1996 JOURNAL OF TECHNICAL PHYSICS Vol. 66, N 2

01;10

ТЕОРИЯ ФОКУСИРОВКИ УДАЛЕННЫХ ОТ ОСИ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЯХ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

© *Е.М.Якушев*

Институт ядерной физики АН Казахстана,
480082 Алма-Ата, Казахстан
(Поступило в Редакцию 10 января 1995 г.)

Построен математический аппарат теории фокусировки, описывающий формирование электронно-оптических изображений в осесимметричных электростатических полях удаленными от оси вращения потоками заряженных частиц. Найдено новое уравнение фокусировки, обладающее следующим замечательным свойством: его решение точно описывает центральную траекторию и одновременно в первом приближении пространственную структуру всего потока частиц и структуру изображения. Выведены выражения для коэффициентов сферической и хроматической аберраций. Показано, что в приосевой области построенный аппарат теории фокусировки переходит в известный аппарат оптики параксиальных лучей. Определен широкий класс осесимметричных электростатических полей с общим признаком равенства нулю коэффициента сферической аберрации. Развитая теория может быть использована для синтеза новых дисперсионных и фокусирующих систем.

Рассмотрим движение заряженных частиц в гармонических электростатических полях с осевой симметрией. Известно, что такие поля формируют правильное электроннооптическое изображение приосевыми пучками заряженных частиц и математический формализм, описывающий свойства такой фокусировки, хорошо разработан и широко используется для решения многообразных практических задач. Вместе с тем правильное электронно-оптическое изображение может быть сформировано также и удаленными от оси пучками, когда частицы вылетают из каждой точки объекта под большими углами к оси и после отклонения в поле снова возвращаются к этой оси, образуя электронно-оптическое изображение объекта. Очевидно, что такие системы обладают большей светосилой и могут найти многообразные практические применения. Однако электронно-оптическая теория такой фокусировки до сих пор не разработана. Проблема состоит в необходимости введения в общем виде дополнительных ограничений на распределение поля в пространстве (кроме осевой симметрии), при выполнении которых обеспечивается точечная фокусировка, по крайней мере первого порядка.

Будем считать, что в цилиндрической системе координат r, ψ, z электрическое поле задано скалярным потенциалом $\varphi = \varphi(r, z)$, удовлетворяющим уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

а траектории потока изоэнергетических частиц в меридиональных плоскостях ($\psi = \text{const}$) подчинены известному уравнению

$$\frac{2\varphi r''}{1+r'^2} + r'\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем штрихами отмечено дифференцирование по координате z. Введем обозначение

$$u = \frac{\varphi}{1+r'^2}. \tag{3}$$

Тогда можно написать два уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = u', \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 2\sqrt{u}\left(\sqrt{u}\,r'\right)', \tag{5}$$

каждое из которых эквивалентно точному уравнению (2).

Отметим, что использование этих уравнений совместно с уравнением поля (1) дает возможность при заданных функциях $u(z)$ и $r(z)$ рассчитать распределение поля в пространстве. В частности, равенства (4) и (5) позволяют выразить все частные производные от потенциала через функции u и r и их полные производные. Так, продифференцировав уравнения (4) и (5), получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + r'\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} = u'',$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} + r'\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 2\left[\sqrt{u}\left(\sqrt{u}\,r'\right)'\right]'.$$

Далее, используя равенства (1) и (5), найдем частные производные второго порядка от потенциала через функции u и r

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial z} = \frac{r'}{1+r'^2}\left[u'' + \frac{2}{rr'}\left(r\sqrt{u}\left(r'\sqrt{u}\right)'\right)'\right] = A, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{1+r'^2}\left[u'' - 2r'\left(\sqrt{u}\left(\sqrt{u}\,r'\right)'\right)' + \frac{2\sqrt{u}}{r}\left(\sqrt{u}\,r'\right)'\right] = B. \tag{7}$$

Аналогично могут быть найдены выражения для частных производных от φ третьего и более высоких порядков. В частности,

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^2\partial z} = \frac{r'}{1+r'^2}\left[A' + \frac{1}{rr'}\Big(Br'\Big)' - \frac{2}{r^2}\sqrt{u}\Big(\sqrt{u}\,r'\Big)'\right] = C. \tag{8}$$

Указанное обстоятельство позволяет существенно продвинуть теорию фокусировки удаленных от оси z потоков заряженных частиц.

