01;03

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

© *О.Ю.Динариев, А.А.Шапиро*

Институт физики Земли им. О.Ю.Шмидта РАН,
123810 Москва, Россия
(Поступило в Редакцию 24 октября 1994 г.
В окончательной редакции 14 февраля 1995 г.)

Рассмотрена кинетическая теория газа в пористой среде в кнудсеновском приближении, когда длина свободного пробега много больше размеров пор. Методом, отличным от методов Чепмена–Энскога, Гильберта и Грэда, осуществлен переход к гидродинамическому описанию, которое оказывается нелокальным. Переход является точным в том смысле, что по любому решению нелокального гидродинамического уравнения однозначно восстанавливается некоторое решение исходного кинетического уравнения. Ядро пространственно-временной нелокальности удается вычислить в двух предельных случаях (длинные волны и малые частоты).

Введение

При выводе гидродинамических уравнений из кинетической теории газов традиционно используют методы асимптотических разложений Чемпена-Энскога, Гильберта и Грэда [1–5]. В то же время для линеаризованного кинетического уравнения можно перейти непосредственно к уравнениям гидродинамики путем обращения кинетического оператора и выделения из функции распределения гидродинамических мод [6,7]. Такой подход приводит в общем случае к нелокальной гидродинамике, когда вместо коэффициентов переноса в материальных соотношениях фигурируют свертки с некоторыми ядрами, которые характеризуют эффекты наследственности и пространственной нелокальности. Если исходное кинетическое уравнение является линейным, то переход от кинетики к гидродинамике является точным в том смысле, что по любому решению нелокальных гидродинамических уравнений однозначно восстанавливается некоторое решение исходного кинетического уравнения. Подчеркнем, что метод [6,7] можно использовать для любых кинетических уравнений. В частности, он совместим с подходом работ [8,9] (где предлагается ввести гидродинамическое описание в кинетическое уравнение путем модификации интеграла столкновений Больцмана с учетом эффектов сплошной среды) и не может рассматриваться как альтернативный подход.

В настоящей работе метод [6,7] применяется к кинетической теории газа в пористой среде в кнудсеновском приближении, когда длина свободного пробега много больше размеров пор. Для данной конкретной задачи модификация [8,9] представляется неадекватной. В рассматриваемой постановке (отсутствие столкновений частиц газа между собой) интеграл столкновения — линейный оператор и переход к нелокальной гидродинамике (раздел 1) является точным. Далее, используя явный вид интеграла столкновений для изотропной пористой среды, можно получить некоторые точные результаты (раздел 2).

Отметим, что исследование кинетики разреженного газа в пористом материале важно для технологии разделения изотопов. Течения газов в пористой среде при низких давлениях встречаются также в различных процессах химической технологии (восстановление окислов металлов, диффузия в пористых катализаторах и др.) [10].

В работе используется система единиц измерения, в которой постоянная Больцмана равна единице. Греческие индексы пробегают значения $0,1,2,3$, соответствуя некоторой системе отсчета x^α, где x^0 — время. Римские индексы пробегают значения $1,2,3$. По повторяющимся индексам производится суммирование.

1. Основные уравнения кинетической теории газа в пористой среде

Рассмотрим газ бесструктурных частиц с массой m в изотропной однородной пористой среде. Предположим, что твердая фаза всюду имеет постоянную температуру T. Кинетика газа описывается функцией распределения

$$f = f(x^\alpha,\, v^i),$$

которая подчиняется уравнению вида

$$\partial_0 f + v^i \partial_i f = \mathrm{St}[f]. \tag{1}$$

Здесь St — оператор, действующий в пространстве функций, зависящих от v^i и называемый интегралом столкновений.

Предположим, что функция распределения нормирована таким образом, что величина

$$\rho(x^\alpha) = \int f(x^\alpha,\, v^j) dv^k \tag{2}$$

есть плотность частиц газа на единицу порового объема.

