

01;09

КОГЕРЕНТНЫЕ СТРУКТУРЫ В СВЯЗАННЫХ ЦЕПОЧКАХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

© Г.В.Осипов, М.М.Суцук

Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского,
603600 Нижний Новгород, Россия
(Поступило в Редакцию 18 января 1995 г.)

Рассматривается динамика системы двух взаимосвязанных цепочек, состоящих из автоколебательных элементов. Показано, что в цепочках с различным коллективным поведением возможно существование устойчивых стационарных локализованных структур. При сильной связи вдоль каждой цепочки происходит распространение с постоянной скоростью фронта переброса из одного асимптотического состояния в другое.

1. Все возрастающий интерес к исследованию динамики ансамблей нелинейных осцилляторов и автогенераторов обусловлен важностью этих исследований как для решения общих фундаментальных проблем нелинейной физики, в частности проблем образования структур и происхождения маломерного хаоса в многомерных системах [1], так и для анализа конкретных физических явлений. В частности, такие ансамбли при соответствующем выборе параметров описывают динамику цепочек, образуемых джозефсоновскими контактами [2,3], полупроводниковыми лазерами [4,5], релятивистскими магнетронами [6]. Решетки нелинейных осцилляторов используются также для моделирования генерации биологических ритмов сердца [7], нервной системы [7,8], кишечника [9], поджелудочной железы [10]. В ряде конкретных случаев физическая постановка задачи приводит к исследованию взаимодействия больших систем, каждая из которых представляет набор большого числа связанных осцилляторов [11]. В частности, слабосвязанные цепочки моделируют взаимодействия между двумя параллельными длинными джозефсоновскими контактами [12,13], границу между двумя полубесконечными цепочками атомов, абсорбированных на поверхности металла [14,15], взаимодействие возбуждений в упругих ферроэлектрических или ферромагнитных системах [16,17].

В случае автоколебательных систем интересным с физической точки зрения и пока наиболее важным с точки зрения приложений является феномен взаимной синхронизации в больших ансамблях, заклю-

сходящийся в том, что, несмотря на разброс собственных частот генераторов, все они генерируют колебания на одной частоте. Переход от генерации на разных частотах к одночастотному режиму происходит скачком при увеличении связи и напоминает фазовый переход второго рода в равновесных системах [18,19]. В случае, когда связь между генераторами не приводит к существенному изменению амплитуд автоколебаний, этот эффект может быть приближенно описан автономной системой уравнений для фаз автоколебаний [18-20]. Во многих теоретических исследованиях использовалось это приближение и здесь получено много интересных результатов. Вместе с тем выяснилось, что имеется ряд эффектов, также непосредственно связанных с синхронизацией, для анализа которых является принципиальным включение в рассмотрение уравнений для амплитуд. В частности, в цепочках автогенераторов с различающимися частотами при достаточно сильной диффузионной связи между ее элементами возможно существование локализованных структур или доменов с интенсивными взаимно синхронизованными колебаниями на общем фоне, где эти колебания отсутствуют или их интенсивность сравнительно мала [21,22]. Один из механизмов, благодаря которому возможно существование таких структур, связан с эффектом, именуемым "вымирание автоколебаний" ("oscillator death" или "amplitude death") [23-28], когда достаточно сильная диссипативная связь после срыва синхронизации становится эквивалентной дополнительному затуханию для каждого из взаимодействующих автоколебаний. Если имеются неоднородности частотных расстройек или существенно влияние концевых эффектов, то срыв синхронизации происходит локально, что и приводит к формированию фронтов и локализованных структур. В настоящей работе показано, что в двух связанных цепочках при наличии зависимости частоты автоколебаний от их амплитуды этот механизм может приводить к образованию локализованных структур даже в отсутствие концевых эффектов и неоднородности частотной расстройки вдоль цепочки. Отметим, что такие структуры могут служить простейшим примером "настоящих" когерентных структур, сама возможность существования которых обусловлена наличием взаимной синхронизации отдельных элементов.