Выберем одну из траекторий потока $r = r(z)$ в качестве центральной траектории. Любую другую, соседнюю с ней траекторию $r^* = r^*(z)$ будем описывать ее отклонением $\rho = \rho(z)$ от центральной траектории $r^* = r + \rho$. Тогда на основании равенства (4) можно записать точное уравнение для любой траектории в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z,\, r+\rho) = \left[\frac{\varphi(z,\, r+\rho)}{1+(r'+\rho')^2}\right]'. \tag{9}$$

Далее будем поступать так же, как это обычно делается при построении теории фокусировки электронно-оптических систем с искривленной оптической осью. Разложим точное уравнение (9) в ряд по степеням величин ρ и ρ', считая их малыми. Отличие будет состоять только в том, что в разложениях

$$\varphi(z,\, r+\rho) = \varphi + \rho\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \ldots,$$

$$\frac{\partial\varphi(z,\, r+\rho)}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z} + \frac{1}{2}\rho^2\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^2\partial z} + \ldots$$

все частные производные от потенциала представим их выражениями через функции u и r, как указано выше. Тогда после ряда преобразований уравнение траекторий с точностью до величин второго порядка малости удается привести к виду

$$\left[\frac{r^2\sqrt{u}}{1+r'^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right]' + \frac{4urr''\left(1+rr''\right) + \left(u'r^2\left(1+r'^2\right)\right)'}{2r\sqrt{u}\left(1+r'^2\right)^2}\rho = \frac{r}{2r'\sqrt{u}}Q, \tag{10}$$

где

$$Q = \left[u\left(\frac{B\rho^2}{2u\left(1+r'^2\right)} + \frac{3r'^2-1}{\left(1+r'^2\right)^2}\rho'^2 - \frac{2\left(ur'^2\right)'}{u\left(1+r'^2\right)^2}\rho\rho'\right)\right]' - \frac{1}{2}C\rho^2. \tag{11}$$

Рассмотрим сначала фокусирующие свойства осесимметричного поля в первом приближении. Для этого в равенстве (10) ограничимся величинами первого порядка малости относительно ρ и ρ', положив $Q = 0$. Тогда траектории частиц описываются линейным однородным по отношению к функции ρ дифференциальным уравнением второго порядка

$$\left[\frac{r^2\sqrt{u}}{1+r'^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right]' + \frac{4urr''(1+rr'') + \left(u'r^2\left(1+r'^2\right)\right)'}{2r\sqrt{u}\left(1+r'^2\right)^2}\rho = 0. \qquad (12)$$

До сих пор мы не налагали никаких ограничений на структуру электрического поля, кроме вращательной симметрии и выполнения уравнения Лапласа. Теперь есть возможность в неявной форме учесть дополнительные ограничения, при которых обеспечивается фокусировка "ось–ось" первого порядка пучка заряженных частиц. Как следует из уравнения (12), для достижения такой фокусировки достаточно положить, что r и u связаны между собой уравнением

$$4urr''\Big(1+rr''\Big) + \left[u'r^2\left(1+r'^2\right)\right]' = 0. \qquad (13)$$

Покажем это. Пусть функция $r = r(z)$ удовлетворяет уравнению (13). Тогда линейное уравнение первого порядка (12) принимает простую интегрируемую форму

$$\left[\frac{r^2\sqrt{u}}{1+r'^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)'\right]' = 0, \qquad (14)$$

причем решение уравнения (13) $r = r(z)$ является также и одним из частных решений $\rho_1 = r(z)$ линейного уравнения (14). Второе линейно независимое решение уравнения (14) $\rho_2 = q(z)$ может быть выражено через то же решение $r = r(z)$ в виде квадратуры

$$q(z) = r\int\limits_{z_k}^{z}\frac{1+r'^2}{r^2\sqrt{u}}\,dz,$$

где значение z_k — произвольно.

