\nabla v_z \right), \quad \frac{dv_z}{dt} = \mp \frac{e}{mc} \frac{d\Psi}{dt}. \quad (10)$$

Линеаризация уравнений (9), (10) для азимутальных возмущений $\propto \exp(i l \varphi - i \omega t)$ при $n = \text{const}$, $j = j_z = en(v_+ - v_-)$ приводит к системе трех уравнений для $f_{\pm} = rv_r^{\pm}$ и $\varepsilon = eE_z/2\bar{m}$ [3,4]

$$\Delta f \mp \kappa^2(f_+ - f_-) = -\frac{2\bar{m}l^2}{m\omega^2 r}(\Omega \mp v') \left(\varepsilon + \frac{\Omega_{\Sigma}}{2r} f \right),$$

$$\Delta\varepsilon - \kappa_{\Sigma}^2\varepsilon = \frac{\kappa_{\Sigma}^2}{2r} [(\Omega_+ - v'_+)f_+ + (\Omega_- + v'_-)f_-], \quad (11)$$

где $\bar{m} = m_+m_-/m_{\Sigma}$, $m_{\Sigma} = m_+ + m_-$, $\kappa^2 = 4\pi e^2 n/mc^2$, $\kappa_{\Sigma}^2 = \kappa_+^2 + \kappa_-^2$, $\Omega = eB_{\varphi}/mc$, $\Omega_{\Sigma} = \Omega_+ + \Omega_-$,

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l^2}{r^2}.$$

Приращения продольных скоростей выражаются через ε и f_{\pm} формулой

$$\omega \tilde{v}_z = \pm i[2\bar{m}\varepsilon/m - (v' \mp \Omega)f/r]. \quad (12)$$

а) В случае совместного движения положительно и отрицательно заряженных частиц $v_+ = v_- = v$, когда в равновесном состоянии плазма холодная, ток отсутствует и соответственно $\Omega = 0$, из (11) следует

$$\Delta f \mp \kappa^2 f_R = \pm \frac{2\bar{m}l^2 v'}{m\omega^2 r} \varepsilon, \quad \Delta\varepsilon - \kappa_{\Sigma}^2\varepsilon = -\frac{\kappa_{\Sigma}^2 v'}{2r} f_R, \quad (13)$$

где $f_R = f_+ - f_-$.

Для параболического распределения скорости $v = v_0 + \alpha r^2$, $v'/r = \text{const}$ система (13) имеет точное решение

$$\varepsilon = \varepsilon_l J_l(\lambda r), \quad f = f_l J_l(\lambda r), \quad (14)$$

удовлетворяющие граничным условиям $f(a) = \varepsilon(a) = 0$, если $\lambda a = x_{lk}$ — корни бесселевых функций $J_l(x)$. Подстановка в (13) при учете соотношений (9), (10) дает

$$\omega = \pm i \frac{l \kappa_{\Sigma} v' / r}{\lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2}, \quad v_z^+ - v_z^- = -\frac{\lambda^2 v' \xi_R}{\lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2}, \quad (15)$$

где $f_R = r v_R = r \partial \xi_R / \partial t = -i \omega \xi_R r$.

Отсюда видно, что имеется неустойчивость и ускорение частиц. Разность продольных скоростей растет с увеличением производной $v'(r)$ и стремится к нулю при $\kappa_{\Sigma}^2 a^2 \rightarrow \infty$. При этом сохраняется суммарный импульс $m_+ v_+ + m_- v_- = \text{const}$.

б) В случае однородного тока $j_0 = e n u_0$, когда равновесие описывается формулами (6), система (11) также удовлетворяется решением (14), причем решение дисперсионного уравнения имеет вид

$$\frac{\omega^2}{l^2} = \frac{\bar{m}}{m_{\Sigma}} \frac{\Omega'_{\Sigma}}{\lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2} \left[\frac{\eta \lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2}{\lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta \lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2}{\lambda^2 + \kappa_{\Sigma}^2} \right)^2 - 1} \right], \quad \eta \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{m_+}{m_-} + \frac{m_-}{m_+} \right). \quad (16)$$

Здесь оба корня положительны, так что неустойчивость отсутствует.