2. Рассмотрение ведется на примере двух связанных цепочек автогенераторов, динамика которых в квазигармоническом приближении описывается уравнениями для медленно меняющихся комплексных амплитуд a_j и b_j

$$\dot{a}_j = (p + i\Delta)a_j - (1 + i\alpha)|a_j|^2 a_j + d(a_{j+1} - 2j + a_{j-1}) + c(b_j - a_j), \quad (1)$$

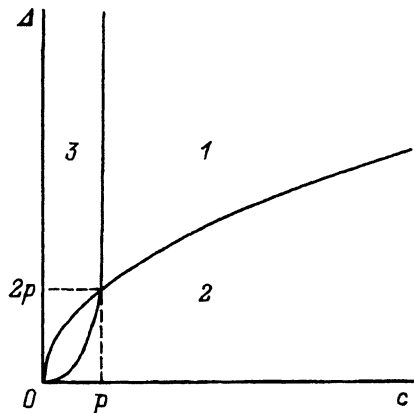
$$\dot{b}_j = pb_j - |b_j|^2 b_j + d(b_{j+1} - 2b_j + b_{j-1}) + c(a_j - b), \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2)$$

с граничными условиями $a_0 = a_1$, $a_{N+1} = a_N$, $b_0 = b_1$, $b_{N+1} = b_N$.

Здесь зависимые переменные $a_j = |a_j| \exp(i\varphi_j)$ и $b_j = |b_j| \exp(i\psi_j)$ характеризуют амплитуды и фазы квазигармонических колебаний $X_j(t)$ и $Y_j(t)$ в обеих цепочках $\{X_j = a_j(\tau) \exp(it) + a_j^*(\tau) \exp(-it); Y_j = b_j(\tau) \exp(it) + b_j^*(\tau) \exp(-it)\}$, точкой обозначена производная по медленному времени $\tau = (1/2)\epsilon t$; Δ и α описывают линейную и нелинейную расстройку частот генераторов; p — инкремент, d — коэффициент связи между элементами в цепочках, c — коэффициент связи между цепочками (здесь мы ограничиваемся случаем чисто активных связей $d = |d|$,

Рис. 1. Бифуркационная диаграмма системы (1), (2) при $\alpha = 0$ в приближении "однородных в пространстве" ($a_j = a$; $b_j = b$) решений.

1 — область устойчивости тривиального равновесия (область вымирания автоколебаний), 2 — область взаимной синхронизации автоколебаний, 3 — область несинхронизованных автоколебаний.



$c = |c|$). Малый параметр ε характеризует близость колебаний в рассматриваемых автогенераторах к гармоническим. В данном конкретном случае прототипом являлись цепочки генераторов Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2}{dt^2} X_j + \left(1 + \varepsilon \Delta - \frac{\varepsilon}{3} \alpha X_j^2\right) X_j = \varepsilon(p - X_j^2) \frac{d}{dt} X_j + \varepsilon \frac{d}{dt} \left[c(Y_j - X_j) + d(X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) \right], \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} Y_j + Y_j = \varepsilon(p - Y_j^2) \frac{dY_j}{dt} + \varepsilon \frac{d}{dt} \left[c(X_j - Y_j) + d(Y_{j+1} - 2Y_j + Y_{j-1}) \right] \quad (4)$$

с граничными условиями $X_0 = X_1$, $X_{N+1} = X_N$, $Y_0 = Y_1$, $Y_{N+1} = Y_N$.

Хотя подробно исследовалась лишь система амплитудных уравнений (1), (2), контрольные расчеты показали, что система (3), (4) имеет подмножество решений, качественно совпадающих с решениями амплитудных уравнений (1), (2) вплоть до $\varepsilon \sim 1$.

3. Для качественного анализа режимов, наблюдавшихся в численных решениях для длинных цепочек, воспользуемся бифуркационной диаграммой для однородных ($a_j = a$, $b_j = b$) решений при $\alpha = 0$, которая совпадает с диаграммой для двух связанных генераторов и схематично представлена на рис. 1. В зависимости от качественных свойств решений на диаграмме можно выделить три основные области (см., например, [27]): 1) область "вымирания" автоколебаний, в которой устойчивым является тривиальное решение (напомним, что здесь везде речь идет о случае, когда для изолированных генераторов ($c = 0$, $d = 0$) выполнены условия самовозбуждения $p > 0$); 2) область синхронизации $\varphi = \psi$; 3) область несинхронизованных колебаний $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}(\varphi - \psi) \neq 0$.