Интеграл столкновений удовлетворяет следующим свойствам:

$$\int \mathrm{St}[f](x^\alpha, v^i) dv^j = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{St}[f_0] = 0,$$

где $f_0(v^i) = (2\pi)^{-3} \exp((\mu - \frac{m}{2} v^i v^i)/T)$ — равновесное максвелловское распределение.

Определим поток частиц по формуле

$$j^i(x^\beta) = \theta \int v^i f(x^\beta, v^j) dv^k,$$

где θ — пористость.

Из (1)–(3) вытекает локальный закон сохранения

$$\theta \partial_0 \rho + \partial_i j^i = 0. \tag{4}$$

Интеграл столкновений — в общем случае нелинейный оператор. В кнудсеновском приближении, когда длина свободного пробега много больше размеров пор, можно пренебречь столкновениями частиц между собой и учитывать только столкновения с поверхностью твердой фазы. В этом случае St — линейный оператор.

Линеаризуем кинетическое уравнение (1) вблизи равновесного состояния. Необходимо подчеркнуть, что для кнудсеновского течения линеаризация не сужает класс рассматриваемых решений.

Подстановка выражения $f = f_0(1+\varphi)$ в уравнение (1) приводит к линейному уравнению

$$\partial_0 \varphi + v^i \partial_i \varphi = L\varphi, \tag{5}$$

где $L\varphi = f_0^{-1} D(f_0 \varphi)$, оператор D получается путем линеаризации исходного интеграла столкновений.

Оператор L определен на гильбертовом пространстве H_m со скалярным произведением

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \gamma^{-1} \int f_0 \varphi_1^* \varphi_2 dv^i, \quad \gamma = (2\pi)^{-3} (T/m)^{3/2} \exp(\mu/T)$$

и обладает следующими свойствами [1–7].

1) Вследствие обратимости процессов на микроуровне справедливо равенство $L^+ = ILI$, где I — оператор обращения скорости $(I\varphi)(v^i) = \varphi(-v^i)$. Будем рассматривать случай, когда операторы L и I коммутируют. Тогда имеем

$$L^+ = L. \tag{6}$$

2) Действительность

$$(L\varphi)^* = L\varphi^*. \tag{7}$$

3) Вырожденность на одномерном подпространстве $H_h = \{\lambda e^*\}$, $e^* = 1$ (следствие (3))

$$Le^* = 0. \tag{8}$$

4) Диссипативность: на подпространстве H_a, являющемся ортогональным дополнением H_h в H_m, справедливо неравенство

$$L < 0. \tag{9}$$

Введем вспомогательные обозначения $P_h : H_m \to H_h$, $P_a : H_m \to H_a$ — проекторы, $I_h : H_h \to H_m$, $I_a : H_a \to H_m$ — вложения, $e_* = e^*/(e^*, e^*)$, ρ_0 — равновесная плотность газа. Вместо уравнения (5) рассмотрим более общее уравнение с источниками

$$\partial_0\varphi + v^i\partial_i\varphi - L\varphi = S,$$
$$S(x^\alpha, \cdot) \in H_h. \tag{10}$$

Из уравнения (10) с учетом (6) и (8) вытекает обобщение уравнения (4)

$$\theta\partial_0\rho_1 + \partial_i j^i = \nu,$$

где $\nu = (e^*, S)$ — источник частиц, $\rho_1 = \rho - \rho_0 = (e^*, \varphi)$ — возмущение поля плотности, $j^i = \theta(v^i, \varphi)$ — поток частиц.