в) В случае “скинированного” тока (5), если $v_{\pm} = v_0^{\pm} I_0(\alpha r)$, при $\alpha^2 \ll \lambda^2$, $\kappa^2 \ll \lambda^2$ можно получить приближенное решение системы (11), которое также выражается бесселевыми функциями (14). Решение соответствующего дисперсионного уравнения

$$\frac{\omega^2}{l^2} = \frac{\kappa_{\Sigma}^2 u_0 m_{\pm}}{4 \lambda^2 m_{\Sigma}} (\kappa_{\pm}^2 u_0 \pm \alpha^2 v_0^{\mp}) \quad (17)$$

имеет мнимые корни, т. е. имеется неустойчивость.

Случай одинаковых масс частиц

Остановимся более подробно на случае равных масс $m_+ = m_-$ и противоположных продольных скоростей $v_z^+ = -v_z^- = V$. В этом случае из (11) вытекает система

$$\Delta f_{\Sigma} = -\frac{l^2}{\omega^2 r} (\Omega - V') \left(2\varepsilon + \frac{\Omega}{r} f_{\Sigma} \right), \quad \Delta \varepsilon = \kappa_{\Sigma}^2 \left[\varepsilon + (\Omega - V') \frac{f_{\Sigma}}{2r} \right] \quad (18)$$

для $f_{\Sigma} = f_+ + f_-$ и ε и автономное уравнение

$$\frac{1}{r} (r f_R)' - \left[\frac{l^2}{r^2} + 2 \kappa_{\Sigma}^2 - \frac{l^2 \Omega}{\omega^2 r^2} (\Omega - V') \right] f_R = 0 \quad (19)$$

для $f_R = f_+ - f_-$. Равновесные переменные связаны соотношением $(r \Omega)' = \kappa_{\Sigma}^2 V r$. Из (19) следует необходимый локальный критерий устойчивости

$$V' < \Omega \quad \text{или} \quad \kappa_{\Sigma}^2 B_{\varphi} - [(r B_{\varphi})' / r]' > 0, \quad (20)$$

так что для неустойчивости требуется $V'(r) > 0$.

Величина $\varepsilon^* = \varepsilon + \Omega f/r$ пропорциональна ускоряющему электрическому полю

$$E_z^* = E_z + \frac{1}{c} v_r B_\varphi = \frac{m}{e} \varepsilon^*.$$

В рамках классической МГД $E_z^* = 0$, в то время как из (18) следует, что ускоряющее поле

$$\varepsilon^* = -\frac{\omega^2 r}{2l^2} \frac{\Delta f_\Sigma}{\Omega - V'},$$

вообще говоря, отлично от нуля.

В предельном случае большого погонного числа частиц $\kappa_\Sigma^2 a^2 \gg 1$ система (18) сводится к одному уравнению

$$\left[\left(1 - \frac{l^2 \Omega^2}{\omega^2 \kappa_\Sigma^2 r^2} \right) r f' \right]' - \frac{l^2}{r} \left\{ 1 - \frac{\Omega}{\omega^2 \kappa_\Sigma^2} \left[\frac{l^2 \Omega}{r^2} + 2 \left(\frac{\Omega}{r} \right)' \right] \right\} f = 0, \quad (21)$$

которое может быть получено также в рамках классической одножидкостной МГД [5]. Легко убедиться, что при $f(a) = 0$ $\omega^2 \geq 0$, т. е. в пределе $\kappa_\Sigma^2 a^2 \rightarrow \infty$ конфигурация устойчива при произвольном распределении тока. Таким образом, линейное рассмотрение показывает, что в рамках МГД оба интересующих нас эффекта — динамическое ускорение частиц и неустойчивость отсутствуют. Заметим также, что в рамках МГД наличие равновесного продольного поля $B_z(r)$ не изменяет вида уравнения (21).

Из уравнений (18) и (19) вытекают интегральные соотношения

$$\frac{\omega^2}{l^2} \int_0^a \left(r f_\Sigma'^2 + \frac{l^2}{r} f_\Sigma^2 \right) dr = \int_0^a dr \frac{\Omega}{r} (\Omega - V') f_\Sigma^2 - \int_0^a dr \left[r \varepsilon'^2 + \left(\kappa_\Sigma^2 + \frac{l^2}{r^2} \right) \varepsilon^2 \right], \quad (22)$$

$$\frac{\omega^2}{l^2} \int_0^a dr \left[r f_R'^2 + \left(\frac{l^2}{r} + \kappa_\Sigma^2 \right) f_R^2 \right] = \int_0^a dr \frac{\Omega}{r} (\Omega - V') f_R^2, \quad (23)$$

позволяющие находить приближенные выражения для ω^2 .