Пусть теперь в одном из генераторов имеется нелинейный сдвиг частоты ($\sim \alpha|a|^2 a$), способный скомпенсировать линейную расстройку Δ . Для колебаний с конечной амплитудой это соответствует (в гру-

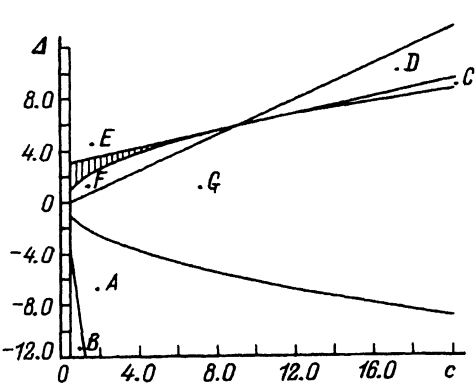


Рис. 2. Область существования различных типов решений, соответствующие условиям (5), (6) при $p = 0.5$, $\alpha = 5.75$. Область, соответствующая существованию тривиальных и нетривиальных решений, заштрихована. Точки — параметры Δ и c , при которых устойчивость по отношению к конечным возмущениям определялась при $d = 0.05$ численным счетом при начальных условиях

$$a_j^2 = b_j^2 = \begin{cases} 0.01 & j = 1, \dots, 50, \\ a^2 & j = 51, \dots, 78, \\ 0.01 & j = 79, \dots, 128, \end{cases}$$

где $a^2 = 0.5, 0.7, 2.0$.

бом приближении) смещению вниз на рис. 1, при

$$4c^2 - 4(c-p)^2 < \Delta^2 < 4c^2 - 4(c-p)^2 + \left[\frac{1}{2} \Delta \alpha - 2(c-p) \right]^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right)^{-1}, \quad (5)$$

$$\Delta \alpha - 4(c-p) > 0 \quad (6)$$

появляются еще два нетривиальных состояния равновесия для амплитуд

$$\begin{aligned} |a_{1,2}^{(0)}|^2 = |b_{1,2}^{(0)}|^2 = & \left\{ \Delta \alpha - 4(c-p) \pm \right. \\ & \left. \pm \sqrt{[\Delta \alpha - 4(c-p)]^2 - 16 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} \right) [\Delta^2/4 - c^2 - (c-p)^2]} \right\} \{ 4(1 + \alpha^2/4) \}^{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2 для однородных решений представлено соответствующее условиям (5), (6) разбиение плоскости параметров частотной расстройки Δ и величины связи между цепочками c при значениях инкремента $p = 0.5$ и коэффициента нелинейной частотной расстройки $\alpha = 5.75$ в интересующей нас области $p - c < 0$. Проведенные выборочные расчеты (точки на рис. 2) при этих значениях параметров, $d = 0.05$ и при различных начальных условиях продемонстрировали наличие на плоскости (Δ, c) областей, в которых наблюдаются однородные состояния с нулевыми (вне параболы) и с ненулевыми (внутри параболы) амплитудами, устойчивые по отношению к конечным (что существенно) возмущениям. Кроме того, имеется область (заштрихована), где оба такие состояния являются устойчивыми. Естественно ожидать, что при определенных ограничениях на величину связи в цепочках эти состояния могут сосуществовать, формируя стационарные фронты и локализованные структуры. Приведенные ниже численные решения подтверждают этот вывод.

4. Пространственно-временные диаграммы на рис. 3 иллюстрируют переходные процессы при задании в начальный момент распределения амплитуд в элементах цепочки в виде ступеньки. В пределе очень сильной связи внутри цепочки ($d \sim 1$) превалирующим является режим вымирания автоколебаний ($|a_j| = |b_j| = 0$) и область, в которой он реализуется, расширяясь, захватывает всю цепочку.