Общее решение линейного уравнения (14) может быть записано в виде

$$\rho = \alpha r + \beta q. \qquad (15)$$

Здесь α и β — произвольные постоянные, определяемые начальными условиями. Положим, что центральная траектория дважды пересекает ось симметрии поля $r(z_0) = r(z_1) = 0$, $z_0 \neq z_1$. Предметную плоскость будем считать совмещенной с плоскостью $z = z_0$. Обозначим в этой плоскости $\rho(z_0) = \rho_0$, $\rho'(z_0) = \rho_0$. Тогда после раскрытия неопределенности в выражении для $q(z_0)$

$$q(z_0) = \lim_{z\to z_0}\left(r\int\limits_{z_k}^{z}\frac{1+r'^2}{r^2\sqrt{u}}\,dz\right) = -\frac{1+{r'_0}^2}{r'_0\sqrt{u_0}}$$

на основании равенств (15) найдем

$$\alpha = \frac{\rho_0'}{r_0'} + \frac{q_0'\sqrt{u_0}}{1 + {r_0'}^2}\,\rho_0, \qquad \beta = -\frac{r_0'\sqrt{u_0}}{1 + {r_0'}^2}\,\rho_0. \tag{16}$$

Равенства (15), (16) определяют структуру потока частиц в произвольной плоскости $z = \mathrm{const}$ в зависимости от множеств значений ρ_0, ρ_0'. Рассмотрим структуру этого потока в плоскости $z = z_1$, которая проходит через вторую точку пересечения центральной траектории с осью z $\left(r(z_1) = 0\right)$. Координаты пересечения потока частиц с этой плоскостью $\rho(z_1) = \rho_1$ зависят только от координат вылета частиц из предметной плоскости ρ_0 и не зависят от величины ρ_0', т.е. между плоскостями $z = z_0$ и $z = z_1$ имеет место строгое точечное соответствие. Это означает, что поле по отношению к потоку изоэнергетических частиц представляет собой электронно-оптическую систему, подобную электронной линзе, формирующую в плоскости $z = z_1$ в окрестности оси z действительное правильное электронно-оптическое изображение предмета, расположенного в плоскости $z = z_0$. Угловое и линейное увеличения системы соответственно равны

$$\Gamma = \frac{\rho_1'}{\rho_0'} = \frac{r_1'}{r_0'}, \qquad M = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{r_0'\left(1 + {r_1'}^2\right)}{r_1'\left(1 + {r_0'}^2\right)}\sqrt{\frac{u_0}{u_1}}. \tag{17}$$

Таким образом, выполнение уравнения (13) действительно является достаточным для реализации точечной фокусировки в окрестности оси z удаленных от этой оси потоков заряженных частиц. Кроме центральной траектории решение уравнения (13) $r = r(z)$ определяет в первом приближении структуру всего потока частиц и структуру изображения, угловое и линейное увеличение системы. Поэтому можно считать, что уравнение (13) представляет собой уравнение фокусировки, обобщенное на случай удаленных от оси потоков. В предельном случае при $rr'' \ll 1$, ${r'}^2 \ll 1$ из точного уравнения (13) непосредственно следует хорошо известное уравнение электронных линз

$$4ur'' + 2u'r' + u''r = 0, \tag{18}$$

описывающее фокусирующие свойства осесимметричных полей в параксиальной области.