Применим к уравнению (10) преобразование Фурье

$$\varphi_F(k_\alpha, v^i) = \int \exp(-ik_\alpha x^\alpha)\varphi(x^\alpha, v^i)dx^\alpha.$$

Тогда получается операторное уравнение

$$G\varphi_F = S_F, \quad G = ik_0 + ik_iv^i - L. \tag{11}$$

Произведем явное разделение в уравнении (11) гидродинамических и негидродинамических переменных. Для этого используем обозначения $h = P_h\varphi = e^*(e_*, \varphi)$, $a = P_a\varphi = \varphi - h$, $G_{hh} = P_hGI_h = ik_0$, $G_{ah} = P_aGI_h = ik_iv^i$, $G_{ha} = P_hGI_a$, $G_{aa} = P_aGI_a$. Исключая из уравнения (11) негидродинамические переменные a, можно получить уравнение на h

$$(G_{hh} - G_{ha}G_{aa}^{-1}G_{ah})h_F = S_F.$$

По любому решению этого уравнения можно восстановить решение исходного уравнения (11) по формуле $\varphi_F = (1 - G_{aa}^{-1}G_{ah})h_F$. Легко вывести выражение для тока

$$j_F^i = (v^i, \varphi_F) = (v^i, a_F) = -A^i\rho_{1F}, \tag{12}$$
$$A^i = (v^i, G_{aa}^{-1}G_{ah}e_*) = (e^*, e^*)^{-1}ik_ix,$$
$$X = X(k_\alpha) = (ik_iv^i, G_{aa}^{-1}ik_jv^j)/(k_ik_i). \tag{13}$$

Итак, динамика поля плотности описывается моделью с пространственно-временнóй нелокальностью. В переменных x^α материальное соотношение (12) принимает вид свертки с некоторым ядром $K = K(x^\alpha)$, где $x = K_F$,

$$j^i = -(e^*, e^*)^{-1}K\partial_i\rho_1.$$

Перечислим свойства ядра, вытекающие из общих свойств оператора столкновений (6)–(9) и изотропности пористой среды. $(X(k_\alpha))^* = X(-k_\alpha)$, что эквивалентно действительности функции $K(x^\alpha)$. Функции X и K инварианты относительно ортогональных преобразований пространственных переменных. В силу (9) оператор G_{aa} обратим в комплексной полуплоскости $\mathrm{Im}k_0 < 0$, что по теореме Пэли–Винера [11] эквивалентно $K(x^\alpha) = 0$ при $x^0 < 0$ (причинность). Далее, из (6) и (9) имеем

$$G_{aa}^{-1} + G_{aa}^{+-1} = -2G_{aa}^{+-1}P_aLI_aG_{aa}^{-1} > 0,$$

откуда вытекает условие диссипативности для ядра $\mathrm{Re}X > 0$.

2. Нелокальные свойства решений кинетического уравнения

В этом разделе мы будем рассматривать кнудсеновские течения с коэффициентом аккомодации частиц газа на поверхности, равным единице. В этом случае интеграл столкновений имеет вид [12]

$$\mathrm{St}[f] = \mathrm{St}_1[f] - \mathrm{St}_2[f],$$

$$\mathrm{St}_1[f](x^\alpha, v^i) = -A_1 f_0 \int\limits_\Omega (v^i n^i)(v_1^k n^k) f(x^\alpha, v_1^j) dv_1^j dn^k,$$

$$\mathrm{St}_2[f](x^\alpha, v^i) = A_2 |v| f,$$

$$A_1 = \sigma m^{1/2} 2^{-3/2} \pi^{-1/2} T^{-1/2} \rho_0^{-1} \theta^{-1}, \quad A_2 = 4^{-1} \sigma \theta^{-1}. \tag{14}$$

Здесь σ — удельная поверхность пористой среды, n^i — единичный вектор, область интегрирования Ω определяется неравенствами $(v^i n^i) > 0$, $(v_1^i n^i) < 0$.

Будем использовать представление $v^i = V n_V^i$, где $V = |v|$. Это представление позволяет рассматривать гильбертово пространство H как тензорное произведение $H = H_V \otimes H_S$, где H_V — гильбертово пространство функций от переменной V со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_V = \gamma^{-1} \int\limits_0^{+\infty} f_0 f_1^* f_2 V^2 dV,$$

а $H_S = L_2(S^2)$ — гильбертово пространство функций на единичной сфере, интегрируемых в квадрате.