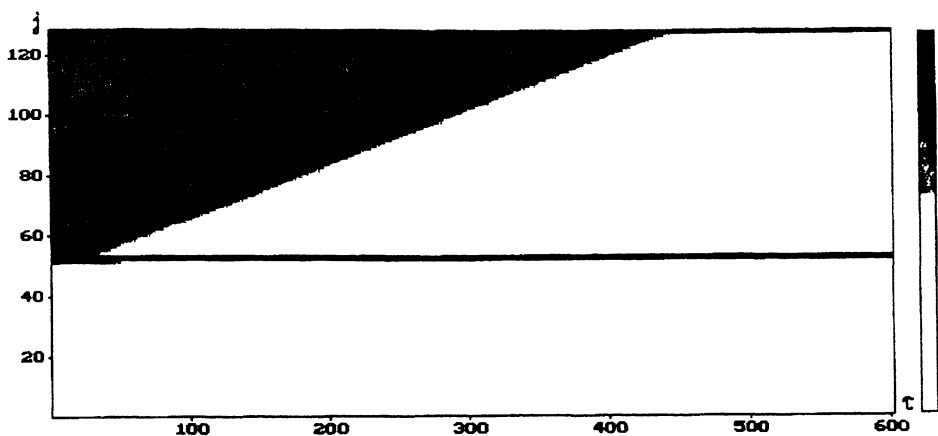


Рис. 3. Пространственно-временное распределение интенсивности колебаний $|a_j|^2$ в ходе формирования стационарных структур в системе (1), (2) при $\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $p = 0.5$, $d = 0.1$, $c = 0.51$.

Начальные условия

$$a_j^2 = b_j^2 = \begin{cases} 0 & j = 1, \dots, 50, \\ 0.72 & j = 51, \dots, 128. \end{cases}$$

Здесь и далее черные области соответствуют максимуму интенсивности; по горизонтали отложено время, а по вертикали — номер элемента.

Для цепочек, состоящих из конечного, но достаточно большого числа элементов, удается выделить три основных этапа этого процесса: начальный, промежуточный и конечный. Первый и третий из них зависят от начальных и граничных условий, а в промежуточном по пространственно-временным диаграммам, аналогичным приведенной на рис. 3, можно оценить среднее время между вымиранием автоколебаний на соседних элементах цепочки и определить эффективную среднюю скорость v распространения фронта вымирания автоколебаний. Хотя вблизи критического значения $d_{cr} \approx 0.9$ одновременно с усложнением формирующихся структур усложняется как сам переходный процесс, так и влияние на него начальных условий, для некоторых реализаций (т. е. при определенном выборе начальных условий) и в этом случае удастся определить величину скорости v . Ее значения практически не изменялись в диапазоне $c = 0.5-1.0$ и при $d > d_{cr}$ имели характерную для критических явлений корневую зависимость от параметра связи $v \approx 0.92\sqrt{d} - 0.09$ (рис. 4). Следует отметить, что отклонение от корневой зависимости и скачкообразный переход от нулевых

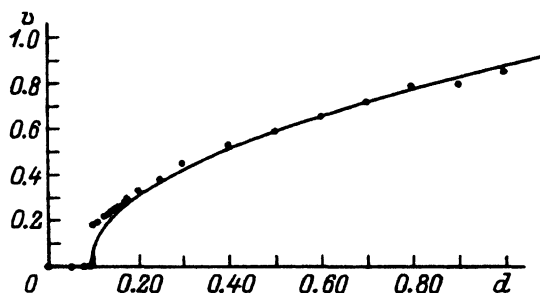


Рис. 4. Скорость фронта v перехода от возбужденного к невозбужденному состоянию как функция коэффициента связи между элементами цепочек ($\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $c = 0.51$).

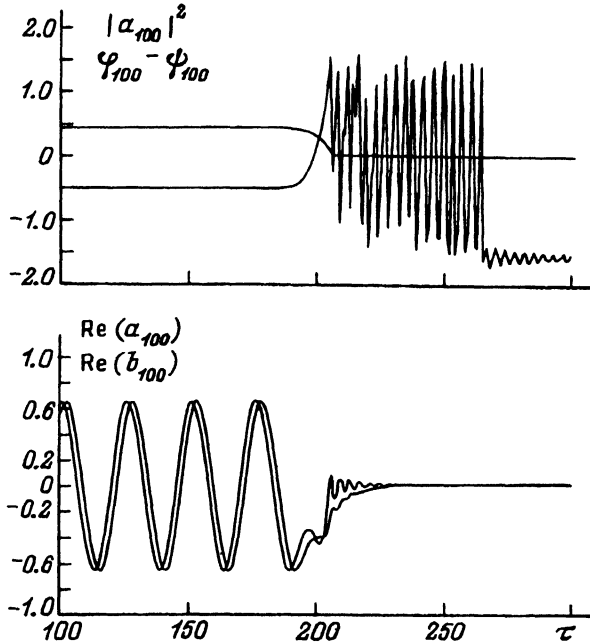


Рис. 5. Зависимость интенсивности колебаний ($|\alpha_{100}|^2$), разности фаз ($\varphi_{100} - \psi_{100}$) и действительных частей комплексных амплитуд a_{100} и b_{100} на 100-м осцилляторе цепочки при его переходе в тривиальное состояние равновесия $a_j = b_j = 0$ ($\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $p = 0.5$, $c = 0.51$, $d = 0.15$).