Перейдем теперь к рассмотрению аберраций. В этой работе мы ограничимся изучением только основных видов аберраций — сферической и хроматической, определяющих размытие изображения центральной точки объекта. Для того чтобы получить уравнение для определения сферической аберрации с точностью до величин второго порядка малости относительно ρ и ρ', достаточно в правую часть уравнения (10) подставить вместо ρ частное решение $\rho = \rho_\alpha$ уравнения первого порядка, пересекающее предметную плоскость $z = z_0$ в ее центральной точке ($\rho_0 = 0$). Согласно равенствам (15) и (16), получим

$$\rho_\alpha = \frac{\rho_0'}{r_0'}\,r. \tag{19}$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде

$$\rho = \frac{\rho_0'}{r_0'} r + \delta, \tag{20}$$

где δ — величина второго порядка малости, определяющая сферическую аберрацию, причем в предметной плоскости $z = z_0$ следует положить

$$\delta_0 = 0, \qquad \delta_0' = 0. \tag{21}$$

Тогда, принимая во внимание равенства (11), (13), (14) и (19), на основании уравнения (10) получим уравнение для определения величины сферической аберрации

$$\left[\frac{r^2\sqrt{u}}{1 + r'^2}\left(\frac{\delta}{r}\right)'\right]' = \frac{{\rho_0'}^2 r Q^*}{2{r_0'}^2 r' \sqrt{u}}, \tag{22}$$

где

$$Q^* = \left[u\left(\frac{Br^2}{2u(1 + r'^2)} + \frac{(3r'^2 - 1)}{(1 + r'^2)^2} r'^2 - 2\frac{rr'\left(ur'^2\right)'}{u\left(1 + r'^2\right)^2}\right)\right]' - \frac{1}{2} Cr^2. \tag{23}$$

Уравнение (22) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Сферическая аберрация определяется его частным решением, удовлетворяющим начальным условиям (21). Будем считать, что предмет и его изображение расположены в свободном от поля пространстве. Тогда, непосредственно интегрируя уравнение (22), получим

$$\delta = \frac{{\rho_0'}^2}{2{r_0'}^2} r \int\limits_{z_0}^{z} \left(\frac{1 + r'^2}{r^2\sqrt{u}} \int\limits_{z_0}^{z} \frac{rQ^* dz}{r'\sqrt{u}}\right) dz. \tag{24}$$

Это равенство определяет величину δ в произвольной плоскости $z = \text{const}$. Для того чтобы найти на основании этого выражения величину поперечной сферической аберрации $\delta_\perp$ в плоскости изображений $z = z_1$, следует раскрыть в равенстве (24) неопределенность типа $0 \cdot \infty$, возникающую при $z \to z_1$. Выполнив эту процедуру, получим

$$\delta_\perp = MC_s r_0' {\rho_0'}^2, \tag{25}$$

где C_s — постоянная сферической аберрации, равная

$$C_s = -\frac{1 + {r_0'}^2}{2{r_0'}^4\sqrt{u_0}} \int\limits_{z_0}^{z_1} \frac{rQ^*}{r'\sqrt{u}} dz. \tag{26}$$

При этом величина продольной сферической аберрации $\delta_{\|}$, характеризующая связанное с разбросом величин ρ_0' смещение плоскости изображения в z-направлении, будет равна

$$\delta_{\|} = \frac{M}{\Gamma} C_s \rho_0'^2. \tag{27}$$

Дальнейшие преобразования направлены на упрощение подынтегрального выражения в равенстве (26) с целью понижения порядка производных от функций r и u, входящих, согласно равенствам (6)–(8), в выражение (23) для Q^*. Возможности такого упрощения связаны с двумя обстоятельствами: во-первых, функции r и u подчинены уравнению фокусировки (13), во-вторых, плоскости объекта и изображения, определяемые равенствами $r(z_0) = r(z_1) = 0$, расположены в свободном от поля пространстве. Учет этих обстоятельств предоставляет широкие возможности преобразования подынтегрального выражения путем интегрирования по частям входящих в него отдельных функций с использованием уравнения фокусировки. При этом все внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям на обеих концах промежутка интегрирования (при $z = z_0$ и $z = z_1$), обращаются в нуль вследствие их пропорциональности какой-либо из величин $r, r'', r''', \ldots$ или $u', u'', u''', \ldots$. Здесь мы опустим детальное описание этих чрезвычайно громоздких преобразований. Отметим только, что при их выполнении следует выделить отдельные безразмерные структурные элементы

$$x = rr'', \qquad y = \frac{1}{2}\frac{u'r}{ur'}, \qquad \tau = 1 + r'^2, \tag{28}$$