В случае однородной плотности тока (6) уравнения (18) и (19) имеют точные решения (14), подстановка которых в (18), (19) дает следующие выражения для частоты ω , электрического поля E_z и ускоряющего электрического поля E_z^* :

$$\omega^2 = \frac{\Omega'^2 l^2}{\kappa_\Sigma^2 + \lambda^2}, \quad \varepsilon = -\frac{\omega^2 \kappa_\Sigma^2}{l^2 \Omega'} r v_r, \quad \varepsilon^* = -\frac{\omega^2 \lambda}{l^2 \Omega'} r v_r = \frac{\Omega' \lambda^2}{\kappa_\Sigma^2 + \lambda^2} r v_r. \quad (24)$$

Здесь присутствует эффект динамического ускорения частиц, но отсутствует неустойчивость. В случае равновесных распределений скорости и магнитного поля (5) $V = V_0 I_0(\alpha r)$, $\Omega = \kappa_\Sigma^2 V_0 I_1(\alpha r)/\alpha$ можно получить приближенное решение для неоднородного тока при $\alpha a \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\Omega'^2 l^2}{\kappa_\Sigma^2} \frac{\kappa_\Sigma^2 - \alpha^2}{\kappa_\Sigma^2 + \lambda^2}, \quad \varepsilon^* = \frac{\kappa_\Sigma^2 V_0}{2} \frac{\lambda^2 r v_r}{\kappa_\Sigma^2 + \lambda^2}. \quad (25)$$

Видно, что при $\kappa_\Sigma^2 < \alpha^2$ имеется неустойчивость, а ускоряющее электрическое поле в рассматриваемом приближении совпадает с (24).

Таким образом, в случае нарастающего тока при определенном соотношении равновесных параметров развивается неустойчивость, сопровождаемая ускорением заряженных частиц. Поскольку при $f_{\pm}(a) = 0$ сохраняется полный ток, то ускорение в половине секторов собственных функций компенсируется замедлением в другой половине. В результате при развитии неустойчивости высоких мод l, k ускоренные частицы образуют дискретные потоки.

Результаты численных расчетов

Исследование азимутальной неустойчивости конфигурации (25) при произвольных параметрах α^2 и κ_{Σ}^2 производилось путем численно-интегрирования системы (18) и уравнения (19) при граничных условиях $f_{\pm}(0) = \varepsilon(0) = f_{\pm}(a) = \varepsilon(a) = 0$, $a = 1$.

Уравнения (18), нормированные на ларморовскую частоту $\Omega = eB/mc$ по граничному полю $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\Omega(a)$, $\bar{\omega} = \omega/\Omega(a)$, преобразуются к виду

$$\Delta f_{\Sigma} = -\frac{l^2}{\bar{\omega}^2} \left[\bar{\Omega} - \frac{V'}{\Omega(a)} \right] \left(2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{\Omega}}{r} f_{\Sigma} \right), \quad \Delta \varepsilon = \kappa_{\Sigma}^2 \left\{ \bar{\varepsilon} + \left[\bar{\Omega} - \frac{V'}{\Omega(a)} \right] \frac{f_{\Sigma}}{2r} \right\}, \quad (26)$$

где $\bar{\Omega} = \Omega(r)/\Omega(a)$.

Для исследуемой ниже равновесной конфигурации (5)

$$\Delta f_{\Sigma} = -\frac{l^2 \bar{I}_1}{\bar{\omega}^2 r} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\kappa_{\Sigma}^2} \right) \left(2\bar{\varepsilon} + \frac{\bar{I}_1}{r} f_{\Sigma} \right), \quad \Delta \bar{\varepsilon} = \kappa_{\Sigma}^2 \left\{ \bar{\varepsilon} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{\kappa_{\Sigma}^2} \right) \bar{I}_1 \frac{f_{\Sigma}}{2r} \right\}, \quad (27)$$

где $\bar{I}_1 \equiv I_1(\alpha r)/I_1(\alpha a)$.

При этом приращение продольных скоростей

$$\tilde{v}_z = \pm \frac{i}{2\bar{\omega}} \left[\bar{\varepsilon} + \bar{I}_1 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\kappa_{\Sigma}^2} \right) \frac{f_{\Sigma}}{2r} \right]. \quad (28)$$