Тогда оператор L, соответствующий оператору (14), можно представить в компактном виде

$$L = L_1 + L_2,$$

$$L_1 = -A_1' P \otimes U, \quad A_1' = A_1 \gamma,$$

$$(Pf)(V) = V(V, f)_V,$$

$$(Uf)(n_V^i) = \int\limits_\Omega (n_V^i n_2^i)(n_1^k n_2^k) f(n_1^j) dn_1^j dn_2^k,$$

$$L_2 = -A_2 M \otimes id, \quad (Mf)(V) = V f(V). \tag{15}$$

Здесь область интегрирования Ω_1 определяется неравенствами $(n_V^i n_2^i) > 0$, $(n_1^i n_2^i) < 0$: id — тождественный оператор в пространстве функций на единичной сфере. Оператор L удовлетворяет свойствам, сформулированным в разделе 1 (см. Приложение 1). Оператор U коммутирует с трехмерной группой вращения, поэтому по лемме Шура [13] он пропорционален единичному на каждом из неприводимых подпространств. Заметим, что $L_2(S^2) = \bigoplus\limits_{A=0}^{\infty} \Phi_A$, где Φ_A — $(2A+1)$-мерное неприводимое подпространство представления группы вращений. При этом Φ_0 — константы, Φ_1 — линейные комбинации вида $\lambda_i n^i$. На каждом из подпространств Φ_A оператор U действует как оператор умножения на скаляр u_A. Спектр u_A оператора U найден в Приложении 2.

Рассмотрим задачу о расчете восприимчивости X в двух предельных случаях: $k_i = 0$ (длинные волны) и $k_0 = 0$ (медленные процессы). Пусть $k_i = 0$. Подставляя (15) в формулу (13), получаем

$$X(k_0) = \frac{4}{3}\pi Y(1 + A_1' u_1 Y)^{-1},$$

$$Y = Y(k_0) = (V, (ik_0 + A_2 V)^{-1} V)_V,$$

что является Фурье-образом ядра в релаксационной фильтрации [14]. Если представить ядро в каноническом виде как интеграл по спектру внутренних времен релаксации, то получаем

$$X(k_0) = \int\limits_0^{+\infty} A(\tau)(1 + ik_0\tau)^{-1} d\tau,$$

$$A(\tau) = \frac{4}{3}\pi\tau Y_1(\pi^2 Y_1^2 + Y_2^2)^{-1}, \quad \tau = (A_2 V)^{-1},$$

$$Y_1(\tau) = \gamma^{-1} f_0(V) V^2,$$

$$Y_2(\tau) = Vp \int\limits_0^{+\infty} Y_1(\tau)(A_2 V - \tau^{-1})^{-1} dV. \tag{16}$$

В реальном пространстве функции (16) соответствует ядро релаксации $K(x^\alpha) = K_1(x^0)\delta(x^i)$, где

$$K_1(x^0) = \int\limits_0^{+\infty} A(\tau)\tau^{-1} \exp(-x^0\tau^{-1}) d\tau.$$

Пусть $k_0 = 0$. В силу изотропности без потери общности можно считать, что $k_i = \lambda\delta_i^1$.

Из формулы (13) и выражений (15) легко найти выражение для X

$$X(k_i) = (v^1, Y), \tag{17}$$

$$Y = G^{-1}(v^1 + C), \quad G = i\lambda v^1 - L. \tag{18}$$

Здесь C — постоянная, которая определяется из дополнительного условия

$$(1, Y) = 0. \tag{19}$$

В силу изотропности X — функция, четная по λ. Оказывается, что эта функция голоморфна в комплексной плоскости λ, за исключением разрезов на мнимой оси (см. Приложение **3**). Она имеет каноническое представление в виде интеграла по спектру радиусов корреляции