входящие в соответствующие подынтегральные выражения (самостоятельно или в виде производных) и выполнить указанные преобразования с учетом того, что уравнение фокусировки (13) в переменных (28) имеет вид

$$2\Big(\tau(\tau-1)\Big)x\frac{dy}{d\tau} + \tau(\tau-1)(1+2y)y + (3\tau-2)xy + 2x(1+x) = 0. \tag{29}$$

Этим путем выражение для постоянной сферической аберрации удается привести к виду

$$C_s = \frac{2\left(1+r_0'^2\right)}{r_0'^4\sqrt{u_0}} \int\limits_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{u}}{\tau^4}\left[x^3 + \left(4 - 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + 4(\tau-1)y\right)x^2 + \right.$$

$$\left. + \tau(\tau-1)(\tau-2+y)xy + \frac{1}{4}\tau^2(\tau-1)^2y^2\right]dz. \tag{30}$$

Таким образом, подынтегральное выражение принимает очень простую структуру — полином третьей степени относительно величины $x = rr''$, коэффициенты которого определяются величинами $\tau = 1 + r'^2$ и

$$y = \frac{1}{2}\frac{u'r}{ur'}.$$

То обстоятельство, что функция y содержит в знаменателе r', не вызывает особенностей при $r' \to 0$ ввиду наличия множителя $(\tau - 1)$.

Выведенное выражение (30) определяет величину сферической аберрации, возникающей при формировании электронно-оптических изображений в электростатических полях с симметрией вращения. Оно свободно от требования малости r и r' и потому является обобщением известных формул для постоянной сферической аберрации C_{s0}, определяющей поперечную и продольную сферическую аберрацию в приосевой области

$$\delta_\perp = MC_{s0}\gamma^3 \quad \text{и} \quad \delta_\parallel = \frac{M}{\Gamma}C_{s0}\gamma^2,$$

где γ — малый угол между крайними лучами пучка и осью z в начальной точке, M и Γ — линейное и угловое увеличения.

Покажем, что обобщенная формула (30) при переходе в параксиальную область действительно переходит в известное выражение для постоянной сферической аберрации электростатических электронных линз. Для этого заменим в подынтегральном выражении равенства (30) величины x, y, τ их значениями (28), внесем под интеграл величину ${r'_0}^4$ и введем обозначение

$$R = \frac{r}{r'_0}. \tag{31}$$

После этого, устремив $r \to 0$, мы легко приведем выражение (30) к виду

$$C_s = \frac{2}{\sqrt{u_0}} \int\limits_{z_0}^{z_1} \sqrt{u}\, R^2 \left[\frac{5}{2}R''^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 \left(RR'' + \frac{1}{4}R'^2\right) - \frac{1}{2}\,\frac{u'}{u}R'R''\right] dz. \tag{32}$$

Вследствие того что обобщенное уравнение фокусировки (13) переходит при $r \to 0$ в уравнение параксиальных траекторий (18), входящая в (32) величина R переходит в частное решение уравнения (18) с характерными начальными условиями $R_0 = 0$, $R'_0 = 1$ в предметной плоскости $z = z_0$. Полученное равенство (32) путем интегрирования по частям с использованием уравнения (18) можно привести к любому из известных выражений для постоянной сферической аберрации осесимметричных электростатических линз. В частности, для того чтобы получить выражение, приведенное в [1], следует из (32) исключить R'' на основании уравнения (18) и выполнить достаточно очевидные операции интегрирования по частям. Проделав указанные преобразования, получим

$$C_s = \frac{1}{16\sqrt{u_0}} \int\limits_{z_0}^{z_1} \sqrt{u} \left[\left(3\frac{u'^4}{u^4} - \frac{9}{2}\frac{u'^2}{u^2}\left(\frac{u'}{u}\right)' + 5\left(\frac{u'}{u}\right)'^2\right)R^4 + 4\frac{u'}{u}\left(\frac{u'}{u}\right)' R^3R'\right] dz,$$

что совпадает с выражением, приведенным в [1] с точностью до постоянного множителя ($C_s = 4C_{s0}$), так как в рассматриваемом предельном случае $\rho'_0 = (1/2)\gamma$.