скоростей к ненулевым при отличных от нуля значениях коэффициентов связи d внутри цепочек обнаруживается только в дискретных моделях. Уравнения в частных производных для комплексных амплитуд предсказывают плавный переход с $d_{cr} = 0$.

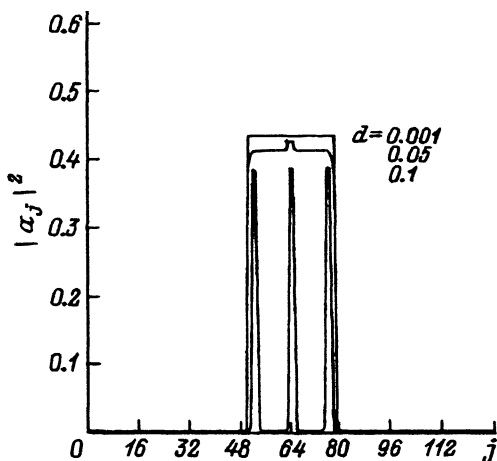
Более тщательное рассмотрение переходных процессов на границе областей с двумя разными состояниями позволяет непосредственно убедиться, что переход в невозбужденное состояние действительно определяется процессами десинхронизации. Для иллюстрации этого на рис. 5 представлены осциллограммы действительных и мнимых частей комплексных амплитуд a_j и b_j на одном из элементов ($j = 100$) в каждой из цепочек при прохождении фронта. Видно, что затуханию колебаний предшествует резкое изменение разности фаз $\varphi - \psi$ с последующим образованием в цепочках колебаний с различающимися частотами, близкими к соответствующим собственным частотам ($\Omega_a \sim \Delta$, $\Omega_b \sim 0$) изолированных цепочек.

В общем случае при $d < d_{cr}$ в зависимости от начальных условий может быть сформировано достаточно сложное распределение устойчивых структур, различающихся как числом образующих элементов, так и характером временного поведения.

На рис. 6 представлены структуры, которые формируются при задании в начальный момент локализованных колебаний $a_j = b_j = |a|$ с амплитудами, определенными согласно соотношениям (5), (6). В случае слабой связи ($d \ll d_{cr}$) генераторов внутри цепочек распределения начальных и установившихся амплитуд практически совпадают.

Рис. 6. Стационарные структуры системы (1), (2) с параметрами $\Delta = 2.0$, $\alpha = 5.75$, $p = 0.5$, $c = 0.51$ и $d = 0.001, 0.05, 0.1$, реализующиеся при начальных условиях

$$a_j^2 = b_j^2 = \begin{cases} 0 & j = 1, \dots, 50, \\ 0.434 & j = 51, \dots, 78, \\ 0 & j = 79, \dots, 128. \end{cases}$$



С ростом d сказывается влияние связи с невозбужденными генераторами и амплитуда $|a_j|$ и, следовательно, нелинейный сдвиг фаз, определяемый слагаемым $\alpha|a_j|^2 a_j$, становятся зависящими от положения в цепочке. При $d \approx d_{\text{кр}}$ этот сдвиг возрастает настолько, что приводит к локальному срыву синхронизации и образованию более мелких структур. Вблизи этого критического значения результирующее распределение амплитуд существенно зависит от величины связи и величины начального значения амплитуды.