$$X(k_i) = \int\limits_0^{r_{\max}} 2B(r)(1 + \lambda^2 r^2)^{-1} dr. \tag{20}$$

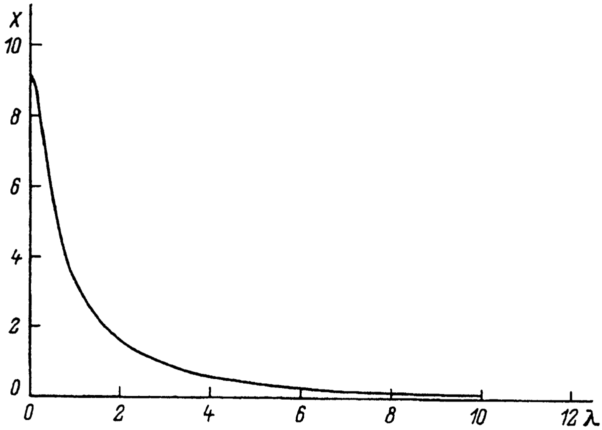

Рис. 1.

В реальном пространстве функции (20) соответствует ядро нелокальности $K(x^\alpha) = \delta(x^0)K_2(x^i)$, где

$$K_2(x^i) = 2\pi R^{-1}\Psi(R), \quad R = \left(\sum_{i=1}^{3}(x^i)^2\right)^{1/2},$$

$$\Psi(R) = \int\limits_0^{r_{\max}} r^{-2}B(r)\exp(-Rr^{-1})dr.$$

Вычислить функции $B(r)$, $X(\lambda)$, $\Psi(R)$ в аналитическом виде представляется затруднительным. Однако легко реализовать простой численный алгоритм (см. Приложение 2). Результаты расчетов представлены в виде графиков $X(\lambda)$ (рис. 1) и $\Psi(R)$ (рис. 2) в системе единиц измерения, в которой $mT^{-1} = 1$, $A_2 = 1$.

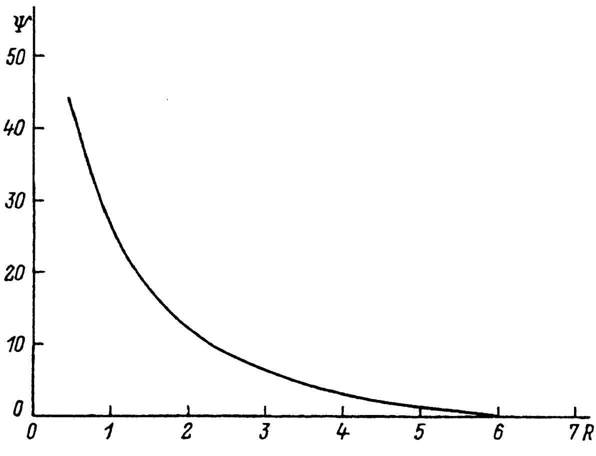

Рис. 2.

Если функция X известна, то распределение плотности можно найти из уравнения

$$\left(i\theta k_0 + (e^*, e^*)^{-1} k_i k_i X\right) \rho_F^1 = \nu_F.$$

Для длинных волн или для медленных процессов в качестве X в это уравнение можно подставить выражения (16) или (20) соответственно.

Выводы

Таким образом, при переходе от кинетического описания к гидродинамическому для газа в пористой среде получается модель с пространственно-временно́й нелокальностью. Переход к гидродинамическому описанию является точным, поскольку по любому решению гидродинамического уравнения можно восстановить некоторое решение кинетического уравнения. Ядро пространственно-временно́й нелокальности удается вычислить в двух предельных случаях (длинные волны и малые частоты). Аналитический вид ядра свидетельствует о наличии непрерывного спектра внутренних релаксационных процессов и радиусов корреляции.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Здесь приводятся доказательства основных свойств оператора столкновений L для случая полной аккомодации, когда этот оператор имеет вид (14). Докажем свойство самосопряженности

$$L^+ = L.$$

Используем то, что $L = L_1 + L_2$. Самосопряженность оператора умножения L_2 очевидна. Для доказательства самосопряженности L_1 представим $(\varphi, L_1\psi)$ в виде

$$A_1 \int\limits_{\Omega} (v^i n^i)(v_1^i n^i) f_0(v^j) f_0(v_1^j) \varphi(v^j)^* \psi(v_1^j) dv^j dv_1^j dn^j.$$

Область Ω определяется неравенствами $(v^i n^i) > 0$, $(v_1^i n^i) < 0$. Равенство $(\varphi, L_1\psi) = (L_1\varphi, \psi)$ устанавливается путем замены n^i на — $-n^i$ в подынтегральном выражении. Действительность (7) оператора L очевидна.