Получим далее выражение для величины хроматической аберрации. Для этого в равенстве (9) вместо φ запишем $\varphi+\varepsilon$, где ε — малая величина, характеризующая разброс начальных энергий частиц. Положим, что для частицы, движущейся по центральной траектории, величина $\varepsilon = 0$. Выполним преобразования, аналогичные тем, которые были проведены при выводе равенства (22). Тогда для величины δ_ε, представляющей собой отклонение траектории произвольной частицы от центральной траектории, связанное с разбросом энергий, получим

$$\left[\frac{r^2\sqrt{u}}{1+r'^2}\left(\frac{\delta_\varepsilon}{r}\right)'\right]' = -\frac{\varepsilon r r''}{\left(1+r'^2\right)^2\sqrt{u}}. \tag{33}$$

Положим, что в предметной плоскости $\delta_\varepsilon = 0$, $\delta'_\varepsilon = 0$, и проинтегрируем уравнение (33) с этими начальными условиями. Тогда в плоскости изображения после раскрытия неопределенности найдем

$$\delta_{\varepsilon\perp} = MD\frac{\varepsilon}{\varphi_0}, \tag{34}$$

$$D = \frac{\left(1+r_0'^2\right)^2}{r_0'}\sqrt{u_0}\int\limits_{z_0}^{z_1}\frac{rr''dz}{\left(1+r'^2\right)^2\sqrt{u}}. \tag{35}$$

Здесь M — линейное увеличение системы, φ_0 — начальная энергия частиц. Таким образом, при больших углах отклонения изображение точки, образованное частицами разных энергий, будет состоять из ряда концентрических колец, радиусы которых пропорциональны ε/φ_0. Величина D, определяемая равенством (35), представляет собой коэффициент дисперсии системы. Благодаря значительной дисперсии и большой светосиле отклонение электронных пучков на большие углы в осесимметричных электростатических полях находит применение при создании высокоразрешающих электрических энергоанализаторов [2]. Развиваемый нами математический аппарат фокусировки открывает новые возможности повышения электронно-оптических параметров такого рода приборов. Дело в том, что до сих пор свойства фокусировки удаленных от оси потоков частиц хорошо изучены, лишь в тех исключительно редких случаях, когда одновременно и уравнения поля (1) и уравнения траекторий (2) допускают строгое аналитическое интегрирование. При этом, к сожалению, полевые структуры получаются такими, что в приосевой области (в местах, где должны быть расположены плоскости объекта и изображения) напряженность поля оказывается отличной от нуля. Это обстоятельство вынуждает при разработке реальных приборов специальным образом организовывать ввод (и вывод) пучка в отклоняющее поле. Для этого в одном из электродов соответствующим образом вырезаются окна, которые затем закрываются прозрачными мелкоструктурными металлическими сетками. Необходимость введения в поток анализируемых частиц мелкоструктурных сеток создает серьезные проблемы как технического, так и принципиального характера: влияние на потоки частиц микролинз, образованных ячейками сетки, деформации сеток, появление на них неуправляемых зарядов, например, вследствие загрязнения, возникновения вторичных частиц при облучении сеток и т.д. Развитая здесь теория не требует специальных условий для ввода и вывода пучка частиц, кроме его диафрагмирования с целью уменьшения начального углового разброса. Поэтому рассчитанные на ее основе приборы будут свободны от влияния указанных выше негативных эффектов.