На рис. 1 приведен ряд зависимостей $\omega_*^2(\kappa) = \bar{\omega}^2 \kappa_{\Sigma}^2 = 8\pi n m \omega^2 / B^2(\alpha)$ для $l = 2$ и нескольких значений α (цифры у кривых). При $\kappa < \alpha$ имеется неустойчивость, максимальный инкремент которой увеличивается с ростом α . При $|\alpha| < 0.4$ неустойчивость отсутствует, при $\alpha = 0$ значение ω^2 определяется формулой (24). При заданных α и κ увеличение номера азимутальной моды l приводит к росту $|\omega_*^2|$, а увеличение номера радиальной моды k снижает величину $|\omega_*^2|$. На рис. 2 показаны собственные функции $f(r)$ моды $l = 2$ (цифры у кривых), нормированные на их значения в максимуме и соответствующие фиксированному отношению $\alpha/\kappa_{\Sigma} = 2$, отвечающему области неустойчивости. Видно, что скинирование равновесного тока (увеличение α) ведет к локализации собственных функций вблизи границы шнура. На рис. 3, 4 представлены распределения действующего поля E^* и возмущения продольной скорости v_z для $l = 2$, $\alpha/\kappa_{\Sigma} = 2$. Нормировка кривых соответствует нормировке $f(r)$ на рис. 2. С увеличением κ_{Σ} (цифры у кривых) эти распределения также локализуются вблизи границы, а их максимальные значения уменьшаются.

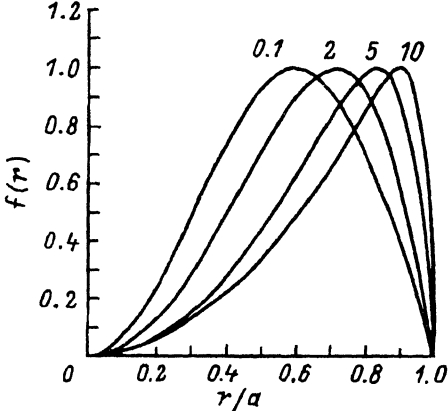


Рис. 1.

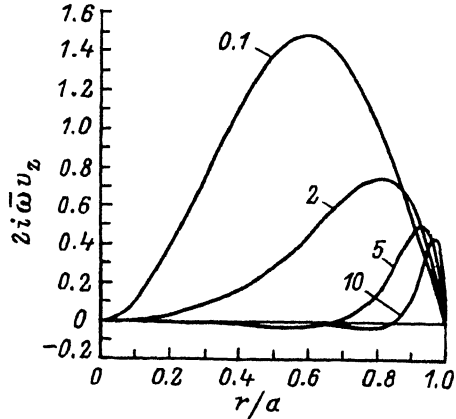


Рис. 2.

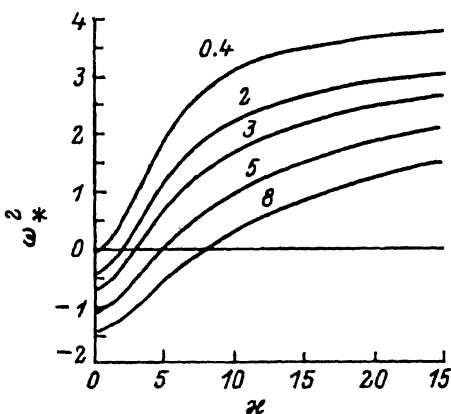


Рис. 3.

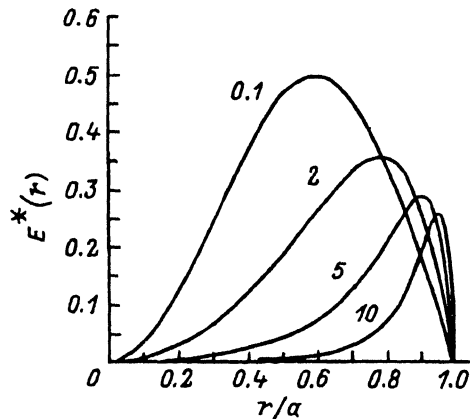


Рис. 4.

В заключение отметим, что полученные выше результаты относятся к простейшему случаю несжимаемой плазмы с фиксированной границей. Однако учет сжимаемости и замена закрепленной границы на свободную приводят к расширению области неустойчивости и увеличению инкрементов.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (проект RIJ000).

Список литературы

- [1] Соловьев Л.С. Препринт ИАЭ № 3362/1. 1980.
- [2] Гурович В.П., Соловьев Л.С. // ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1144.
- [3] Никонов С.В., Соловьев Л.С., Юргеленас Ю.В. Препринт ИАЭ. № 4935/6. 1989.
- [4] Кутецкий В.А., Соловьев Л.С., Торохова Н.В. Препринт ИАЭ. № 5547/6. 1992.
- [5] Соловьев Л.С. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат. 1963. № 3. С. 945.