Простейшие из структур, такие как на рис. 6, состоят из небольшого числа элементов, так что их собственная динамика и взаимодействие могут быть исследованы полностью, по крайней мере численно. Эта задача представляет самостоятельный интерес и выходит за

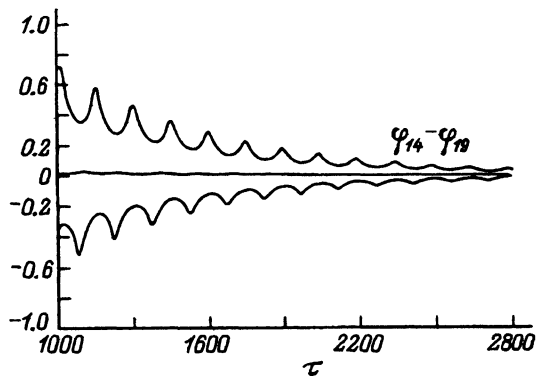


Рис. 7. Установление синфазного режима синхронизации при разных начальных условиях в двух уединенных структурах (I при $j = 13, 14$ и II при $j = 19, 20$), разделенных структурой III при $j = 16, 17$ для цепочек с параметрами $N = 32$, $p = 1.0$, $\alpha = 8.0$, $c = 2.0$, $d = 0.15$ и

$$\Delta_j = \begin{cases} 6.0 & \text{при } j = 1, \dots, 15 \text{ и } j = 18, \dots, 32, \\ 5.9 & \text{при } j = 16, 17. \end{cases}$$

рамки настоящей работы. Здесь мы лишь отметим наблюдавшийся нами интересный эффект взаимной синфазной синхронизации двух единичных одностипных структур (I при $j = 13, 14$ и III при $j = 19, 20$ на рис. 7). Вне зависимости от начального значения разность фаз автоколебаний этих структур $\varphi_I - \varphi_{III}$ стремилась к одному и тому же значению $\Delta\varphi$ при $t \rightarrow \infty$. Этот факт и само значение $\Delta\varphi = 0$ не зависели от отсутствия или наличия структуры II при $j = 16, 17$, если ее частота существенно отличалась и была несоизмерима с частотой взаимно синхронизирующихся структур I и III (например, из-за локальной неоднородности в цепочке). Это похоже на эффект так называемой косвенной синхронизации, наблюдавшийся для трех связанных осцилляторов [11]. Возможное объяснение синхронизации структур I и III состоит в том, что при достаточно малом d нерезонансное взаимодействие структур I и III с II является неэффективным из-за сравнительно большого различия частот, в то время как влияние связи даже между более удаленными, но резонансно взаимодействующими структурами I и III ($\omega_I = \omega_{III}$) оказывается существенной и достаточной для синхронизации и разность фаз $\varphi_I - \varphi_{III}$ в установившемся режиме не зависит от ее начального значения. Исследование сохранения синхронизации как между элементами, так и группами элементов в пространственно распределенных сложных структурах при образовании на той же решетке новых структур представляет интерес с точки зрения моделирования процессов распознавания и запоминания пространственных образов в коре головного мозга [11,29].

5. В случае невзаимной связи между цепочками (для его описания в уравнениях (1) и (2) следует заменить c на c_1 и c_2 соответственно) в предположении однородной структуры колебаний ($a_j = a$, $b_j = b$) наряду с режимами синхронизации и вымирания возможны также устойчивые режимы биений и несинхронизованных колебаний. При достаточно слабой связи d между элементами цепочек формируются кластеры осцилляторов, находящихся в одном из этих режимов в зависимости от начальных условий. Когда один из конкурирующих режимов является синхронизованным, а второй нет, в системе могут формироваться существенно нестационарные структуры, что приводит к специфическому режиму турбулентности, именуемому пространственно-временной перемежаемостью (рис. 8). В этом случае распространение фронта хаотизируется нестационарной динамикой доменов, приводя к процессу, подобному направленной перколяции [30].

С ростом связи d между элементами выживают (как и в случае симметричной связи между цепочками) лишь структуры, объединяющие небольшое число осцилляторов с интенсивными колебаниями. При малой несимметрии связи между цепочками интенсивные автоколебания возбуждаются в изолированных группах автогенераторов и имеют вид коротких пугов. Положение в цепочке и во времени таких локализованных возбуждений является случайным. С ростом несимметрии связи средняя плотность и частота следования пугов возрастает и происходит переход от перемежающихся в пространстве и времени автоколебаний к развитой турбулентности (рис. 9).