То обстоятельство, что эта теория, как и теория электронных линз, опирается на общие свойства осесимметричных полей, а не на конкретные его частные случаи, предоставляет широкие возможности для синтеза новых электронно-оптических систем различных назначений. Причем при больших углах отклонения теория позволяет выделить класс электростатических осесимметричных полей с общим признаком $C_s = 0$, обеспечивающих пространственную фокусировку, свободную от сферической аберрации (поля с фокусировкой второго порядка). Это дает возможность выполнить поиск конкретных систем с требуемыми электронно-оптическими свойствами именно в этом классе полей.

Здесь мы ограничимся только тем, что определим класс полей с фокусировкой второго порядка. Для этого домножим левую часть уравнения фокусировки в формуле (29) на величину

$$\frac{\sqrt{u}}{\tau^4}F(\tau, y), \tag{36}$$

где F — произвольная функция указанных аргументов, и запишем определенный интеграл по промежутку $(z_1 - z_0)$ от полученного выражения. Далее, путем интегрирования по частям с последующим использованием уравнения фокусировки (29) избавимся в подынтегральном выражении от величин, пропорциональных $dy/d\tau$. Тогда получим следующее интегральное соотношение:

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} \frac{\sqrt{u}}{\tau^4}\Big\{2(F+yF_y)x^2+\Big[\Big(2+8(\tau-1)y\Big)F+\Big(2+(3\tau-2)y\Big)yF_y-2\tau(\tau-1)yF_\tau\Big]x+$$

$$+\tau(\tau-1)y^2\Big[F+(1+2y)F_y\Big]\Big\}dz = 0,$$

где $F_y = \partial F/\partial y$ и $F_\tau = \partial F/\partial \tau$.

Из сравнения этого соотношения с выражением для постоянной сферической аберрации (30) видно, что достаточным условием равенства $C_s = 0$ будет

$$x^3 + \left[4 - 2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + 4(\tau-1)y + 2F + 2yF_y\right]x^2 +$$

$$+\Big[2F+y\Big(\tau(\tau-1)(\tau-2+y)+8(\tau-1)F+\Big(2+(3\tau-2)y\Big)F_y-2\tau(\tau-1)F_\tau\Big)\Big]x+$$

$$+\tau(\tau-1)\left(\frac{1}{4}\tau(\tau-1) + F + (1+2y)F_y\right)y^2 = 0. \tag{37}$$

Отсюда следует, что класс осесимметричных электростатических полей с фокусировкой второго порядка определяется множеством функций $F(\tau, y)$, для которых система уравнений (29) и (37) допускает решение. Действительно, пусть $x = x(\tau)$ и $y = y(\tau)$ — решение системы уравнений (29), (37) для некоторой конкретной функции $F(\tau, y)$. Тогда вытекающие из соотношения (28) равенства

$$r = r_k \exp\Big(\int\limits_{\tau_k}^{\tau} \frac{d\tau}{2x}\Big), \qquad u = u_k \exp\Big(\int\limits_{\tau_k}^{\tau} \frac{y}{x}\, d\tau\Big),$$

$$z - z_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\tau_k}^{\tau} \frac{r d\tau}{x\sqrt{\tau - 1}} \tag{38}$$

(индексом k отмечены постоянные величины) описывают в параметрическом виде зависимости $u = u(z)$ и $r = r(z)$. Теперь, учитывая равенства (3)–(5), на основании уравнения Лапласа можно однозначно рассчитать распределение потенциала в пространстве, соответствующее заданной функции F. Таким образом, система уравнений (29), (37), содержащая произвольную функцию двух аргументов $F(\tau, y)$, действительно определяет класс электростатических полей с симметрией вращения, в которых обеспечивается точечная фокусировка второго порядка.

Список литературы

[1] *Кельман В.М., Явор С.Я.* // Электронная оптика. Л.: Наука, 1968. С. 245.

[2] *Афанасьев В.П., Явор С.Я.* Электростатические энергоанализаторы для пучков заряженных частиц. М.: Наука, 1978. 224 с.