Одномерность ядра L и его вырождение на H_h доказаны в [15].

В силу самосопряженности оператора L свойство его диссипативности сводится к неравенству $(\varphi, L\varphi) < 0$ на H_a, или

$$\int dn^i \Big\{ \int\limits_{(v^i n^i)>0} |v^i n^i| f_0(v^j) \varphi(v^j) dv^j \int\limits_{(v_1^i n^i)<0} |v_1^i n^i| f_0(v_1^j) \varphi(v_1^j) dv_1^j -$$

$$- \int\limits_{(v^i n^i)>0} |v^i n^i| f_0(v^j) \varphi^2(v^j) dv^j \int\limits_{(v_1^i n^i)<0} |v_1^i n^i| f_0(v_1^j) dv_1^j \Big\} < 0.$$

Упростим выражение, стоящее в фигурных скобках. Устранение пределов интегрирования в уменьшаемом достигается путем использования неравенства $ab \leqslant (a+b)^2/4$. В вычитаемом пределы интегрирования можно устранить, используя последовательно четность по v_1^i и затем четность по n^i. В результате свойство отрицательной определенности L вытекает из классического неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\int xy dv^j\right)^2 \leqslant \int x^2 dv^j \int y^2 dv^j,$$

в котором следует положить

$$x = \left[|v^i n^i| f_0(v^j)\right]^{1/2} \varphi(v^j), \quad y = \left[|v^i n^i| f_0(v^j)\right]^{1/2}.$$

Диссипативность оператора L доказана.

2. Вычислим спектр оператора U. Заметим, что из свойств симметрии следует, что для произвольной функции на сфере $f = f(n^i)$

$$(Uf)(n^i) = \int F(n^k n_1^k) f(n_1^i) dn_1^i.$$

Функция F вычисляется в явном виде по формуле

$$F(n^j n_1^j) = \int\limits_{\Omega_2} (n^i n_2^i)(n_1^k n_2^k) dn_2^l,$$

где область интегрирования Ω_2 определяется неравенствами $(n^i n_2^i) > 0$, $(n_1^i n_2^i) < 0$. Непосредственное вычисление показывает, что если обозначить $\psi = \arccos(n^k n_1^k)$, то

$$F(\cos\psi) = \frac{2}{3}(\psi\cos\psi - \sin\psi).$$

Для вычисления спектра оператора U заметим, что если $\psi = \arccos(n_0^k n_1^k)$, где n_0^k — фиксированный единичный вектор, то многочлен Лежандра $P_1(\cos\psi)$ принадлежит подпространству Φ_1 [13]. Поскольку $P_1(1) = 1$, то

$$u_l = 2\pi \int\limits_0^\pi F(\cos\psi) P_l(\cos\psi) \sin\psi d\psi.$$

Легко вычислить непосредственно $u_0 = -\pi^2$, $u_1 = 8\pi^2/9$. Далее, заметим, что $u_l = (4\pi/3)\alpha_l$, где

$$\alpha_l = I_{1l} - I_{2l},$$

$$I_{1l} = \int\limits_0^\pi \psi\cos\psi P_l(\cos\psi)\sin\psi d\psi, \quad I_{2l} = \int\limits_0^\pi P_l(\cos\psi)\sin^2\psi d\psi.$$