6. Рассмотренный выше механизм формирования локализованных структур может представлять интерес как для прикладных задач, так и для более глубокого понимания происхождения маломерного хаоса

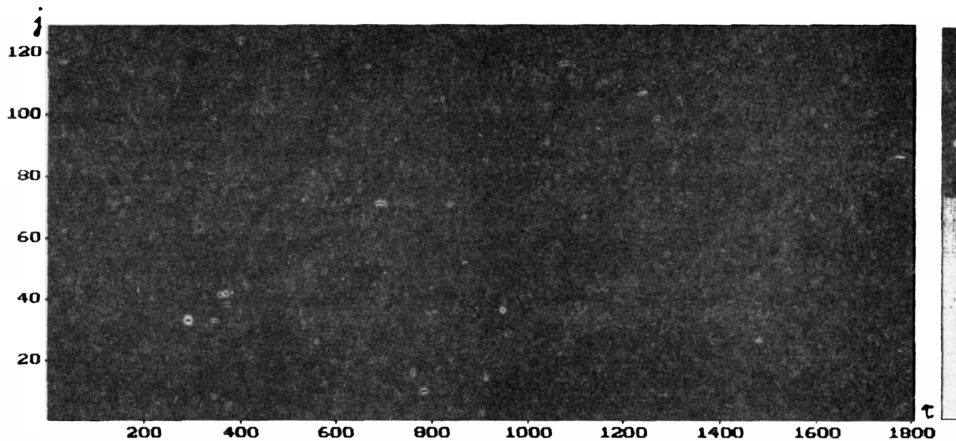


Рис. 8. Пространственно-временное распределение интенсивности колебаний в ходе формирования паттернов в системе (1), (2) при невязимной связи ($c_1 \neq c_2$) в случае слабой диффузии $d = 0.05$ в цепочке ($p = 0.5$, $\Delta = 2$, $\alpha = 5.75$, $c_1 = 0.51$, $c_2 = 5.0$) при начальных условиях

$$a_j^2 = b_j^2 = \begin{cases} 0.01 & j = 1, \dots, 50, \\ 0.5 & j = 51, \dots, 128. \end{cases}$$

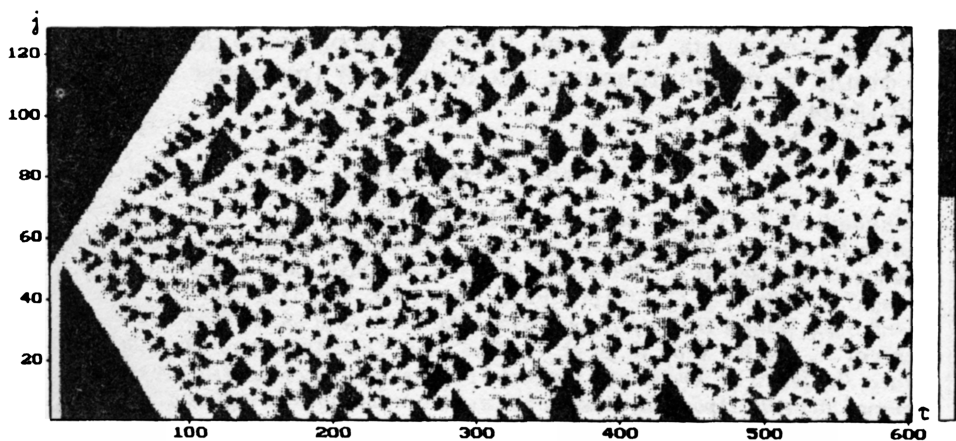


Рис. 9. Пространственно-временное распределение интенсивности колебаний в ходе формирования паттернов в системе (1), (2) при невязимной связи ($c_1 \neq c_2$) в случае сильной диффузии $d = 0.3$ в цепочке ($p = 0.5$, $\Delta = 2$, $\alpha = 5.75$, $c_1 = 0.51$, $c_2 = 4.0$) при начальных условиях

$$a_j^2 = b_j^2 = \begin{cases} 0.01 & j = 1, \dots, 50, \\ 0.5 & j = 51, \dots, 128. \end{cases}$$

в многомерных и распределенных системах. В частности, в больших ансамблях N автогенераторов (в том числе с различающимися параметрами) часто образуются слабо связанные кластеры с $m < N$ элементами. При этом, как можно ожидать с учетом приведенного выше рассмотрения, в определенной области параметров возможно выживание лишь кластеров с синхронизованными (по крайней мере, хотя бы частично) элементами. В результате эффективное число степеней свободы, достаточное для описания динамики системы, существенно уменьшается. Предварительный анализ подтверждает, что при определенных условиях этот механизм эффективен также при стохастической синхронизации и приводит к формированию локализованных структур с маломерной хаотической динамикой. С другой стороны, наблюдавшееся формирование разнообразных сложных паттернов при сравнительно простых, но неоднородных начальных условиях свидетельствует, что рассмотренное явление может быть также ответственно за формирование пространственного беспорядка при распространении фронтов в цепочках автогенераторов.

Отметим также, что ввиду простоты и общности механизма вымирания автоколебаний все сформулированные выводы без особого труда могут быть перефразированы на случай связанных многомерных решеток при наличии частотных линейных и нелинейных расстройек. Кроме того, трактуя две связанные цепочки как предельный случай сильно неоднородной двумерной решетки, на основании приведенного выше можно ожидать, что в двумерных системах введение неоднородности (например, частотной расстройки) по одной из координат будет приводить к появлению состояний, локализованных по обеим координатам.

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 94-02-03263 и 93-02-15424).

Список литературы

- [1] Рабинович М.И., Суцук М.М. // УФН. 1990. Т. 160. С. 3.
- [2] Hedley P., Beasley M.R., Wiesenfeld K. // Phys. Rev. B. 1988. Vol. 38. P. 8712.
- [3] Hedley P., Beasley M.R., Wiesenfeld K. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 52. P. 1619.
- [4] Wang S.S., Winful H.G. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 52. P. 1774.
- [5] Wang S.S., Winful H.G. // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 53. P. 1894.
- [6] Benford J., Sze H., Woo W. et al. // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 62. P. 969.
- [7] Гласс Л., Мэжу М. От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.: Мир, 1991. 248 с.
- [8] Сентагомаи Я., Арбул М. Концептуальные модели нервной системы. М.: Мир, 1976. 176 с.
- [9] Ermentrout G.B., Kopell M. // SIAM J. Math. Anal. 1984. Vol. 15. P. 215.
- [10] Sherman A., Rinzel J., Keizer J. // Biophys. J. 1988. Vol. 54. P. 411.
- [11] Okuda K., Kuramoto Y. // Prog. Theor. Phys. 1991. Vol. 86. P. 1159.
- [12] Mineev M.B., Mkrtchyan G.S., Schmidt V.V. // J. Low-Temp. Phys. 1981. Vol. 45. P. 497.
- [13] Holst T., Hansen J.B., Gronbech-Jensen N., Blackburn J.A. // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42. P. 127.
- [14] Continho S., Pitanga P., Lederer P. // Phys. Rev. B. 1981. Vol. 23. P. 4567.
- [15] Braun O.M., Kivshar Y.U.S., Kosevich A.N. // J. Phys. C. 1988. Vol. 21. P. 3881.
- [16] Pouget J., Maugin G.A. // Physica D. 1984. Vol. 14. P. 88.
- [17] Maugin G.A., Miled A. // Phys. Rev. B. 1986. Vol. 33. P. 4830.
- [18] Winfree A.T. // J. Theor. Biol. 1967. Vol. 16. p. 15.
- [19] Kuramoto Y., Mishikawa I. // J. Stat. Phys. 1987. Vol. 49. P. 569.

- [20] Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Berlin: Springer, 1984. 156 p.
- [21] Дрендель С.Д., Хорс Н.П., Васильев В.А. // *Динамика клеточных популяций*. Горький, 1984. С. 108.
- [22] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Ятно В.Г. *Автоволновые процессы*. М.: Наука, 1987. 240 с.
- [23] Yamaguchi Y., Shimizu H. // *Physica D*. 1984. Vol. 11. P. 212.
- [24] Bar-Eli K. // *Physica D*. 1985. Vol. 14. P. 242.
- [25] Ermentrout G.B. // *Nonlinear Oscillations in Biology and Chemistry*. / Ed. H. Othmer. New York: Springer, 1986.
- [26] Ermentrout G.B., Troy W.C. // *SIAM J. Appl. Math.* 1986. Vol. 46. P. 359.
- [27] Ermentrout G.B. // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 219.
- [28] Aronson D.G., Ermentrout G.B., Kopell N. // *Physica D*. 1990. Vol. 41. P. 403.
- [29] Gray C.H., König P., Engel A.K., Singer W. // *Nature*. 1989. Vol. 338. P. 334.
- [30] Lega J. // *Eur. J. Mech. B / Fluids*. 1991. Vol. 10. N 2. Suppl. P. 145.
-