Интегрируя по частям и используя уравнения для многочленов Лежандра [13]

$$\left(\frac{d}{dz}(1-z^2)\frac{d}{dz}+l(l+1)\right)P_1=0,$$

можно доказать тождество

$$(l^2+l+1)I_{2l}=(l^2+l-2)I_{1l},$$

которое позволяет при $l\neq 1$ выразить α_l через I_{2l}. Поскольку известно разложение функции $\sin\psi$ по полиномам Лежандра [16,формула 8.922.5], то α_1 легко находятся

$$\alpha_{2k}=-3\pi\left((2k-3)!!\right)^2 2^{-2(k+1)}\left((k+1)!\right)^{-2}, \quad \alpha_{2k+1}=0, \quad k\geqslant 1.$$

3. Исследуем более детально выражение для восприимчивости X, которое дает формула (17). Введем обозначение $b_n=(V^n,1)_V$. Будем использовать систему единиц, в которой $mT^{-1}=1$, $A_2=1$. Отметим, что в этой системе единиц $A_1'=(\pi^2 b_1)^{-1}$. Обозначая $z=\cos\psi$, получаем $v^1=Vz$. Анализ уравнения (18) тогда показывает, что

$$Y=V^{-1}CY_0(z)+CY_{10}(z)+Y_{11}(z),$$

где $Y_0(z)=(i\lambda z+1)^{-1}$, а функции $Y_{10}(z)$, $Y_{11}(z)$ находятся из уравнений

$$(i\lambda z+A_1'b_1U+1)Y_{10}=-A_1'b_0UY_0, \qquad (\Pi1)$$

$$(i\lambda z+A_1'b_1U+1)Y_{11}=z. \qquad (\Pi2)$$

Эти уравнения можно рассматривать как рекуррентные соотношения для коэффициентов разложения функций $Y_{10}(z)$, $Y_{11}(z)$ по полиномам Лежандра $P_l(z)$, поскольку имеет место соотношение Клебша–Гордана [14]

$$(2l+1)zP_l(z)=lP_{l-1}(z)+(l+1)P_{l+1}(z).$$

Процедура рекуррентного вычисления коэффициентов разложения функций $Y_{10}(z)$, $Y_{11}(z)$ дает однозначный результат, за исключением ситуации, когда $\mathrm{Re}\lambda=0$, $|\lambda|\geqslant 1$. В последнем случае уравнения (П1), (П2) имеют нетривиальные решения при нулевых правых частях, что означает особенности для оператора G_{aa}^{-1} и соответственно для функции X. Это замечание обосновывает формулу (20).

Численный расчет функций $X(\lambda)$ и $\Psi(R)$ осуществляется по этапам: 1) рекуррентное решение уравнений (П1), (П2); 2) вычисление константы C из условия (19); 3) определение X по формуле (17); 4) определение Ψ посредством обратного преобразования Фурье от функции X.

Список литературы

[1] *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 511 с.

[2] Некоторые вопросы кинетической теории газов. М.: Мир, 1965. 270 с.

[3] *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.

[4] *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М. Мир, 1976. 554 с.

[5] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978. 495 с.

[6] *Динариев О.Ю.* // ЖЭТФ. 1994. Т. 106. Вып. 1 (7). С. 161–171.

[7] *Динариев О.Ю.* // Изв. вузов Физика. 1995. № 2. С. 95–99.

[8] *Климонтович Ю.Л.*// Теор. и мат. физ. 1992. Т. 92 № 2. С. 312–330.

[9] *Климонтович Ю.Л.*// Теор. и мат. физ. 1993. Т. 96 № 3. С. 385–416.

[10] *Борман В.Д., Крылов С.Ю., Просянов А.В., Харитонов А.М.* // ЖЭТФ. 1986. Т. 90. Вып. 1. С. 76–99.

[11] *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 331 с.

[12] *Шапиро А.А.* // ДАН СССР. 1992. Т. 322. № 3. С. 86–90.

[13] *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теории представлений групп. М.: Наука, 1991. 576 с.

[14] *Динариев О.Ю., Николаев О.В.* // ДАН АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 31–36.

[15] *Шапиро А.А.* // Теор. основы хим. технологии. 1993. Т. 27. № 2. С. 155–163.

[16] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.